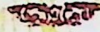


॥ श्रीः ॥

विद्याभवन प्राच्यविद्या ग्रन्थमाला

५६



श्रीभास्कराचार्यप्रणीतं

बीजगणितम्

पं० श्रीविद्युद्धानन्दगौडेन ज्योतिषाचार्येण विरचितया
सरलसंस्कृतव्याख्यया हिन्दीटीकया च संवलितम्

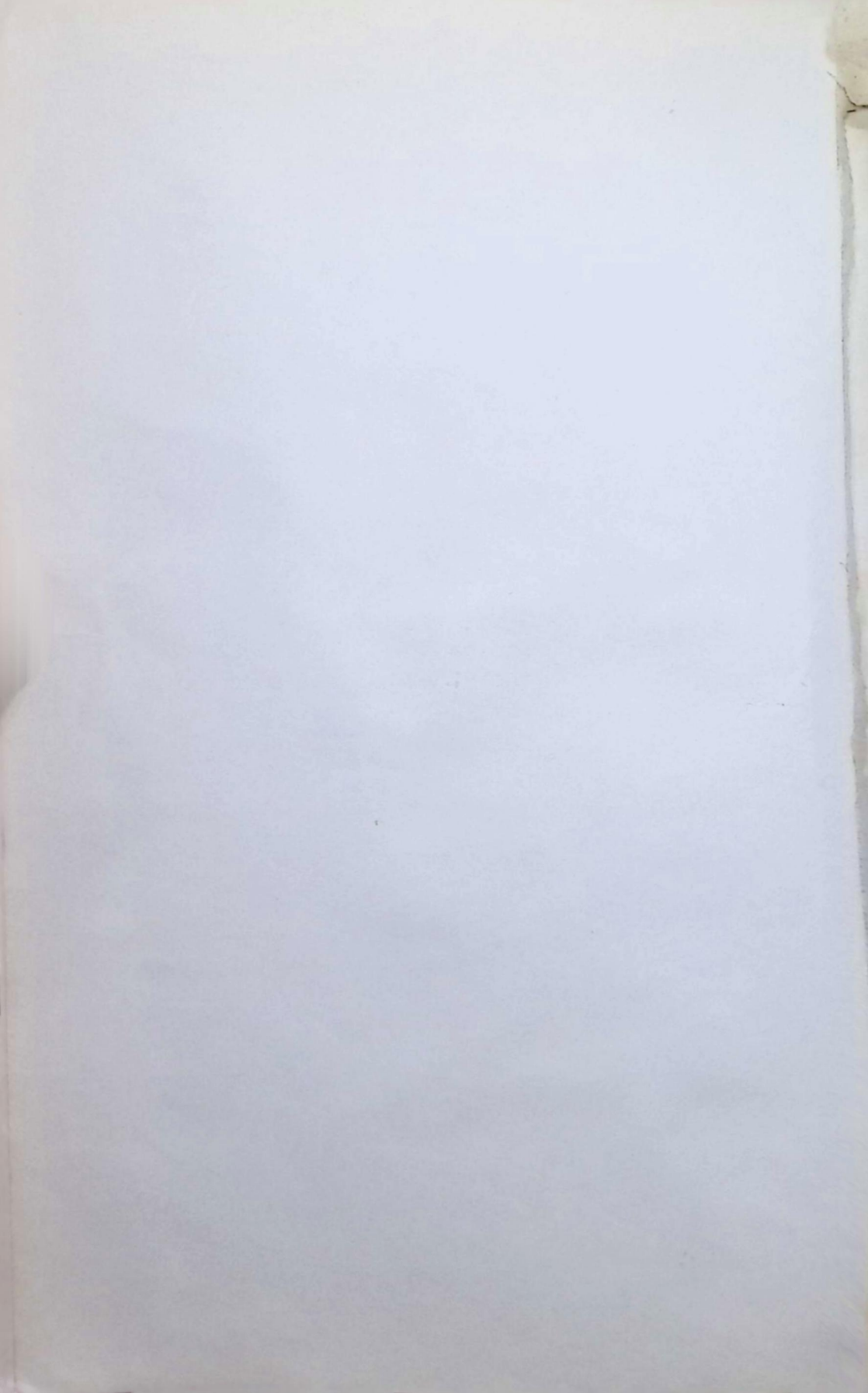
हिन्दी टीकाकारः

पं० श्रीवलदेवमिश्र



चौखम्बा विद्याभवन

वाराणसी



विद्याभवन प्राच्यविद्या ग्रन्थमाला

❀ ५६ ❀

श्रीभास्कराचार्यप्रणीतम्

❀ बीजगणितम् ❀

खुर्जारथश्रीराधाकृष्णसंस्कृतमहाविद्यालयज्यौतिषशास्त्राध्यापकेन
पं० श्रीविशुद्धानन्दगौडेन ज्यौतिषाचार्येण विरचितया
सरलसंस्कृतव्याख्यया हिन्दीटीकया च संवलितम्

काशीस्थराजकीयमहाविद्यालयीयसरस्वतीभवनपुस्तकालये प्राचीन-
पुस्तककार्यसम्पादकेन ज्यौतिषाचार्यज्यौतिषतीर्थ
पं० श्रीवलदेवमिश्रेण रचितया
टिप्पण्या समुद्भासितम्

तेनैव संशोधितम्



चौरवम्बा विद्याभवन

वा रा ण सो

प्रकाशक

चौखम्बा विद्याभवन

(भारतीय संस्कृति एवं साहित्य के प्रकाशक तथा वितरक)

प्रीक (बनारस स्टेट बैंक भवन के पीछे)

पो० बा० नं० १०६९, वाराणसी २२१००१

दूरभाष : ३२०४०४

सर्वाधिकार सुरक्षित

पुनर्मुद्रित संस्करण २००१

मूल्य १२५००

वन्य प्राप्तिस्थान

चौखम्बा सुरभारती प्रकाशन

के० ३७/१९७, गोपालमन्दिर लेन

पो० बा० नं० ११२९, वाराणसी २२१००१

दूरभाष : ३३३४३१

*

चौखम्बा संस्कृत प्रतिष्ठान

३८ यू. ए., बंगलो रोड, जवाहरनगर

पो० बा० नं० २११३

दिल्ली ११०००७

दूरभाष : २३६३९१

मुद्रक

फूल प्रिन्टर्स

वाराणसी

प्राक्कथनम्

भास्करीयबीजगणितं ज्योतिषाचार्यं पं० श्रीविशुद्धानन्दगौडीय-
संस्कृतव्याख्या भाषाभाष्यसहितं चौखम्बा त्रिद्याभवन वाराणसी
इत्येतैः मुद्रितं समारब्धम् । किञ्चित्कालादनन्तरमस्य शोधनभारः
ममोपरि तैरेव प्रकाशकमहोदयैर्निक्षिप्तः । पूर्वार्धं चक्रवालपर्यन्तं
तथैव मुद्रणं संजातम् ।

कानिचिद्वर्षाण्यतीतानि यदाहं काशिकराजकीयसंस्कृत-
ज्योतिषमध्यपरीक्षाया बीजगणितस्य परीक्षक आसं तदा नवीन-
गणितमिश्रितान् तत्रत्यान् प्रश्नान् दृष्ट्वा तदुत्तरीकरणेऽसमर्थाः
निर्विण्णास्तदानींतना केचन मुखराश्छात्रास्तदुत्तरपत्रैककोणे लिखि-
तवन्तः यत्तथाविधानां प्रश्नानामुत्तरप्राप्त्यै तथाविधस्य पुस्तकस्य
प्रकाशनं प्रथमं समुचितम् । तेषां दुःखितानां छात्राणामनुदोषं समये
समये स्मरं स्मरं तथा तादृक्सुयोगं चोपलब्धं दृष्ट्वा पूर्वार्धोपयुक्तं
नवीनगणितं मया पूर्वार्धपरिशिष्टरूपेण तत्पश्चात् सन्निवेशितम् ।
ततः परमुत्तरार्धे यथास्थान एव नवीनगणितस्य समावेशः इष्ट
आसीत् परञ्च महाकरालयुद्धकाले पत्रप्राप्तेः सर्वथाऽभावात् भाषा-
भाष्यस्य नवीनगणितस्य च समावेशः दूर एव स्थापितः कथञ्चि-
न्मूलपुस्तकस्य मट्टिप्पणीमिश्रितोपपत्तियुक्तस्यैव प्रकाशनं श्रीकाशी-
विश्वनाथकृपया समुपपन्नम् । अतः स्वमनोरथानुरूपं प्रकाशनं
न संजातं तथापि यत्किञ्चिन्मुद्रितं तेनापि यदोदानोन्तनानां
गणितशान्त्रप्रवेष्टृणां सुबोधानां छात्राणां कश्चिदुपकारः स्यात्तदा
स्वीयपरिश्रमं सफलं मन्ये । अत्राभ्यासार्थं ये प्रश्नाः स्थापितास्तेषा-
मुत्तराणि च ग्रन्थान्ते संनिवेशितानि । तथाप्यत्र प्रकाशने याज्ञक्य-
यस्ताः सुजनाः संशोधयिष्यन्तीत्याशासे —

सरस्वती-भवनम्,

काशी ।

२६-७-४३

}

बलदेवमिश्रो

ज्योतिषाचार्यः ।

विषयाणां सूची

विषयः	पृष्ठम्	विषयः	पृष्ठम्
मङ्गलाचरणम्	१-४	करणीसंकलनव्यवकलनम्	५४-५७
धनर्णसंकलनम्	५-६	करणीगुणनम्	५८-६०
धनर्णव्यवकलनम्	७-८	करणीभजनम्	६०-६९
धनर्णगुणनम्	८-१०	करणीवर्गः	६९-७१
धनर्णभागहारः	१०-११	करणीमूलम्	७१-८९
धनर्णवर्गो मूलं च	१२-१३	कुट्टकः	८९-१२६
खसंकलनव्यवकलनम्	१३-१६	वर्गप्रकृतिः	१२६-१३८
खगुणादि	१६-१७	चक्रवालम्	१३६-१६०
अनन्तराशिप्रशंसा	१८-१९	पूर्वार्धपरिशिष्टम्	१६१-२६२
अव्यक्तकल्पना	२०	एकवर्णसमीकरणबीजम्	२६३-३१०
अव्यक्तसंकलनव्यवकलनम्	२०-२९	एकवर्णमध्यमाहरणम्	३११-३३३
अव्यक्तादिगुणनम्	२९-३७	अनेकवर्णसमीकरणम्	३३३-३५१
अव्यक्तादिभागहारः	३८-४५	अनेकवर्णमध्यमाहरणम्	३५२-३७३
अव्यक्तवर्गादि	४५-५०	भावितम्	३७४-३८१
अनेकवर्णादिषड्विधम्	५०-५३	ग्रन्थोपसंहारः	३८१-३८२

* श्रीगणेशाय नमः *

बीजगणितम्

(संस्कृतव्याख्याभाषाभाष्यसहितम्)

वन्दे शिवं शिवकरं करुणाद्रिभावं
शुद्धं पदाम्बुजयुगं च पितामहस्य ।
सर्वप्रधानमहिमानमहं परं तं
पूज्यं भजे गुरुवरं वलदेवमिश्रम् ॥ १ ॥

श्रीमद्भास्करवर्यसूक्तिलसितं बीजं सतां सम्मतं
भाषाभाष्यनिबन्धनेन सरलं बालेषु भूयाद्यथा ।
ज्ञात्वैवं विविधप्रयासविषमे मार्गेऽधुना धावता
हित्वा क्लेशमशेषबालसुखदं भाष्यं मया तन्यते ॥ २ ॥

अथ शाण्डिल्यगोत्रमुनिवरवंशावतंसजविडनगरनिवासि-कुम्भो-
द्भवभूषणदिग्भूषणसकलागमाचार्यवर्यश्रीमद्देश्वरोपाध्यायतनयनिखिल -
विद्यावाचस्पतिगणितविद्याचतुराननधरणितरणिः श्रीभास्कराचार्यो ग्रह-
गणितरूपसिद्धान्तशिरोमणिं चिकीर्षुस्तदुपयोगितया तदध्यायभूतं व्यक्त-
गणितमुक्त्वा तथाभूतमव्यक्तगणितमारभमाणः प्रत्यूहव्यूहनिरासाय शिष्टा-
चारपरिपालनार्थमङ्गलमाचरञ्छिष्यशिक्षार्थं निबध्नाति—

उत्पादकं यत्प्रवदन्ति बुद्धेरधिष्ठितं सत्पुरुषेण सांख्याः ।

व्यक्तस्य कृत्स्नस्य तदेकबीजमव्यक्तमीशं गणितं च वन्दे ॥ १ ॥

आचार्येण, अर्थत्रयविभूषितं पद्यमिदमुपजातिवृत्तेन मङ्गलादौ न्यस्तम् ।
उत्पादकमिति—

अन्वयः—यत् (अव्यक्तं) पुरुषेण, अधिष्ठितं सत् बुद्धेरुत्पादकं

सांख्याः प्रवदन्ति, कृत्स्नस्य व्यक्तस्य, एकबीजं तत् अव्यक्तम्, ईशं, गणितं च वन्दे ।

व्याख्या—यत्, अव्यक्तं, व्यक्तादन्यत्, अव्यक्तं, (प्रकृतिः), रजो-
गुण-तमोगुण-सत्त्वगुणात्मकस्य गुणत्रयस्य साम्यावस्था प्रकृतिः, पुरुषेण
पुष्करपलाशवन्निर्लिप्तेन अधिष्ठितं सत् साक्षित्वेनेति भावः बुद्धेः महत्
तत्त्वस्य, अन्तःकरणापरपर्यायस्य, उत्पादकं जनकं सांख्याः कापिलाः प्रव-
दन्ति कथयन्ति, कृत्स्नस्य समग्रस्य व्यक्तस्य दृश्यमानस्य पृथिवीजलादेः,
एकबीजं, स्वसजातीयद्वितीयरहितं बीजमादिकारणमव्यक्तं वन्दे नम-
स्करोमि, अयमाशयस्तेषां पुरुषः पुष्करपलाशवन्निर्लिप्तः साक्षी द्रष्टा
भवति, प्रकृतिः कर्त्री भवति प्रकृतिगतचैतन्यान्यथाऽनुपपत्त्या पुरुषकल्प-
नम्, पुरुषश्चेतनः प्रकृतिरचेतना सर्गक्रमस्तु प्रकृतेर्महांस्ततोऽहंकारस्त-
स्माद्गणश्च षोडशकस्तस्मादपि षोडशकात् पंचभ्यः पंच भूतानि, इति—
कृत्स्नस्य, व्यक्तस्य, एकबीजम्, ईशं, ब्रह्मस्वरूपं वन्दे, तथा च श्रुतिः—
“एकमेवाद्वयं ब्रह्म नेह नानास्ति किंचन” इति । कृत्स्नस्य, व्यक्तस्य एक-
बीजं गणितं वन्दे, तथा हि, सर्वमेकं सदाविशेषात्, सर्वं द्वेधा, नित्या-
नित्यभेदात्, सर्वं त्रेधा, ज्ञाता, ज्ञानं ज्ञेयमितिभेदात्, सर्वं चतुर्धा,
प्रमाता, प्रमाणं, प्रमितिः, प्रमेयमितिभेदात् इत्यादि, न्यायभाष्ये प्रति-
पादितम् । सर्वमेकं सदाविशेषात्, इत्यस्यार्थस्तु, घटः सन् पटः सन्
इति प्रतीतेः घटाभिन्नसदभिन्नपटस्य घटादभेदसिद्धिः, तस्मात्सिद्धः
संख्यैकान्तवादः, यद्गणितं सत्पुरुषेण विशिष्टिज्यौतिर्विदाऽधिष्ठितं सत्
बुद्धेरुत्पादकं भवति इति सांख्याः संख्याशास्त्रवेत्तारोऽर्थात् गणितशास्त्र-
वेत्तारः प्रवदन्ति, कृत्स्नस्य, समग्रस्य, व्यक्तस्य पाटीगणितस्य एकबीजं,
स्वसजातीयद्वितीयरहितं कारणम्, अव्यक्तं, बीजगणितनामकं गणितं
वन्दे नमस्करोमि ।

भाषा—सांख्यशास्त्र सम्बन्धी पहिला अर्थ—सांख्यशास्त्र के जाननेवाले पुरुष
के द्वारा संनिहित जिसको महत्त्व का उत्पादक कहते हैं, ऐसा जो संपूर्ण पदार्थों
का मुख्यकारण अव्यक्त है, उसकी मैं बन्दना करता हूँ । सांख्य शास्त्रवाले प्रकृति
से सृष्टि की उत्पत्ति मानते हैं । जैसा कि उपर की व्याख्या में स्पष्ट दिखला दिया

है, ऐसा जो सांख्यमत से संसार का कारण मुख्य प्रसिद्ध अव्यक्त उसकी वन्दना करता हूँ ।

उत्तर मीमांसा (वेदान्त) सम्बन्धी दूसरा अर्थ—वेदान्ती लोग “एकमेवाद्वितीयं ब्रह्म” इस श्रुति के आधार पर ब्रह्म ही को सबका मूलभूत मानते हैं, ब्रह्म ही सत्य है और जगत् मिथ्या है । ऐसा जो ब्रह्माण्डोदरवर्ती वस्तुजात का असाधारण कारण सच्चिदानन्द ब्रह्मस्वरूप ईश्वर है, उसकी मैं वन्दना करता हूँ ।

ज्यौतिषशास्त्र सम्बन्धी तीसरा अर्थ—संख्याशास्त्र अर्थात् ज्यौतिषशास्त्र को जानने वाले लोग सूक्ष्मबुद्धि और परिश्रम से अग्रस्त किये हुये जिसको बुद्धि अर्थात् मति का उत्पादक बनलाते हैं, ऐसा जो सम्पूर्ण व्यक्तगणित अर्थात् (पाटी गणित) का मूलभूत बीजगणित है, उसकी मैं वन्दना करता हूँ ॥ १ ॥

पूर्व प्रोक्तं व्यक्तमव्यक्तबीजं प्रायः प्रश्ना नो विनाऽव्यक्तयुक्त्या ।
ज्ञातुं शक्या मन्दधीभिर्नितान्तं यस्मात्तस्माद्वच्मि बीजक्रियां च ॥

पूर्वमिति—अव्यक्तबीजं व्यक्तं पूर्व प्रोक्तम्, अव्यक्तं बीजगणितं यावत्तावद्वर्णकल्पनाभिः क्रियमाणं गणितमित्यर्थः बीजं निदानकारणं मूलमित्यर्थः यस्य तत् व्यक्तं पाटीगणितं वर्णकल्पनारहितगणितं पूर्वं मया भास्कराचार्येण प्रोक्तम्, कथितमित्यर्थः । तत्र प्रायः प्रश्ना अव्यक्त-युक्त्या विना ज्ञातुं नो शक्याः (बीजगणितनियमज्ञानमन्तरा प्रश्ना न सिद्धिं यान्तीति भावः) मन्दधीभिस्तु नितान्तं ज्ञातुं नो शक्या यस्मात्तस्मात् बीजक्रियां वच्मि ।

अस्यायमाशयः । यत् बीजगणितस्य निदानभूतं पाटीगणितं मया (भास्कराचार्येण) पूर्व लिखितमेव परं तत्र पाटीगणितेऽव्यक्तगणित-नियमज्ञानमन्तरा प्रश्नाः न सर्वे सिद्ध्यन्ति । मन्दधियस्तु तज्ज्ञान-मन्तरा नितान्तं प्रश्नान् नावगमिष्यन्ति, अतो बीजक्रियां वच्मि ।

भाषा—अव्यक्त अर्थात् बीजगणित है मूल जिसका ऐसा व्यक्त कहिये लीलावती नामक पाटीगणित पहिले कही जा चुकी है । परन्तु बीजगणित की युक्ति के विना प्रश्न अच्छी प्रकार हल नहीं होते और मन्द बुद्धियोंके लिये तो किसी भी प्रकार से नहीं जाने जा सकते इसलिए अब मैं (भास्कराचार्य) बीज-गणित की रीति को कहता हूँ ।

“बीजगणित तथा उसके कुछ सिद्धान्त” बीजगणित अक्षरों का ज्ञान सिद्ध

लाता है अर्थात् अक्षरों के आधार पर इसकी गणित चलती है और अक्षरों को बीज भी कहते हैं और अक्षरों की इसमें गणना है इसलिये इसका नाम “बीज-गणित” रखा गया ।

बीजगणित--गणित शास्त्र का वह भेद है जो संख्याओं के सम्बन्धों का निरूपण करे तथा जिसमें संख्याओं के भेद अक्षरों में भी आवें एवं अक्षरों को प्रधान विषय मान कर जो गणित की जाय, पाटी गणित में संख्यायें १, २, ३, ४, ५, अङ्कों के रूप में प्रकट की जाती हैं और बीजगणित में संख्यायें अ, क, ख, ग, इत्यादि अक्षरों से भी प्रकट की जाती हैं ।

अंकगणित में संख्याओं का मूल्य कभी घटता बढ़ता नहीं है निश्चित ही रहता है, परन्तु बीजगणित में वह मूल्य कल्पना के आधार पर जैसा मान लें घट बढ़ जाता है । जैसे $४ + ५ = ९$ यहां अंकगणित के नियम से $४ + ५$ का योग ९ ही बराबर रहेगा घट बढ़ नहीं सकता । किन्तु बीजगणित में या + का $= ९$ के उसी अवस्था में बराबर हो सकते हैं जब या $= ४$ एवं का $= ५$ अथवा का $= ४$, एवं या $= ५$ हों अन्यथा नहीं इसलिये बीजगणित में जैसा मान प्रश्न के समय कल्पना कर लिया जाय उसी हिसाब से प्रश्न निकलता है अर्थात् कल्पना के आधार पर बढ़ता घटता है । संकलन, व्यवकलन, गुणन, भजन के चिह्न अङ्कगणित की तरह इसमें भी आते हैं उनको यहां भी वैसा ही समझा जाता है । बीजगणित में केवल या + का इस प्रकार दो या अधिक अक्षरों के बीच में उक्त चिह्न रहने में राशियों का संकलन अपेक्षित है यह समझा जायगा । इसी प्रकार गुणन, एवं भजन तथा अन्तर भी समझना चाहिये । इसमें अक्षरों की क्रोमती में जोड़ना घटाना, गुणन, भजन करना समझना चाहिये ।

जब किसी संख्या या अक्षर के पूर्व कोई चिह्न न लिखा हो तो चिह्न + का ही समझना चाहिये । जैसे क का अर्थ + क अर्थात् धनात्मक अङ्क यह है यह समझना चाहिये ।

इनमें $(क - प)$ यह व्यवकलन, $(क \times प) =$ यह गुणन $(क \div प) =$ यह भजन के स्वरूपान्तर बीजगणित में चलते हैं अर्थात् अक्षरों की क्रोमती में योग और अन्तर गुणन भजन किया जाता है ।

जिस प्रकार अंकगणित में दो या अधिक संख्याओं के गुणनफल को उन संख्याओं के बीच में बिन्दु रखकर सूचित कर देते हैं अथवा कोई भी चिह्न दो अङ्कों के बीच में न रहने से गुणा के चिह्न का अन्वहार किया जाता है इसी

प्रकार वीजगणित में भी दो अक्षरों के बीच में बिन्दु रखने से अथवा कोई चिह्न न रहने से गुणा के चिह्न का बोधक होता है ।

अङ्क कोष्ठगत रहने पर भी बीच में गुणा का चिह्न समझा जाता है जैसे—
(५) (४) = २० हुआ ।

यदि ५.४ ऐसा होगा तो दशमलव समझा जाता है, कोई चिह्न बीच में न रहनेपर स्थानीय मानकी दृष्टि से ५४ का बोध होता है और (५) (४) लिखने से २० का ग्रहण है । वीजगणित में केवल क × ख वा क ख, वा क ख, ये तीनों स्वरूप लिखे जायेंगे । इसमें अक्षरों की क्रिमत या मान जैसा होगा वैसा गुणनफल होगा—भाग में भी यही अर्थ है कि, क ÷ ख इसमें क के मान में ख के मान का भाग देने से जो फल आवेगा वही भजनफल होगा यह $\frac{क}{ख}$ ऐसा भी लिखा जायेगा ।

यदि किसी अक्षर को अङ्क से गुणा करें तो ४ × क = ४ क ऐसा लिखा जायेगा । यह संख्यात्मकगुणनफल कहलाता है । संख्यात्मकगुणक अक्षरों के पहिले हुआ करते हैं जिस अक्षर में पूर्व में संख्यात्मकगुणक कोई न हो तो १ संख्यात्मकगुणक माना जाता है ।

किसी मान संख्या में संकलन व्यवकलन के प्रश्न में कई अक्षर हों और वे एक से हो जैसे ३ क + ४ क - २ क इत्यादि । तो ये सजातीय पद कहलाते हैं । यदि भिन्न-भिन्न अक्षर हों तो वह मिश्रितमान कहलाता है, जैसे २ क + २ प - ४ ल + १ ख इत्यादि ।

इसलिये समान अक्षरवाले पद को जिसमें संख्यायें चाहे भिन्न रहें तो सजातीय पद कहते हैं, अक्षर भिन्न रहने से मिश्रितमान या मिश्रित पद या विजातीय पद कहलाता है । इन बातों का ध्यान रखते हुए नियमानुसार गणित वीजगणित में की जाती है । इसके ये साधारण नियम लिखे हैं, विशेष नियम प्रसङ्गवश यथास्थल में हैं ।

धनर्णसंकलने करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा धनर्णयोरन्तरमेव योगः ।

व्याख्या—धनर्णसंकलनमुपजातिकापूर्वार्धेनोच्यते—योगे युतिरिति—क्षययोः ऋणगतयोः मानयोः संख्ययोर्वा स्वयोर्धनयोर्वा संख्ययोः योगे कर्तव्ये युतिः स्यात्, अर्थात् वर्णात्मकादिकराशयोः द्वयोः योगे

कर्त्तव्ये वर्णात्मक-अङ्कात्मक-राशयोस्तु पाटीगणितोक्तरीत्या योगो विधेयः, करण्योस्तु वक्ष्यमाणविधिना तत्र अङ्कात्मक-वर्णात्मक-राशयोः योगे कर्त्तव्ये ऋणगतयोः संख्ययोर्योगः ऋणगतः । धनगतयोः संख्ययोस्तु धनगतो भवेत् । एका संख्या धनगता, अन्या ऋणगता चेत्तदा तयोः राशयोरन्तरमेव योगः स्यात् । अत एवोक्तं “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” ।

उदाहरणम्—

रूपत्रयं रूपचतुष्टयं च क्षयं धनं वा सहितं वदाशु ।

स्वर्णं क्षयं स्वं च पृथक् पृथङ्मे धनर्णयोः संकलनामवैषि ॥ १ ॥

अत्र रूपाणामव्यक्तानां चाद्याक्षराण्युपलक्षणार्थं लेख्यानि-यानि ऋणगतानि तान्यूर्ध्वविन्दूनि च ।

न्यासः रु० — ३ रु० — ४ योगे जातं रु० — ७ ।

” रु० — ३ रु० ४ ” ” रु० ७ ।

” रु० — ३ रु० — ४ ” ” रु० — १ ।

” रु० — ३ रु० ४ ” ” रु० १ ।

एवं विभिन्नेष्वपि ।

भाषा—ऋणात्मक अङ्कों का योग ऋणात्मक होता है, धनात्मक दो संख्याओं का योग धनात्मक होता है, तथा धन एवं ऋणात्मक संख्याओं का अन्तर ही योग होता है ।

भाषा—रु० ३ एवं रु० ४ ये दो संख्याएँ ऋणात्मक हैं, इनका योग क्या होगा । तथा पहिली रु० ३ यह संख्या धनगत तथा रु० ४ यह भी धनात्मक है, इन दोनों का योग क्या होगा । तथा पहिली संख्या रु० ३ यह धनात्मक है, रु० ४ यह दूसरी ऋणात्मक है, इन दोनों का योग क्या होगा । तथा पहिली ३ ऋणात्मक है, दूसरी रु० ४ धनात्मक है, इनका योग क्या होगा, शीघ्र बतलाओ । अगर धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं के योग को निकालना जानते हो तो । उत्तर के लिये—

न्यास—रु० ३ रु० ४ इन ऋण, ऋण संख्याओं का योग = रु० ७ ।

रु० ३ रु० ४ धन धन ” = रु० ७ ।

रु० ३ रु० ४ धन ऋण ” = रु० १ ।

रु० ३ रु० ४ ऋण धन ” = रु० १ ।

यह क्रम से उपरोक्त नियमानुसार योग हुआ ।

धनर्णव्यवकलने करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति स्वत्वं क्षयस्तद्युतिरुक्तवच्च ॥१॥

व्याख्या—धनर्णव्यवकलनमुपजात्युत्तरार्धेनोच्यते । संशोध्यते निष्कास्यतेऽथवा, अपनीयते यत् तत्संशोध्यमानं (करण्यात्मकं रूपात्मकं वर्णात्मकं वा) मानं यदि धनात्मकं भवेत् तर्हि ऋणत्वमेति, यदि च क्षयो-
ऽर्थादृणात्मकमेव भवेत् तदा धनात्मकं भवेत् पश्चात् तद्युतिरुक्तवदेव स्यात् । अर्थात् ययोरन्तरं कर्तव्यं भवेत् तयोर्मध्ये संशोध्यमानस्य पदार्थ-
स्य धनर्णतावैपरीत्यं कृत्वा 'योगे युतिः स्यादित्यादिना तयोर्योगः कार्य-
स्तदेव व्यवकलनं स्यात्" ।

उदाहरणम्—

त्रयाद् द्वयं स्वात् स्वमृणादृणं च व्यस्तं च संशोध्य वदाशु शेषम् ।

न्यासः रु ३ रु २ अन्तरे जातम् रु १ ।

„ रु - ३ रु - २ „ „ रु - १ ।

„ रु ३ रु - २ „ „ रु ५ ।

„ रु - ३ रु २ „ „ रु - ५ ।

इति धनर्णसंकलनव्यवकलने ।

भाषा—घटनेवाली धनसंख्या जब घटने जाती है तो ऋण को प्राप्त होती है एवं घटनेवाली ऋणसंख्या जब घटने जाती है तो धन को प्राप्त हो जाती है, बाद में उसका योग पिछले ही नियम से होता है । अर्थात् ऋण, ऋण संख्याओं का योग ऋणगत तथा धन, धन संख्याओं का योग धनगत होता है ।

उदाहरण—

भाषा—३ संख्या धनात्मक है, उसमें से २ धनात्मक संख्या को घटाने से क्या होगा एवं ३ ऋणात्मक संख्यामें २ ऋणात्मक संख्या घटकर क्या होगी तथा ३ धनात्मक संख्या में २ ऋणात्मक संख्या घटने पर क्या अवशेष रहेगा । एवं ३ ऋणात्मक संख्या में से २ धनात्मक संख्या घटने पर क्या शेष रहेगा, घटाकर शीघ्र बताओ ।

न्यास—रु ३ र २ इन दोनों धनात्मक संख्याओं का अन्तर = १ यह हुआ ।

रु ३ र २ इन दो ऋणात्मक संख्याओं का अन्तर = १ यह हुआ ।

र० ३ र० २ इनमें से एक पहिली धन दूसरी ऋण संख्याओं का अन्तर
= र० ५ यह हुआ ।

र० ३ स २ इनमें एक पहिली ऋण दूसरी धन संख्याओं का अन्तर
= ५ यह हुआ ।

नोट—यहाँ उपरोक्त उदाहरणों की क्रिया में इस बात पर पूरा ध्यान रखने की आवश्यकता है कि धन, धन संख्याओं का अन्तर धन ही होता है, उसमें घटने की स्थिति में एक घटनेवाली संख्या ऋण हो जाती है, फिर उनका अन्तर ही उत्तर होता है । इसी प्रकार दोनों ऋण संख्याओं में भी घटनेवाली संख्या घटने की स्थिति में ऋण की धन होकर अन्तरित होगी और शेष ऋणगत ही मान बचेगा, क्योंकि बड़ी संख्या में से ही छोटी संख्या घटा करती है । दोनों के ऋणात्मक होने से छोटी संख्या घटने की स्थिति में धनात्मक होकर अन्तरित होने से ऋणगत ही शेष अवशिष्ट रहेगा । तथा एक धन एक ऋण होने पर घटनेवाली संख्या घटने पर बदलने से यदि धन होगी तो उत्तर धन धन का योग धन होगा और यदि ऋण बनेगी तो ऋण, ऋण का योग ऋण होगा, इससे यह स्पष्ट है कि घटाने में घटनेवाली संख्या का स्वरूप बदलने पर तब दोनों संख्याओं का अन्तर किया जाता है ।

उपपत्ति—

धन एवं ऋण के व्यवकलन के विषय में धन राशि में यदि धन ही दूसरी राशि घटाई जाय तो दूसरी धनराशि ऋण होकर ही घटेगी, तभी अन्तर होगा, एवं ऋण संख्या में दूसरी ऋण संख्या घटाई जायेगी तो वह धन होकर घटेगी और शेष ऋण ही बचेगा, यह विषय संशोध्यमान राशि के विपरीत से उपपन्न होता है, जैसे ऋण १० र० में धन ३ र० घटाते हैं तो ऋण १० र० का स्वरूप = र० १३ + र० ३ यह हुआ । इसमें तीन रुपये घटाने से र० १३ यही अन्तर हुआ । इसलिये यहां घटनेवाली १ संख्या धन घटते समय धन की ऋण होकर ऋण ऋण का योग हुआ, यह भी संशोध्यमान पदार्थ से विपरीत ही उपपन्न हुआ । ऐसा सब जगह जानना चाहिये ।

गुणनम्—

गुणने करणसूत्रं वृत्तार्धम्—

स्वयोरस्वयोः स्वं वधः स्वर्णघाते क्षयो—

व्याख्या—अत्र गुणनं भुजंगप्रयातपूर्वार्धखण्डेनोच्यते—स्वयोरिति । स्वयोर्धनयोः, अस्वयोः ऋणयोः वधः गुणनं स्वं स्यात् । स्वर्णघाते तु

क्षयः स्यात् । अर्थात् गुण्यगुणकौ द्वावपि धनात्मकौ, ऋणौ वा तदा द्वयोरपि गुणनं धनमेव भवेत् ।

उदाहरणम् ।

धनं धनेनर्णमृणेन निम्नं द्वयं त्रयेण स्वमृणेन किं स्यात् ॥ १ ॥

न्यासः—रु० २ रु० ३ धनं धनं धनं स्यादिति जातं रु० ६ ।

रु० — २ रु० — ३ ऋणं ऋणं धनमेव स्यात् रु० ६ ।

रु० २ रु० — ३ धनमृणगुणमृणं ,, रु० — ६ ।

रु० — २ रु० ३ ऋणं धनगुणमृणं ,, रु० — ६ ।

इति धनर्णगुणनम् ।

भाषा—गुणन की दो राशियां होती हैं उनमें एक को गुण्य और दूसरी को गुणक कहते हैं । यदि उन दोनों राशियों में एक राशि धनात्मक हो और एक ऋणात्मक हो तो दोनों का गुणन फल ऋण होता है, एवं दोनों धनात्मक ही हों तो गुणनफल धनात्मक होता है तथा दोनों ऋणात्मक हों तो भी गुणनफल धनात्मक ही होगा ।

उदाहरण ।

भाषा—धन दो को धन तीन से, वा ऋण दो को ऋण तीन से वा धन दो को ऋण तीन से अथवा ऋण दो को धन तीन से गुणा करके गुणनफल अलग अलग बताओ ।

न्यास—(१) रु २ को रु ३ से धन धन को गुणा करने से गुणनफल रु ६ धन हुआ ।

(२) रु २ को रु ३ । ऋण को ऋण से गुणने से गुणनफल रु ६ धन हुआ क्योंकि ऋण ऋण का गुणा धन होता है ।

(३) रु २ रु ३ । धन को ऋण से गुणा करने से गुणनफल रु ६ ऋण हुआ ।

(४) रु २ रु ३ । ऋण को धन से गुणने से भी गुणनफल रु ६ ऋण ही हुआ ।

उपपत्ति—

गुणा के उपरोक्त नियम की उपपत्ति जानने के लिये यह बात स्पष्ट है कि—

गुणा—योग की साधारण क्रिया को कहते हैं । दो संख्याओं में दूसरी संख्या का जो प्रमाण हो उतनी बार प्रथम संख्या को रखकर उन सब संख्याओं के योग को उन दोनों संख्याओं का गुणनफल कहते हैं । यह विषय गणित-मुक्तावली

प्रथम भाग में मैंने स्पष्ट लिखा है । इस उपर्युक्त सिद्धान्त से गुणक के समान गुण्य की जो आवृत्ति वही गुणनफल हुआ, यदि गुण्य, एवं गुणक दोनों धनात्मक हों तो गुणनफल धन होगा । क्योंकि गुणक तुल्य आवृत्तियों का योग धन ही रहेगा क्योंकि दोनों धन हैं । गुणन-विधि में गुण्य को गुणक, एवं गुणक को गुण्य भी मान कर क्रिया की जा सकती है । गुणन-फल समान हो रहेगा । इसलिये यदि उन दोनों में एक धन दूसरा ऋण होवे तो गुणनफल ऋण होगा, क्योंकि एक के ऋण हो जाने से तत्तुल्य आवृत्तियों का योग ऋण स्वरूप हो जायगा ।

अथवा, मान लो कि गुण्य, एवं गुणक दोनों राशी समान हैं । और एक धन है दूसरी ऋण जैसे ५ रु ५ इनका योग, अन्तर ही योग होगा = ० इनको किसी समान अङ्क से गुणा किया—फिर भी गुणन फलों का योग भी शून्य ही होगा । जैसे ५ रु धन से दोनों को गुणा किया ५ × ५ रु का गुणा २० धन हुआ, दूसरे स्थान में ५ × ५ रु से गुणा किया, गुणनफल २० ऋणात्मक हुआ इनका अन्तर २० रु २० = ० यही योग हुआ । ठीक है यदि ५ रु ५ का गुणनफल २० न माना जाय तो योगफल शून्य न हो कर ५० योगफल होगा जो कि अशुद्ध है क्योंकि पहिले कह चुके हैं कि “धनर्ण-योरन्तरमेव योगः” । इसलिये धन और ऋण का घात ऋण ही होगा ।

भजनम्—

—भागहारेऽपि चैवं निरुक्तम् ।

व्याख्या—अथ भागहारविधिं भुजंगप्रयातोत्तरार्धेनोच्यते । भाग-हारेति । भागहारेऽपि, गुणनवदेव निरुक्तमित्यर्थः । अर्थात् भाज्य-भाजकयोः धनत्वे ऋणत्वे च यथा गुणने गुणनफलं धनमेवायाति तथैव भागहारेऽपि लब्धिरुभयोः धनत्वे ऋत्वेऽपि धनमेव भवति ।

उदाहरणम् ।

रूपाष्टकं रूपचतुष्टयेन धनं धनेनर्णमृणेन भक्तम् ।

ऋणं धनेन स्वमृणेन किं स्याद् द्रुतं वदेदं यदि वोबुधीषि ॥ १ ॥

न्यासः ५० ८ ५० ४ धनं धनाहतं धनं स्यादिति जातम् ५० २ ।

” ५० — ८ ५० — ४ ऋणमृणहतं ” ” ” ५० २ ।

” ५० — ८ ५० ४ ऋणं धनहतमृणं स्यादिति जातम् ५० — २ ।

” ५० ८ ५० — ४ धनमृणहतमृणं ” ” ५० — २ ।

इति धनर्णभागहारः ।

भागहारविधि—

भाषा—भाज्य और भाजक धन या ऋण होवे तो लब्धि धन आती है ।
यदि एक धन दूसरा ऋण होवे तो लब्धि ऋण आवेगी ।

उपपत्ति—

यह बात गुणा के नियम से स्पष्ट है कि हर लब्धि का गुणा अर्थात् भाजक, एवं लब्धि का गुणनफल भाज्य के समान होता है, यदि शेष रहा हो तो शेष जुड़ के भाज्य के समान होता है । गुणनविधि में धन, धन, का घात धन, ऋण, ऋण का घात भी धन बतलाया है, इसी प्रकार भागहार में भाजक, एवं लब्धि के धन, धन होने से भाज्य धनात्मक ही आवेगा । एवं दोनों के ऋण, ऋण रहने से भी धन आवेगा, अतः भागहार में धन में ऋण का भाग देने से लब्धि ऋण ही होगी क्योंकि जो लब्धि होगी वह एवं भाजक दोनों ऋण होकर ही भाज्य को धनात्मक बनावेगा । इसलिये भाजक, भाज्य के धन, धन होने से धन ऋण, ऋण होने से भी धन, और भाज्य, या भाजक में कोई एक धन होते दूसरा ऋण होते लब्धि ऋण आवेगा । क्योंकि गुणा में धन धन का एवं ऋण ऋण का गुणा धन ही होता है, ऐसे ही धन में धन का भाग धन, ऋण में ऋण का भाग भी धन, भाज्य एवं भाजक में एक के धन एक के ऋण होने से लब्धि ऋण होगी, क्योंकि धन ऋण का गुणा ऋण होता है । और भाजक लब्धि का गुणा भाज्य के समान होता है । इसलिये “भागहारेऽपि चैवं निरुक्तम्” ऐसा कहा ।

उदाहरण—

भाषा—धन आठ में धन चार का भाग देने से क्या लब्धि मिलेगी, ऋण आठ में ऋण ४ का भाग देने से क्या लब्धि मिलेगी, ऋण आठ में धन चार का भाग देने से क्या लब्धि मिलेगी, धन आठ में ऋण चार का भाग देने से क्या लब्धि मिलेगी ।

न्यास—५० ८ ५० ४ । धन ८ में धन ४ का भाग देने से धन ५० २ लब्धि मिली ।

५० ८ ५० ४ । ऋण ५० ८ में ऋण ५० ४ का भाग देने से धन ५० २ लब्धि मिली ।

५० ८ ५० ४ । ऋण ५० ८ में धन ५० ४ का भाग देने से लब्धि ५० २ मिली ।

,, ५० ८ ५० ४ । धन ५० ८ में ऋण ५० ४ का भाग देने से लब्धि ५० २ मिली ।

धन एवम् ऋण राशियों के भागहार की विधि समाप्त हुई ।

उपपत्ति—

भागहार की उपपत्ति गुणा के समान है ।

वर्गादौ करणसूत्रं वृत्ताधम्—

कृतिः स्वर्णयोः स्वं स्वमूले धनर्णे

न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात् ॥ ४ ॥

व्याख्या—अथ वर्गविधिं तन्मूलानयनं च भुजङ्गप्रयातोत्तरार्धेनो-
च्यते । कृतिरिति । स्वर्णयोः कृतिः स्वं स्यात्, स्वस्यार्थात् धनात्मकस्य
ऋणस्य वा वर्गः स्वं = धनमेव स्यात् । मूलञ्च स्वमूले धनर्णे, इति—स्वस्य
धनस्य मूले धनर्णे भवतः । धनात्मकस्य वर्गाङ्कस्य मूलमृणमपि भवतीति
ध्येयम् । क्षयस्य, ऋणात्मकस्य मूलं नास्ति क्षयात्मकस्याङ्कस्य मूलं न
भवति, तस्याकृतित्वात् वर्गस्य तु मूलमायाति, किन्तु ऋणात्मकोऽङ्कः न
वर्गात्मकस्तस्य मूलमपि कथं स्यात् ।

इति विशुद्धानन्दगौड़ज्यौतिषाचार्यविरचितायां बीजगणितव्या-
ख्यायां धनर्णषड्विधप्रकरणं समाप्तम् ।

उदाहरणम्—

धनस्य रूपत्रितयस्य वर्ग

क्षयस्य च ब्रूहि सखे ममाशु ।

न्यासः—रु० ३ रु० — ३ । जातौ वर्गौ रु० ९ रु० ९

उदाहरणम्—

धनात्मकानामधनात्मकानां मूलं नवानां च पृथग्वदाशु ॥ १ ॥

न्यासः—रु० ९ । मूलम् ३ वा — ३

न्यासः—रु० ९ । एषामवर्गत्वान्मूलं नास्ति ।

इति धनर्णवर्गमूले ।

इति धनर्णषड्विधम् ।

वर्ग एवं मूल का प्रकार—

भाषा—वर्ग, धनात्मक, एवं ऋणात्मक राशियों का धन होता है । परन्तु धना-
त्मक राशि का वर्गमूल धन एवं ऋण दोनों होते हैं । ऋणराशि का वर्गमूल नहीं
हुआ करता क्योंकि ऋणात्मक राशि वर्ग नहीं मानी गई है, इसलिये उसका
वर्गमूल ही क्या हो सकता है ।

उपपत्ति—

पाटीगणितकी युक्तिसे “समद्विघातः कृतिरुच्यते” यानी समान दो अङ्कों के घात को वर्ग कहते हैं। गुणाके नियमसे यह बात भी स्पष्ट है कि धन, धन, राशि का घात धन, ऋण, ऋण, राशि का घात भी धन ही होता है, इसलिये वर्गात्मक राशि समान दो अङ्कों के घात से बनी हुई राशि हर हालत में धन ही रहा। इसलिये ऋणात्मक राशि तो वर्ग नहीं है। क्योंकि धन, और ऋण दो राशियों का घात तो ऋण होता है। यदि ऐसा न माना जाय तो समद्विघातः कृतिरुच्यते में दोष आयेगा, उस स्थिति में—धनात्मक, एवं ऋणात्मक, समानाङ्क न होने से इसलिये “न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात्” यही ठीक है।

उदाहरण ।

भाषा—धन तीन, ऋण तीन, इनका वर्ग बताओ।

(१) न्यास । ४ ३ इसका वर्ग = ४ ९ हुआ।

(२) ,, ४ ३ इसका वर्ग = ४ ९ हुआ।

उदाहरण ।

भाषा—धन नौ अथवा ऋण नौ का वर्गमूल बताओ।

(१) न्यास । ४ ९ इसका वर्गमूल = ४ ३ धन हुआ ४ ३ ऋण भी होता है।

(२) न्यास । ४ ९ यह राशि वर्गात्मक राशि नहीं है इसलिए इसका वर्गमूल नहीं हो सकता है।

धन एवं ऋण राशि के वर्गमूल का प्रकार समाप्त हुआ।

इसलिये धनर्णषड्विध अर्थात् (संकलन, व्यवकलन, गुणन, भजन, वर्ग, मूल,) का प्रकरण उपपत्ति सहित समाप्त हुआ।

विशुद्धानन्दरचितायां भाषायां सोपपत्तिकम् । धनर्णषड्विधं जातं सदुदाहरणस्फुटम् ।

खसंकलनव्यवकलने करणसूत्रं वृत्तार्धम्--

खयोगे वियोगे धनर्णं तथैव

च्युतं शून्यतस्तद्विपर्ययासमेति ।

व्याख्या—शून्यसम्बन्धिसंकलनव्यवकलनं भुजंगप्रयातपूर्वार्धेनोच्यते । खयोग इति । खस्य शून्यस्य योग इति खयोगस्तस्मिन् खयोगे, अर्थात् अव्यक्ताङ्कस्य, रूपस्य, कस्याप्यङ्कस्य वा शून्येन सह योगे वियोगे वा क्रियमाणे धनमृणं तथैव भवति । अनेन इदमायाति यत, खेन

वियोगः, तथा खाद्वियोग इति स्थितिद्वयं, स्थितिद्वये हि रूपादिकं युतं रूपादौ च शून्यं युतं विहीनं वा धनमृणं तथैव भवति । खाद्वियोगे विशेषो भवति केवलम् । तत् धनमृणं वा रूपादिकं शून्यतः च्युतं शोधितं सत् विपर्य्यासं वैपरीत्यमेति प्राप्नोति । अर्थात् धनं मानं शून्यतश्च्युत-मृणं, ऋणञ्च शून्यतश्च्युतं धनं भवतीत्यर्थः ।

भाषा—शून्य के जोड़ने और घटाने का नियम—यदि शून्य को किसी राशि में जोड़ा जाय, अथवा शून्य में किसी राशि को जोड़ दो वा शून्य को किसी राशि में घटाया जाय, तो भी धन ऋण का विपर्य्यास नहीं होता यानी धन ऋण मान नहीं बदलते । केवल शून्य में से किसी राशि में घटा दिया जाय, तो वह धन होवे तो ऋण, और ऋण होवे तो धन हो जाता है ।

उपपत्ति—

जो संख्या किसी संख्या में जोड़ी जाती है, उसमें जोड़े जानेवाली संख्या को योजक संख्या कहते हैं, और जिसमें जोड़ी जाय वह योज्य संख्या कहलाती है । योज्य, एवं योजक मानों में योजक का जितना हास होगा उतना ही योगजफल का भी हास होगा । इस प्रकार यदि योजक का सम्पूर्ण हास हो जाय तो योज्य के समान ही योगज फल रहेगा, जब योज्य, योजक में योज्य तुल्य सम्पूर्ण हास हो जाता है तो योजक के समान योगज फल ही रहेगा । इसलिये शून्य को किसी राशि में जोड़ा जाय अथवा शून्य में किसी राशि को जोड़ा जाय तो भी वह राशि ज्यों की त्यों रहती है । क्योंकि योजक या योज्य का मान परमहास के रूप में शून्य ही तक होगा ।

इसी प्रकार घटाने में वियोज्य और वियोजक दो पदार्थ होते हैं । उसमें वियोजक छोटी संख्या, वियोज्य बड़ी संख्या होती है । वियोज्य का वियोजक तुल्य परमहास ही अन्तर दोनों का होगा । इसलिये वियोज्य तुल्य ही शेष बचेगा । क्योंकि वियोजक का परमहास शून्य तक जायेगा, इसलिये शेष वियोज्य तुल्य ही रहने से यह बात स्पष्ट सिद्ध हुई कि किसी संख्या में या राशि में शून्य को घटाया जाय तो उस शून्य में कोई अन्तर नहीं पड़ेगा—वियोज्य तुल्य ही अन्तर रहता है । जैसे वियोज्य ८ वियोजक ५ है तो अन्तर ३ हुआ । यदि वियोजक भी ८ हो तो अन्तर = ० शून्य हुआ, यदि वियोजक ९ हो जाय तो एक ऋण शेष रहेगा, यदि वियोजक वियोज्य से अधिक बढ़ जायेगा तो ऋण शेष बचेगा क्योंकि यह मान शून्य से भी कम हो गया । यदि शून्य वियोज्य हो वियोजक

वही ५ रहे तो शून्य में से घटने पर शून्य से कम ही शेष बचेगा, इसलिये ५ ऋण शेष रहा, इसलिये यह बात स्पष्ट है कि शून्य में किसी राशि को घटावे तो धन, ऋण चिह्न बदल जाता है। धन का ऋण हो जाता है जैसा उपर दिया है, ऋण का धन हो जाता है। इसलिये “च्युतं शून्यतस्तद्विपर्ययमेति” ऐसा लिखा है।

उदाहरणम्—

रूपत्रयं स्वं क्षयगं च खं च किं स्यात्स्वयुक्तं वद स्वाच्च्युतं च ॥

न्यासः—रु० ३ रु० — रु० ० । एतानि स्वयुतान्यविकृतान्येव ।

न्यासः—रु० ३ रु० — रु० ० एतानि स्वाच्च्युतानि रु० — ३
रु० ३ रु० ० ।

इति खसंकलनव्यवकलने ।

व्याख्या—स्वमर्थात् धनं रूपत्रयं क्षयगमर्थात् ऋणं रूपत्रयं च, खं च एतत् त्रयमपि पृथक् पृथक् स्वयुक्तं किं स्यात् अत्र खेन युक्तं, खे युक्तं वा, इति प्रश्नद्वयं, तथा स्वाच्च्युतं, स्वमेव च्युतं इत्यत्रापि प्रश्नद्वयं किं स्यादिति ब्रूहि ।

उदाहरण—

भाषा—धन तीन, ऋण तीन और शून्य इन तीनों में शून्य को जोड़ने से और इन्हींमें शून्य को घटाने से वा शून्य में उनकी घटाने से क्या फल होगा, कहो ।

न्यास—(१) योज्य । रु० ३ रु० ३ रु० ०

योजक । रु० ० रु० ० रु० ०

योग । रु० ३ रु० ३ रु० ०

न्यास—(२) योज्य । रु० ० रु० ० रु० ०

योजक । रु० ३ रु० ३ रु० ०

योग । रु० ३ रु० ३ रु० ०

न्यास—(३) वियोज्य । रु० ३ रु० ३ रु० ०

वियोजक । रु० ० रु० ० रु० ०

अन्तर । रु० ३ रु० ३ रु० ०

न्यास—(४) वियोज्य । रु० ० रु० ० रु० ०

वियोजक । रु० ३ रु० ३ रु० ०

अन्तर । रु० ३ रु० ३ रु० ०

नोट--उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट यह सिद्धान्त निकलता है कि शून्य को रूपों में वा किसी राशि में जोड़ने से घटाने से या किसीको जोड़ने से कोई विकार नहीं होता। परन्तु शून्य में से किसी राशि या मान को घटाने से वह मान बदल जाता है अर्थात् धन का ऋण और ऋण का धन हो जाता है, जैसा कि (४) उदाहरण में स्पष्ट है कि चिह्न घटने पर बदल गये हैं।

शून्य के जोड़ और घटाने का प्रकार समाप्त।

खगुणादिषु करणसूत्रं वृत्तार्धम्--

वधादौ वियत्खस्य खं खेन घाते

खहारो भवेत्खेन भक्तश्च राशिः ॥ ५ ॥

व्याख्या—शून्यगुणनादिकं भुजङ्गप्रयातोत्तरार्धेनोच्यते। वधादा-
विति—खस्यार्थात् शून्यस्य वधादौ गुणनादौ गुणनफलं वियत् = शून्य-
मेव भवेत्। खेन घातेऽपि खमेव स्यात्। अतः वधादौ, इति कथनेन
गुणनभजनवर्गतन्मूलधनधनमूलेषु कर्तव्येषु गुणनफलादिकं शून्यमेव
भवेत्। इति भावोऽवगम्यते, खेनार्थात् शून्येन घाते कस्यचिदङ्कस्य
घाते गुणनफलं शून्यमेव भवेत्। कश्चिद्राशिश्चेत् खेन, शून्येन भक्तस्तदा
खहारो भवेत्। अर्थात् स च राशिः यस्मिन् शून्यस्य भागः क्रियते,
स राशिः अंशत्वेन खञ्च हारत्वेन प्रकटीक्रियते। यथा राशिः ४ अस्मिन्
शून्येन भागः क्रियते तदा ० एवमीदृशं स्वरूपं भवेत्। अत एवोक्तं
खहारो भवेत् खेन भक्तश्च राशिः।

उदाहरणम्—

द्विघ्नं त्रिहत् खं खहत् त्रयं च शून्यस्य वर्गं वद मे पदं च ॥ १ ॥
न्यासः। गुण्यः रु ०। गुणकः रु २ गुणिते जातम् रु ०
न्यासः। भाज्यः रु ०। भाजकः रु ३ भक्ते जातम् रु ०
न्यासः। भाज्यः रु ३। भाजकः रु ० भक्ते जातम् रु ३

अयमनन्तो राशिः खहर इत्युच्यते।

उदाहरण-व्याख्या—

खं शून्यं द्विघ्नं द्वाभ्यां गुणितं, खं शून्यं त्रिहत् किं भवेत् तथा त्रयं

खहृतं, त्रयं खेन हृतं भक्तं सत् किं भवेत् । एवं शून्यस्य वर्गं शून्यस्य पदं च वर्गमूलं च किं स्यादिति वद कथय ।

भाषा—शून्य सम्बन्धी गुणन, भजन, वर्ग, वर्गमूल विधि—शून्य को किसी राशि से गुण दो अथवा शून्य से किसी राशि को गुण दो तो भी गुणन-फल शून्य ही होता है । भागहार में केवल इतना अन्तर है कि शून्य में किसी राशि का भाग देने से फल शून्य ही होता है । परन्तु शून्य का किसी राशि में यदि भाग दिया जाय तो शून्यहार हो जाता है । वह राशि अंश रहेगी और शून्य हर तब खहर राशि कहलावेगी, शून्य छेद भी उसका नाम होता है ।

उपपत्ति—

गुणनविधि में, गुणक तुल्य गुण्य की आवृत्ति करने से गुणनफल सिद्ध होता है । जब गुण्य का अभाव होगा तो गुणनफल का भी अभाव होगा । इसलिये गुण्य का मान शून्य हो जाने से गुणनफल शून्य हुआ इसलिये शून्य का गुणनफल शून्य हुआ । इसी प्रकार भाज्य के हास से लब्धि का भी हास होता है जब भाज्य शून्य होगा तो लब्धि भी शून्य रहेगी इसलिये शून्य के भजन में शून्य ही भजनफल हुआ । भाजकके हास में लब्धि बढ़ती है इसलिये भाजक का परम हास शून्यके तुल्य होने पर लब्धि परम अर्थात् अनन्तके बराबर होती है । इसी प्रकार भाजक पूरा घटकर जब शून्य ही हो जायगा तो लब्धि भी भाज्य के नीचे हर शून्य लिख दिया जायेगा और वही लब्धि मानी जायगी । इन्हीं सिद्धान्तों से लब्धि की अनन्तता बतलाई गई है ।

इसलिये "वधादौ वियत् खस्य खं खेन घाते खहारो भवेत् खेन भक्तश्च राशिः, यह पद उपपन्न हुआ ।

उदाहरण—

शून्य को दो से गुणने से वा दो को शून्य से गुणा करने से, शून्य में तीन का भाग देने से, अथवा तीन में शून्य का भाग देने से क्या फल मिलेगा—और शून्यका वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल क्या होगा बतलाओ ।

(१) न्यास—गुण्य ५ ० गुणक ५ २ गुणनफल ५ ० हुआ ।

(२) न्यास—गुण्य ५ २ गुणक ५ ० गुणनफल ५ ० हुआ ।

(३) न्यास—भाज्य ५ ० भाजक ५ ३ भजनफल ५ ० हुआ ।

(४) न्यास—भाज्य ५ ३ भाजक ५ ० भजनफल ५ $\frac{३}{५}$ हुआ ।

यह $\frac{३}{५}$ अनन्तराशि खहर या शून्यछेद कहलाती है ।

अस्मिन् विकारः खहरे न राशा-

वपि प्रविष्टेष्वपि निःसृतेषु ।

बहुष्वपि स्याल्लयसृष्टिकाले-

ऽनन्तेऽच्युते भूतगणेषु यद्वत् ॥ ६ ॥

न्यासः—रु० अस्य वर्गः रु० । मूलम् रु० एवं खघनादि ।

॥ इति खषड्विधम् ॥

अथात्रोपजातिवृत्तेन खहरराशेरविकारतासम्बन्धेन भगवन्तमनन्तं स्तौति—अस्मिन्निति । लयकालेऽर्थात् कल्पान्तसमये भगवति, अनन्ते नान्तो विद्यते यस्य स तस्मिन्ननन्तेऽन्तरहिते, अच्युते विष्णौ बहुष्वपि भूतगणेषु प्रविष्टेषु लीनेषु, तथा सृष्टिकाले निःसृतेषु देहादिधारणतया भगवतोऽच्युतात् पृथग् भूतेषु च यद्वत् विकारो न जायते । अर्थात् प्रविष्टेषु तेषु न स महान् भवति, न च निःसृतेषु लघुर्भवति । तथा-स्मिन् खहरे राशावपि बहुष्वपि राशिषु प्रविष्टेषु निःसृतेषु वा विकारो न भवतीति । अनेनैष खहरराशिरच्युतसम इति दृष्टान्तेन सूचितः ।

इति विशुद्धानन्द-गौड-ज्यौतिषाचार्य-विरचितायां बीजगणितव्याख्यायां खषड्विधप्रकरणं समाप्तम् ।

भाषा—इस खहर राशिमें किसी राशि को जोड़ देने से अथवा किसी राशिको घटा देनेसे कोई विकार नहीं होता है । मानो यह खहर राशि विष्णु भगवान् के समान है, प्रलयकालमें भगवान् के शरीरमें अनेक जीव प्रविष्ट होते हैं और सृष्टिकालमें निकल आते हैं तो भी उस परमात्माके शरीरमें कुछ विकार नहीं होता है कि जीवोंके प्रविष्ट होनेसे स्थूल होवे, या निकल जानेसे सूक्ष्म होवे । यद्यपि भिन्नाङ्कों के जोड़नेसे खहर राशिमें कुछ अन्तर होता है, परन्तु लब्धिमें अनन्तता बनी रहती है । इसी प्रकार परमेश्वरके स्वरूपमें अवतारोंके भेदसे कुछ फरक पड़ता जाता है, परन्तु फलदातृत्व विषय में कोई फरक नहीं पड़ता ऐसे ही यह खहर राशि भी है ।

“अब खहर राशिके विषयमें कुछ विशेष”

जैसे $\frac{5}{6}$ इस खहर राशि में $\frac{1}{6}$ जोड़ना है, “कल्प्यो हरो रूपमहारराशेः” इस नियम के अनुसार $\frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ का योगफल निकालने के लिये क्रिया—

$\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = \frac{6}{6} = 1$ योगफल = 1 वही अविकृत राशि हुई तथा अन्तर करनेसे भी वही $\frac{5}{6}$ राशि हुई ।

यहां पर यद्यपि भिन्नाङ्क के साथ योग वा अन्तर करने से पूर्वराशि में विकार होगा, परन्तु उसके स्वरूपमें विकार नहीं होगा, इसका वास्तविक तात्पर्य कहने का यह है कि दो या, तीन या अधिक खहर राशियों को जोड़ना है तो अंश यद्यपि दूसरा ही होगा, परन्तु हर शून्य ही रहेगा, उस योगफल में भी शून्यका भाग देनेसे वही फल आवेगा जो फल उसके प्रत्येक खण्ड के अंश में शून्य का भाग देने से आता है, जैसे $\frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8}$ यहां १२ में शून्य का वा ८ में शून्य का भाग देने से फल अनन्त तुल्य होता है, इसलिए कहा है कि इस शून्य हर राशि में किसी अङ्क को जोड़ो या घटाओ तथापि यह अनन्त भगवान् के समान अनन्त ही रहती हैं,

इस विषय पर श्रीमुनीश्वराचार्यने पाटीसार ग्रन्थमें स्पष्ट लिखा है—

ननु यो येन भक्तोऽसौ तद्धरः स्यादतो न सत् ।

खभक्त इति पृच्छायां उत्तरं खहरात्मकम् ॥ १ ॥

तस्मात्खभक्तराशेः किं फलं प्रश्नार्थगोचरम् ।

अस्योत्तरं खहारोऽयमनन्तफल उच्यते ॥ २ ॥

भाज्याद्वरापचयकेन फलस्य वृद्धि-

रस्मात्परापचितखात्महरेण भक्तात् ।

लब्धं परोपचय एतदनन्तसंख्या-

मारोहतीति नियते परता न चास्ति ॥ ३ ॥

श्रीभास्करार्येण कृतेऽत्र बीजे

खहारराशौ परमेशसाम्यात् ।

उक्तं यतोऽङ्केन वियोजितोऽयं

संयोजितश्चाविकृतोऽस्ति नित्यम् ॥ ४ ॥

अस्मिन् विकारः खहरेऽस्ति राशौ

भिन्नाङ्कयोगे त्वथ भिन्नहीने ।

योगोऽन्तरं तुल्यहरत्वपूर्वं

कार्यं ततः केचिदिदं वदन्ति ॥ ५ ॥

तच्चैव युक्तं गुणनेन जातो

विकारको नैव युतेर्वियोगात् ।

यतः समच्छेदतया वियोग-

योगाङ्गता तद्गुणनस्य सिद्धा ॥ ६ ॥

विकारेऽपि नानन्तलब्धेर्विकारो

यतस्तुल्यलब्धं द्वयोर्नाधिकोनम् ।

इति श्री पं० विशुद्धानन्दगौड-ज्योतिषाचार्य-विरचिते बीजगणित-

भाषाभाष्ये शून्यबद्धिप्रकरणं समाप्तम् ।

अथाव्यक्त-षड्विधं निरूपयति—

यावत्तावत्कालको नीलकोऽन्यो वर्णः पीतो लोहितश्चैतदाद्याः ।

अव्यक्तानां कल्पिता मानसंज्ञास्तत्संख्यानां कर्तुमाचार्यवर्यैः ॥७॥

व्याख्या—आचार्यवर्यैरर्थार्थात् पूर्वाचार्यैरव्यक्तानामज्ञातानां मानानां संख्यानां कर्तुमर्थात् तद्गणयितुं मानसंज्ञा, यावत्तावत्, कालक, नीलक, पीतक, लोहितकादिभेदैः संज्ञा कल्पिता । अस्यायमाशयः, या, का, नी, वर्णा आद्यग्रहणेन य, क, प, च, न, इत्यादयोऽव्यक्ताः वर्णाः ग्राह्याः, इमे वर्णाः द्वित्र्यादीनामव्यक्तत्वे संजाते भेदमन्तरेण तत्संकरः स्यात्, अतस्तन्निरासायाव्यक्तसंज्ञा यावत्तावदादिभिः वर्णैः कल्पिता, येन ते परस्परं न मिलेयुः । शालिनीवृत्तमेतत् ।

भाषा—पूर्व आचार्य लोगों ने अज्ञात मानों की गणना करने के लिये अर्थात् अज्ञात संख्या को जानने के लिये यावत्तावत्, कालक, नीलक, पीतक, आदि भेदों से अर्थात् य, क, च, न, प, इत्यादि अक्षरों के आधार से या सहारे से अव्यक्त संख्या का मान जानने के लिये उपरोक्त अक्षरों की मानसंज्ञा कल्पना की है ।

अव्यक्तसंकलनव्यवकलने करणसूत्रं वृत्ताधम्—

योगोऽन्तरं तेषु समानजात्यो-

विभिन्नजात्योस्तु पृथक् स्थितिश्च ।

व्याख्या—अथाव्यक्तसंज्ञां पूर्वमुक्त्वाऽधुना तत्संकलनव्यवकलनमुपजातिवृत्तेन कथयति-योगोऽन्तरमिति । तेषु वर्णेषु मध्ये, रूपेषु च, समानजात्योः, समाना एका जातिर्योस्तौ, तयोः समानजात्योरेव योगोऽन्तरं च भवति विभिन्नजात्योश्च, विभिन्ना पृथक्भूता जातिर्धर्मो ययोस्तयोः विभिन्नजात्योश्च पृथक् स्थितिः स्यात् । अस्यायमाशयो यत् या अव्यक्तसंज्ञा आचार्यैः कल्पितास्ताभिः सहाङ्कानां योगान्तरे क्रियमाणे, यावन्तोऽव्यक्ताङ्काः सजातीयास्तेषां योगोऽन्तरमुचितं विभिन्नजातीयानामव्यक्तानां स्थितिः पृथगेवावधार्या—रूपस्य, रूपेण सह योगान्तरमुचितम्, यावत्तावतो यावत्तावता सह, कालकस्य कालकेन, यावत्तावद्वर्गस्य, यावत्तावद्वर्गेण, यावत्तावद्धनस्य यावत्तावद्धनेन, एवं कालकवर्गस्य कालक-

वर्गेण, कालकघनस्य, कालकघनेन, एवं नीलकस्य, नीलकेन तथा कालक-नीलक-धातस्य कालक-नीलक-धातेन, च योगान्तरं कर्तव्यम्, तत्र रूपस्य यावत्तावन्मानेन गुणितस्य एवं रूपस्य कालकमानेन गुणितस्य, तु पृथक् एव स्थितिः स्यात्, न तयोः योगान्तरमत एवोक्तम् “योगोऽन्तरं तेषु समानजात्योः विभिन्नजात्योस्तु पृथक् स्थितिः स्यात् ।”

भाषा—अव्यक्त राशि के जोड़ने और घटाने का प्रकार—यावत्तावत्, कालक, नीलक, प, च, न, इत्यादि जो अव्यक्त राशियों को प्रकट करने के लिये वर्ण कल्पना किये हैं उन वर्णों में जो वर्ण सजातीय हैं उनका तो योग और अन्तर होता है, परन्तु विभिन्न जाति के वर्णों का योगान्तर नहीं होता उनकी स्थिति अलग ही रह जाती है, यहां सजातीय, एवं विजातीय का यह अर्थ है, कि रूप का रूप के साथ योगान्तर, एवं यावत् यावत् के साथ, कालक, कालक के साथ पीतक, पीतक के साथ, च, च से, न, न से इसप्रकार एक जातीय के अङ्कों को अपनी जाति के अङ्कों से ही योग एवं अन्तर होता है, विभिन्न जाति अर्थात्, य, का, क से, न, का, च से, योगान्तर नहीं हो सकता है इनकी स्थिति योगान्तर का चिह्न लगाकर छोड़ दी जाती है क्योंकि इनकी विभिन्न जातीयता है, इसलिये, यावत् वर्ग का यावत् वर्ग से, यावत् घन का यावत् घन से; कालकवर्ग का कालक वर्ग से, कालक घन का कालकघन से, नीलकादिकों का नीलकादिकों से चतुर्धात पञ्चधातों का, चतुर्धात पञ्चघन आदियों से योगान्तर होता है। उसमें भी या, का या ही कालक का कालक ही सजातीय रहेगा, या का या^२, का, का^३, या का^३ यह विजातीय ही रहेंगे तथा, या एवं का तो विजातीय है ही इसलिये विजातीय वर्णों का योगान्तर करने के लिये उनकी स्थिति अलग ही रहती है।

उपपत्ति—

उक्त सूत्र की उपपत्तिके लिये व्यवहार गणितकी युक्तिसे ही जानिये। कि १० ६०, १० आने, १० पैसे इनका योग करना है। यहां इनके योगके लिये सबके पैसे ही बनाकर जोड़ा जाता है यानी एक जातीय करके ही जोड़ा जायगा यदि इनके शेषतक वर्ण १० या एवं १० का, एवं १० नी ये हो तो इनका योग भी १० या + १० का + १० नी यही रहेगा क्योंकि इनका मूल्य भिन्न भिन्न है। यहां इनका योग ३० या, अथवा, ३० का, वा ३० नी नहीं हो सकता यदि १० ६० १० ६०, १० ६० ये तीन जगह एक से हो तो ३० ६० योग होता

है। इसी प्रकार १० या + १० या + १० या = ३० या योग होगा। अन्यथा उपरोक्त विधिसे अलग स्थिति ही रह जायगी, इसी प्रकार अन्तरमें भी सजातीय वा विजातीय वर्णोंका ध्यान रखकर अन्तर करना चाहिये।

इसलिये “योगोऽन्तरं तेषु समानजात्योः विभिन्नजात्योश्च पृथक् स्थितिः स्यात्” यह स्पष्ट उपपन्न हुआ।

उदाहरणम्—

स्वमव्यक्तमेकं सखे सैकरूपं धनाव्यक्तयुग्मं विरूपाष्टकं च।

युतौ पक्षयोरेतयोः किं धनर्णे विपर्य्यस्य चैक्ये भवेत्किं वदाशु ॥७॥

न्यासः—या १ रु १। या २ रु ८। अनयोर्योगे जातम् या ३ रु ७।

आद्यपक्षस्य धनर्णव्यत्यासे—

न्यासः—या १ रु १। या २ रु ८। अनयोर्योगे जातम् या १ रु २।

द्वितीयस्य व्यत्यासे—

न्यासः—या १ रु १। या २ रु ८। योगे जातम् या १ रु ९।

उभयोर्यव्यत्यासे—

न्यासः—या १ रु १। या २ + रु ८। योगे जातम् या ३ + रु ७।

उदाहरण व्याख्या—स्वमव्यक्तमिति—

हे सखे त्वं धनं अव्यक्तं एकं एकेन रूपेण सहितं तथा अष्टभी रूपैः रहितं धनमव्यक्तयुग्मम् च, इति पक्षयोः संकलने किं योगफलं स्यात्। अथ च पक्षयोर्धनर्णे विपर्य्यस्य विपर्य्यासं च विधाय युतौ किं फलं स्यात्। अत्र पूर्वमान (१) स्य व्यत्ययेन, उत्तरपक्षमानस्य व्यत्ययेन च, उभयपक्षव्यत्ययेन वा, इति प्रश्नत्रयं एवं प्रश्नत्रयव्यत्याभावे चैतत् प्रश्नचतुष्टयमत्र भवति। तत्र धनर्णत्ववशेन।

उदाहरण—

भाषा—(१) यावत्तावत् १ तथा रूप १, एवं (२) यावत्तावत् दो रु ८ ऋण, इन दोनों मानों का योग क्या होगा, यदि पहिले दूसरे मानों के चिह्न बदल दिये जाय तो योग क्या होगा—

न्यास—(१) या १ रु १ । या २ रु ८ । यहां पहले उदाहरणमें या १ एवं रु १ का योग तो या १ + १ ऐसा ही रहेगा । क्योंकि विभिन्न जातिके दो स्वरूप है । इसी प्रकार (२) या २ में रु ८ को घटाना है तो “संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति” इस नियम से या २ रु ८ यह स्वरूप ऐसा ही यहांपर रहेगा क्योंकि यावत् २ अव्यक्तका रु ८ के साथ विभिन्न जातीय सम्बन्ध है । अब (१) + (२) इन दोनों मानों का

$$\text{योगफल} = (१) = \text{या } १ + ६ १$$

(२) = या ५ - रु ८

यह योगफल = या ३ - रु ७ = हुआ

नोट—उपरोक्त रीतिके अनुसार या १ एवं या २ का योग एक जातीय होनेसे तथा धनात्मक होने से या ३ हुआ तथा रूप, रूप, एक जातीय है इनका भी ६ १ एवं ६ - ८ का योग “धनर्णयोरन्तरमेवयोगः” इस नियम से ६ ७ यह योग हुआ। ऐसा ही सर्वत्र जानना चाहिये।

न्यास (१) प्रथम स्वरूप के व्यत्यय से योगफल

$$(9) = -या १ - रु १$$

(२) = या २ - रु ८

यह योगफल—या १ रु - ९ हुआ

(१) = या १ रु १

(२) = या २ रु ८

योगफल = या ' रु ९ हुआ—

(१) - या • रु •

(२) = या २ रु ८

यह योगफल हुआ—या ३२ ७ = योगः

उदाहरणम्—

धनाव्यक्तवर्गत्रयं सत्रिरूपं क्षयाव्यक्तयुग्मेन युक्तं च किं स्यात् ।

घनाव्यक्तयुग्माद्वर्णाव्यक्तषट्कं सरूपाष्टकं प्रोज्झ्य शेषं वदाशु ॥ ८ ॥

इत्यव्यक्तसंकलनव्यवकलने ।

व्याख्या:—त्रिभिः रूपैः सहितं धनाव्यक्तवर्गत्रयं, क्षयाव्यक्तयुग्मोन युक्तं किं स्यादिति, आशु, शीघ्रं मे वद, इति योगस्योदाहरणम् ।

अन्तरस्येति—धनं यदव्यक्तयुग्मं तस्मात् रुपाष्टकेन सहितं ऋणव्यक्तषट्कं प्रोज्झ्यार्थात् अन्तरं विधाय, शेषं, अन्तरसम्भूतं फलं आशु शीघ्रं मे वद ।

न्यासः—याव ३ रु ३ । या २ । योगे जातम् याव ३ या २ रु ३ ।

न्यासः—या २ । या ६ रु ८ । शोधिते जातम्

या ८ रु ८

उदाहरण ।

भाषा—रु ३ से युक्त यावत्तावद्गर्ग ३ और ऋण यावत्तावत् दो इनका योग क्या होगा—

(१) याव ३ रु ३ । या २ इस उदाहरण में यावत्तावत् वर्ग ३ और रु ३ इनका यावत्तावत् २ के साथ योग नहीं होकर योग के स्वरूप में ही अलग स्थिति रख दी जायेगी क्योंकि विभिन्न जातीय हैं ।

उदाहरण—

धन यावत्तावत् २ में से धन रु ८ से युक्त ऋण यावत्तावत् ६ को घटाकर शेष बताओ ।

न्यासः—या २ । या ६ रु ८ । यहां पर वियोज्य में वियोजक को घटाने से “संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति”, इस नियम से या ६ घटने की स्थिति में या ६ धन हो जायेंगे तथा रु ८ जो धन है वह ऋण हो जायगा—इसलिये या ८ रु ८ यह शेष फल हुआ—

अब अव्यक्त राशि के जोड़ने घटाने का प्रकार समाप्त हुआ ।

“संकलन व्यवकलनके विषय में कुछ विशेष”

यद्यपि बीजगणितमें जोड़ने की वही रीति है, जो पाटीगणित में हैं अन्तर केवल इतना ही है कि बीजगणित में संख्याओंके अतिरिक्त अक्षरों का भी प्रयोग किया जाता है, जैसे, ४ या + ८ या + ९ या = ११ या इत्यादि, योग तथा अन्तर समान जाति का ही वहां भी पाटी गणित की तरह से होता है, विजातीय मान की अलग स्थिति रखकर बतलाया जाता है । जैसे ४ या + ५ का + ६ या + ३ का, इस उदाहरण में = १० या + ८ का यही उत्तर होगा क्योंकि समान जाति के वा, एक जगह, एवं का, एक जगह, ये दोनों मान अलग-अलग रखे गये, वहां सजातीयका योग हो गया, विजातीय की स्थिति

अलग रह गई। इसी प्रकार व्यवकलनमें भी केवल ऋण का चिह्न देकर अलग रख दिया जाता है। सजातीयता का ध्यान इसमें भी पूरा रखना चाहिये। दो संख्याओं का अन्तर उसी अवस्था में होता है, जब कि वियोज्य संख्या बड़ी हो वियोजक छोटी हो, यदि वियोज्य स्थिर अङ्क हो, वियोजक बढ़ता जाय तो शेष घटता जायगा। यदि वियोज्य के बराबर ही हो जाय तो शून्य शेष बचेगा, यदि वियोजक, वियोज्य से भी बढ़ जाय तो शेष घटता ही जायेगा तब वह शेष शून्यसे भी कम होगा, इससे ज्ञात हुआ कि संख्या शून्यसे भी कम होती है, ऐसी संख्याओं को जो शून्य से कम होती है, ऋणात्मक संख्याएँ कहते हैं। और जो संख्याएँ शून्य से बड़ी होती हैं वे धनात्मक कहलाती हैं। धनात्मक संख्याओंके पूर्व कोई भी चिह्न न रखने से, अथवा + यह चिह्न धन का है इसके रखनेसे प्रकट की जाती है, जैसे, $+२ + ३ + ३ + ४$ इत्यादि अथवा $१ + २ + ३ + ४$ इत्यादि एवं $-१ - २ - ३ - ४$ इत्यादि ये दोनों क्रम से धन, ऋणके चिह्न हैं ये बीज गणित में अक्षरों के साथ लगते हैं। और अपने स्वरूप को बतलाते हैं।

“कोष्ठ सम्बन्धी संकलन व्यवकलन”

कोष्ठ () इस तरह होते हैं इनके सम्बन्धका पूरा परिचय गणित मुक्तावली द्वितीय भाग में भलीभाँति दिया जा चुका है बीज गणित में कोष्ठ का प्रयोग किस प्रकार करना चाहिये यह दिया जाता है। कोष्ठगत मान का अर्थ यह होता है कि कोष्ठ के अन्दर लिखी हुई संख्या या अव्यक्त संख्या एक राशि माननी चाहिये। जैसे $१० - (२ + ३)$ इसका अर्थ यह है कि १० पूर्णांक संख्या में कोष्ठगत $२ + ३$ का योग रूप जो एक राशि है उसको घटाना है। एवं अव्यक्त में भी या $-(का + नी)$ का अर्थ यह है कि या की जो कीमत है उसमें से का की एवं नी की कीमत का योग घटाना है। यदि कोष्ठ न होवे तो $१० - २ + ३ = ११$ का बोध होगा अर्थात् १० संख्या में पहिले २ घटकर ३ संख्या जमा हो जायगी। कोष्ठगत मान में १० संख्या में ३ एवं २ का योग घटकर ५ शेष रहेगा इसी प्रकार अव्यक्त में अव्यक्ताङ्कों की कीमत के अनुसार मान घट बढ़ जाया करता है। इस प्रकार कोष्ठ के खोलने में विशेषता होती है।

“कोष्ठों को खोलना”

कोष्ठ गत मानको खोलनेमें इस प्रकार ध्यान देना चाहिये जैसे $१० + (२ + ३)$ का अर्थ यह है कि १ एवं ३ का योग १० संख्या में जोड़ना है। परन्तु १ और ३ को जोड़कर १० में जोड़ने का वही अर्थ है जो १० में १ जोड़कर फिर ३ जोड़ने का।

$$\text{इसलिये } \therefore १० + (२ + ३) = १० + ५ = १५$$

$$\therefore १० + २ + ३ = १२ + ३ = १५$$

$$\therefore १० + (२ + ३) = १० + २ + ३$$

ये दोनों स्थिति समान हुई।

इसी तरह अव्यक्त का यदि स्वरूप रहेगा तो—

$$क + (ख + न) = क + ख + न \text{ ऐसा होगा।}$$

$$\text{इसी प्रकार } ८ + (५ - ३) = ८ + ५ - ३$$

यह भी मान बराबर है क्योंकि दो राशियों का अन्तर अन्य राशि में जोड़ने पर वही होगा जो उस राशि में एक घनगत मान जोड़ने से ऋणगत घटाने से।

$$\left. \begin{array}{l} (न) \text{ एवं } १२ - (५ + ३) = १२ - ८ = ४ \\ \text{तथा } १२ - ५ - ३ = ७ - ३ = ४ \end{array} \right\} \text{ यह हुआ}$$

परन्तु यहाँ यदि कोष्ठ न रखा जाय तो $१२ - ५ + ३ = १०$ यह होगा। परन्तु उत्तर ४ होता है, इसलिये कोष्ठ के मान में एवं बिना कोष्ठ के मानों में भेद हो जाता है। इससे साबित होता है कि—

$\therefore १२ - (५ + ३)$ यह मान $१२ - ५ + ३$ इसके बराबर नहीं है, किन्तु उपरोक्त लिखे हुए मान अर्थात् $१२ - (५ + ३) = १२ - ५ - ३$ के समान है।

इसी तरह $क - (ख + प) = क - ख - प$ के समान होगा।

$$\left. \begin{array}{l} (च) \text{ इसी प्रकार } १२ - (५ - ३) = १२ - २ = १० \\ \text{एवं } १२ - ५ + ३ = ७ + ३ = १० \end{array} \right\} \text{ यह हुआ}$$

यहाँ भी $१२ - (५ - ३) = १२ - ५ + ३$ के समान ही होगा।

अव्यक्त में भी $क - (ख - प) = क - ख + प$ के समान होगा।

नोट—इससे यह सिद्धान्त निकला कि यदि कोष्ठ के पूर्व + का चिह्न हो तो कोष्ठ को दूर करने पर भी भीतर के कोष्ठके अन्दर के चिह्न नहीं बदलते, यदि कोष्ठ के पूर्व - ऋण का चिह्न हो तो कोष्ठ को दूर करने पर भीतर के पदों के चिह्न बदल जाते हैं। अर्थात् उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि घन के कोष्ठों में तो कोई अन्तर नहीं हुआ। परन्तु ऋण के सम्बन्ध से अन्तर होता है। ऊपर (न) उदाहरण में १२ के आगे ऋण चिह्न है, आगे कोष्ठ में घन है, अतः घन चिह्न बदलकर ऋण हो गया तब अन्तर ठीक मिला। एवं (च) उदाहरण में ऋण चिह्न के आगे कोष्ठ में ऋण का चिह्न है, वह बदलकर घन हो गया तब उत्तर ठीक आया। अतः कोष्ठ के पूर्व ऋण का चिह्न रहने से कोष्ठों के चिह्न बदल जाते

हैं। एवं यदि ऋण संख्या को किसी संख्या में जोड़ना या घटाना हो तो उनको पहिले कोष्ठ के भीतर रखकर और फिर कोष्ठों को खोलना चाहिये।

“संकलन व्यवकलन के मिश्रित उदाहरण”

जब धन, एवं ऋण मानों को अव्यक्त में मिश्रित मान के स्वरूप में सरल करना पड़ता है तो प्रत्येक को कोष्ठों के भीतर रखकर कोष्ठों को मिटाकर प्रश्नों को सरल कर लेने से योगफल मालूम होता है। जैसे—

उदाहरण नं० (१)

∴ ८ अ - २ अ, ५ अ - ४ अ और ३ अ को जोड़ो

$$\begin{aligned}\text{योगफल} &= ८ \text{ अ} + (- २ \text{ अ}) + (५ \text{ अ}) + (- ४ \text{ अ}) + (३ \text{ अ}) \\ &= ८ \text{ अ} - २ \text{ अ} + ५ \text{ अ} - ४ \text{ अ} + ३ \text{ अ} \\ &= १० \text{ अ योगफल हुआ}\end{aligned}$$

उदाहरण नं० (२)

२ (क - व) और ३ (क + व) को जोड़ो।

क्रिया—

$$\begin{aligned}&= २ (क - व) + ३ (क + व) \text{ योगफल निकालना है।} \\ &= २ क - २ व + ३ क + ३ व \\ &= २ क + ३ क + ३ व - २ व \\ &= ५ क + व यह उत्तर हुआ।\end{aligned}$$

नोट—ऐसे प्रश्नों में सजातीय पदों को एक जगह कर लेना चाहिये तथा कोष्ठके चिह्न का परिवर्तन का पूर्व नियमानुसार ध्यान रखते हुये गुणकाङ्क से अव्यक्ताक्षरों को जो कोष्ठ में हो गुणा करके रखना चाहिये, तब सजातीय पदों को एक जगह मिलाकर या ऋण करके उत्तर प्रश्न की आकांक्षा के अनुसार हल करना चाहिये।

उदाहरण नं० (३)

$\frac{१}{३}$ (प + क - अ), $\frac{२}{३}$ (प - क - अ) और $\frac{५}{३}$ (- प + क + अ) को जोड़ना है।

∴ योगफल करने के लिये न्यासः—

$$\begin{aligned}&= \frac{१}{३} (प + क - अ) + \frac{२}{३} (प - क - अ) + \frac{५}{३} (- प + क + अ) \\ &= \frac{१}{३} प + \frac{१}{३} क - \frac{१}{३} अ + \frac{२}{३} प - \frac{२}{३} क - \frac{२}{३} अ - \frac{५}{३} प + \frac{५}{३} क + \frac{५}{३} अ \\ &= \frac{१}{३} प + \frac{२}{३} प - \frac{५}{३} प + \frac{१}{३} क - \frac{२}{३} क + \frac{५}{३} क - \frac{१}{३} अ - \frac{२}{३} अ + \frac{५}{३} अ \\ &= - \frac{२}{३} प + \frac{४}{३} क + \frac{२}{३} अ योगफल। यह उत्तर हुआ।\end{aligned}$$

नोट—इस प्रश्न में कोष्ठगत अव्यक्ताङ्क भिन्नाङ्कों से गुणा होकर बाद में सजातीयता के साथ योग करके योगफल जानना चाहिये।

अभ्यासार्थ उदाहरणमाला (१)

जोड़ो।

$$(१) ४ क - ५ + ३ अ, ५ क - ८ प + २ अ$$

$$(२) ७ अक + ८ वन - ३ खल, + ८ अक + ४ वन - २ खल$$

$$(३) \frac{१}{३} (क + व - च), \frac{३}{४} (क - व - च), \frac{४}{५} (-क + व + च)$$

$$(४) अ + व - ३, ३ + २ अ - ३ व - ५ क, - ५ + अ - २ व$$

$$(५) ६ क - २ व + ५ ज, - ८ क + ७ व + ३ ज, - २ क - ३ व + ८ ज$$

“व्यवकलन सम्बन्धि संख्याओं के मानों का घटाना”

जैसे पाटी गणित में दो संख्याओं का अन्तर ज्ञात करने के लिये पहले वियोज्य संख्या को लिखते हैं, फिर बाद में वियोजक संख्या को, वियोजक चिह्न से लिखते हैं। इसी प्रकार बीजगणित में भी वियोज्य को पूर्व और—बहु ऋण का चिह्न देकर फिर वियोजक संख्या को लिखते हैं तथा वियोज्य एवं वियोजक मानों को कोष्ठों के अन्दर रखते हैं और फिर अन्तर करना होता है। जैसे उदाहरण—

$$७ क - ४ व + ३ ज में से १० क - ३ व - ७ ज को घटाना है।$$

$$= (७ क - ४ व + ३ ज) - (१० क - ३ व - ७ ज)$$

$$= ७ क - ४ व + ३ ज - १० क + ३ व + ७ ज$$

$$= ७ क - १० क - ४ व + ३ व + ३ ज + ७ ज$$

$$= -३ क - व + १० ज उत्तर हुआ।$$

सजातीय पदों को
एक जगह लिखा—

नोट—ये दोनों मान पाटी गणित रीति के अनुसार भी वियोज्य को ऊपर लिखकर एवं वियोजक को अपने अपने सजातीयपदों के नीचे लिखने के क्रम से नीचे लिखकर फिर अन्तर किया जा सकता है। जो विधि संकलन व्यवहार में समझाई जा चुकी है। यह न्यास उसी प्रकार होगा केवल संकलन की जगह व्यवकलन हो जायगा तथा उपरोक्त लिखी हुई रीति में वियोज्यका जो गुणकाङ्क हो तथा वियोजक में जो गुणकाङ्क हो उनके गुणन के बाद अन्तर निकालना चाहिये जैसे संकलन विधि के उदाहरण में गुणकाङ्क से पहले गुणने पर तब संकलन किया गया है।

व्यवकलन सम्बन्धि उदाहरणमाला नं (२)

घटाओ।

$$(१) अ - ३ व को - अ - ३ व - ४० में से घटाओ।$$

$$(२) १५ वा + ८ का - ४ नी को २५ वा + १२ क + १० नी में से।$$

- (३) ५० या - १० का + ८ नी को १२५ या + २० का - ४ नी से ।
 (४) - २ अ + ४ व को २ व - ३ क से ।
 (५) १० का - ८ नी को १५ या + १२ नी में से घटाओ ।
 (६) ३ अ + २ व को ४ अ - ३ व + ४ स से और शेषफल को अ - २ व + ३ स से घटाओ ।
 यदि अ = ५, व = ३, क = १, न = - १ और च = - ३ के समान हो तो निम्न लिखित उदाहरणों का मान निकालो ।
 (७) ५ अ - ३ व - २ क + २ न ।
 (८) ४ अ व + ३ अ क - २ क न ।
 (९) (अ + व) च + ७ (क + व) - (व + क)
 (१०) ३ (अ + क) + ७ (२ व + क) + ८ (च + न)
 (११) $\frac{१}{३}$ क न + $\frac{१}{३}$ अ व - व

अव्यक्त मानों की संकलन व्यवकलन सम्बन्धि की विधि समाप्त हुई—

अव्यक्तादि गुणने करणसूत्रं सार्धवृत्तद्वयम्—

स्याद्रूपवर्णाभिहतौ तु वर्णौ द्वित्र्यादिकानां समजातिकानाम् ॥८॥
 वधे तु तद्वर्गघनादयः स्युस्तद्भावितां चासमजातिघाते ।
 भागादिकं रूपवदेव शेषं व्यक्ते यदुक्तं गणिते तदत्र ॥ ९ ॥

व्याख्या—अथ वर्णगुणनम् सार्धोपजातिकावृत्तेनाह । स्याद्रूप-
 वर्णेति । रूपवर्णाभिहतौ वर्णः स्यात्, रूपेण वर्णे गुणिते वर्णेन वा
 रूपे गुणिते गुणनफलं वर्णः स्यात् । तत्राङ्कतस्तु गुणनफलं भवति परं
 कथनं वर्णस्यैव स्यात् । समजातिकानां द्वित्र्यादिकानां वधे तद्वर्गघनादयः
 स्युः । अस्यायमाशयः, यत् यावत्तावत् वर्णस्य यावत्तावत्तैव वर्णेन सह घातः
 “समजात्योः द्वयोर्घातः वर्गः स्यादतः” यावत्तावद्वर्गः स्यात् । स चेत्
 वर्गः पुनः यावत्तावता गुणितस्तदा यावत्तावत् घनः स्यात् । समन्निघात-
 त्वात् । पुनश्च यावत्तावता गुणितस्तदा समचतुर्घातत्वात् यावत्तावद्वर्ग-
 वर्गः भवेत् । एवं पञ्चघातः, ततः षड्घातः यावत्तावद्वर्घघनः यावत्ताव-
 द्घनवर्गो वा स्यात्, एवं कालकनीलकादीनामपि द्वित्र्यादिकानां वधे
 तद्वर्गघनादयः स्युः, असमजातिघाते तद्भावितां स्यात् विजातीयवर्णयोः

घातः भावितं स्यात् । कालकस्य यावत्तावत् मानेन गुणनं = या. का, यावत्तावत्कालकयोर्घात एव भावितम् न तु तद्वर्गघनादिकम् असम-जातित्वात् या. काभा इदमपि मानं यदि कालकेन पुनः गुण्यते तदा या० काभा = गुणनफलं स्यात् अर्थात् कालकवर्गयावत्तावद्भावितमेव स्यात् । एवं सर्वत्राधिकमानेष्वपि बुद्धिमतोह्यम् ।

भागादिकमिति—शेषं भागादिकं भागवर्गवर्गमूलघनघनमूलादिकं यद् व्यक्तगणिते कथितं तदत्रापि रूपवदेव ज्ञेयमिति—अस्यायमाशयो यत् भाज्याद्धरः शुद्ध्यति यदिति नियमेन भजनफलमत्रापि साध्यम्, “समद्विघातः” इति नियमेन वर्गोऽत्रापि साध्यः, एवं घनादिकमपि तथैव ।

अव्यक्त राशि के गुणन का प्रकार—

रूप और वर्ण के घात से गुणनफल वर्ण ही होता है । अर्थात् रूप से वर्ण को गुणने से अथवा वर्ण को रूपसे गुणने से गुणनफल वर्णात्मक ही होता है ।

अर्थात् रूप के स्थान में जो अङ्क होंगे उनके साथ अव्यक्त मानों का गुणनफल, रूप के मान से गुणकाङ्क लिखे हुए अव्यक्त मान से प्रकट किया जाता है । इसलिये रूप तथा वर्णों का गुणा वर्ण ही माना जाता है । सजातीय वर्णों से सजातीय दो या तीन वर्णों के गुणा करने से क्रम से उन वर्णों के वर्ग, घन, चतुर्घातादि मान हो जाते हैं । तात्पर्य यह है कि सजातीय दो वर्णों का गुणा, “समद्विघातः कृतिरुच्यते” इस नियम से वर्ग होगा जैसे या × या = या^२ यहां या वर्ण को या-वर्ण से गुणा किया तो या^२ हुआ एवं या × या × या = या^३, अब या वर्ण का तीन जगह गुणा सजातीय होने से या^३, या का घन कहलाया एवं चार जगह गुणा या^४, या का चतुर्घात कहलावेगा, इस प्रकार आगे भी पञ्चघातादि हो जाते हैं, या को ६ स्थान में गुणा या^६, यावत् का वर्गघन, अथवा यावत् घन वर्ग होगा जो यावत्तावत् का षड्घात कहलाता है । इसी प्रकार कालक, नीलक आदि सब वर्णों में भी इसी प्रकार ज्ञानना चाहिये । इस लिये “द्वित्र्यादिकानां समजातिकानां वधेतु तद्वर्गघनादयः स्युः” ऐसा कहा है ।

विजातीय वर्णों के घात में उनका भावित होता है । जैसे यावत्, तथा कालक दो विजातीय वर्ण हैं इनका गुणा याकाभा यही भावितका स्वरूप होता है । यदि भावित मान में भावित मान के किसी अक्षरों में गुणा किया जाय, तो सजातीय

वर्णका गुणा हो जावेगा दूसरा अव्यक्ताङ्क वैसे ही रहेगा—जैसे याकार्भा को का से गुणा करना है तो = याकार्भा । यहां या यह अव्यक्ताङ्क ज्यों का त्यों रहेगा कालक का वर्ण हो जावेगा उसका स्वरूप इस प्रकार सब जगह जानना, इसलिये “असमजातिघाते तद्भावितमेव स्यात्” ऐसा लिखा है यह गुणा का प्रकार हुआ । भाग हार विधि में “भागहार, वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल ये सब बीजगणित में पाटी गणित की तरह से ही होते हैं, उसी प्रकार समझने चाहिये अर्थात् क्रिया का विधान पाटी गणित की तरह से ही रहता है ।

उपपत्ति:—

रूप एवं वर्ण के घात करने से गुणनफल वर्ण होता है । अर्थात् रूप को वर्ण से अथवा वर्ण को रूप से गुणने से गुणनफल वर्ण ही होता है, यद्यपि गुण्य एवं गुणक में किसी में भी अङ्क होने से वर्ण के साथ में अङ्क का गुणा वर्णात्मक होता है, रूप का तात्पर्य, अङ्कों से है १, २, ३, ४, ५ इत्यादि संख्याओं को रूप कहते हैं । रूप को रूप से गुणा करने से रूप ही होता है यह पाटी गणित से स्पष्ट है, क्योंकि रूप यह व्यक्त संख्या का बोधक है उससे गुणा करने से अङ्कों से ही गुणन होता है, अक्षरों से नहीं । अङ्क को अक्षर से गुणने में गुणनफल अक्षर प्रधान होने से वर्णात्मक ही होगा, अङ्क तो गुणाङ्क रूप में रह जात है इसलिये रूप यानी अङ्कों का तथा वर्ण यानी अक्षरों का गुणन अक्षर ही प्रधान होते वर्णात्मक ही माना जाता है । जैसे २ है या वह वर्ण है इसका गुणनफल २ या यह हुआ यह वर्णात्मक ही प्रधान होने से वर्ण ही रहा ।

सजातीय दो वर्णों का घात वर्ग होता है । इसको मान लिया सजातीय वर्ण, या, या, ये दो वर्ण हैं इन दोनों का घात या का वर्ग होता है, क्योंकि यदि या के स्थान में ५ संख्या मानी जाय, अब व्यक्त रीति से जब या = ५ के हुआ, ५×५ का घात व्यक्तीति से २५ ही होता है और वहां = $(५)^2$ वर्ग कहलाता है इसलिये $(५)^2$ पांच वर्ग के स्थान में या लिखा जाय तो यह बात स्पष्ट हुई कि सजातीय दो वर्णों का घात वर्ग हो जाता है ।

इसी प्रकार दो तीन चार पाँच सजातीय वर्णों का घात क्रम से वर्ग घन वर्ग-वर्ग पदघात आदि कहलाता है तथा विजातीय वर्णों का गुणा भावित होता है भावित का तात्पर्य यह है कि गुण्य एवं गुणक दोनों का गुणनफल चिह्न देकर ज्यों के त्यों लिखदिये जाते हैं भा का अर्थ केवल गुणन चिह्न $\times$ मात्र है ।

गुण्यः पृथग्गुणकखण्डसमो निवेश्य-

स्तैः खण्डकैः क्रमहतः सहितो यथोक्त्या ।

अव्यक्तवर्गकरणीगुणनासु चिन्त्यो

व्यक्तोक्तखण्डगुणनाविधिरेवमत्र ॥ १० ॥

व्याख्या—गुणकस्य यावन्ति खण्डानि तावत्सु स्थानेषु पृथक् गुण्यः निवेश्यः । अत्र खण्डानि गुणकाङ्के संज्ञाभेदेनावगन्तव्यानि । यथा यदि गुणकः या ५ रु ३ भवेत् तदागुणके संज्ञाद्वयस्य सत्वात् खण्ड गुण्यस्य द्विधा स्थापनं विधेयम् । यथा वा गुणको या ५ या ३ का ४ तदात्र गुणके खण्डत्रयस्य सत्वात् गुण्यस्य त्रिधा स्थापनमिति । एवं खण्डविभेदेन तैः गुणकखण्डकैः पृथक् निवेशितो गुण्यः प्रथमस्थाने प्रथमखण्डेन; द्वितीय स्थाने द्वितीयखण्डेन, तृतीयस्थाने तृतीयखण्डेनेति क्रमेण “स्याद्रूपवर्णा-भिहतौ तु वर्णः” इति नियमेन गुणनं विधाय, “योगोऽन्तरं तेषु समान-जात्योः” इत्यादिना, “योगे युतिः स्यात् क्षययोः स्वयोर्वा” इत्यादिना च, सहितः । अत्राव्यक्तगणितेऽव्यक्तवर्गकरणीगुणनासु, अर्थात् अव्यक्त गुणनासु, वर्गगुणासु, करणीगुणनासु च व्यक्तोक्तखण्डगुणनाविधिरेव चिन्त्यः, अर्थात् पाटीगणितोक्तखण्डगुणनविधिना गुणनफलं साध्य-मित्यर्थः ॥ १० ॥

भाषा—यह उपरोक्त बीजगणित का सिद्धान्त “गुण्यस्त्वधोऽधोगुणखण्डतुल्यस्तैः खण्डकैः संगुणितो युतो वा” इस पाटी गणित के सिद्धान्त के अनुसार ही है, इससे यह स्पष्ट है कि खण्डगुणन से भी बीजगणित में गुणा किया जाता है । इसका तात्पर्य यह है कि गुणक के जितने खण्ड किये जायँ उतने ही स्थानों में अलग-अलग गुण्य को स्थापित करो, फिर अलग-अलग स्थापित किये हुये गुण्य खण्डों को इस क्रम से गुणा करो कि प्रथम स्थान में प्रथम खण्ड, दूसरे स्थान में दूसरा खण्ड, तीसरे स्थान में तीसरा खण्ड से “स्याद्रूपवर्णाभिहतौ तु वर्णः” इस नियम से गुणा करके ऊपर नीचे क्रम से रखो फिर “योगोऽन्तरं तेषु समानजात्योः” तथा “योगे युतिः स्यात्क्षययोः स्वयोर्वा” इस नियम से सबों को जोड़ो तो योगफल ही गुणनफल हो जायगा—यहाँ अव्यक्त के गुणन में एवं वर्ग के गुणन में तथा करणी के गुणन में व्यक्तगणित में जो खण्ड गुणन की रीति है उसके अनुसार ही यहाँ भी किया जानो ।

उपपत्तिः—

इस सूत्र की उपपत्ति “गुण्यस्त्वधोऽधो गुणखण्डतुल्यः” इस लीलावती के सूत्र की उपपत्ति से ही स्पष्ट है, इसलिये अव्यक्तगणित की खण्डगुणनविधि स्पष्ट है।

उदाहरणः—

यावत्तावत्पञ्चकं व्येकरूपं यावत्तावद्विस्त्रिभिः सद्विरूपैः ।

संगुण्य द्वाग् ब्रूहि गुण्यं गुणं वा व्यस्तं स्वर्णं कल्पयित्वा तु विद्वन् ॥९॥

न्यासः—गुण्यः या ५ रु १ । गुणकः या ३ रु २ ।

गुणनाज्जातं फलम् याव १५ या ७ रु २ ।

गुण्यस्य धनर्णत्वव्यत्यासे

न्यासः—गुण्यः या ५ रु १ । गुणकः या ३ रु २ ।

गुणनाज्जातम् या १५ या ७ रु २ ।

गुणकस्य धनर्णत्वव्यत्यासे

न्यासः—गुण्यः या ५ रु १ । गुणकः या ३ रु २ ।

गुणनाज्जातम् या व १५ या ७ रु २ ।

द्वयोर्धनर्णत्वव्यत्यासे

न्यासः—गुण्यः या ५ रु १ । गुणकः या ३ रु २ ।

गुणनाज्जातम् याव १५ या ७ रु २ ।

भाषा—१ एक रूप से हीन यावत्तावत् ५ को रु २ से युक्त यावत्तावत् ३ से गुणा दो और गुण्य एवं गुणक को धन, ऋण, इसका उलटा, ऋण, धन, ये मानकर तथा गुण्य गुणक दोनों के धन ऋण के व्यत्यय से गुणन करने पर गुणनफल क्या होगा बतलाओ । इसलिये उपरोक्त व्यत्यय से इस प्रश्न की चार स्थिति हो जायगी ।

(१) न्यास—गुण्य = या ५ रु १ । गुणक = या ३ रु २

यहां स्थान-गुणन की रीति से गुणा किया ।

या ५ रु १ = गुण्य

या ३ रु २ = गुणक

या व १५ या ३

या १० रु २

या व १५ या ७ रु २ = यह गुणनफल हुआ ।

(२) गुण्य = या ५ रु ' इस स्वरूप को या ५ का या ५ ऋण मानकर रु ३ को रु १ धन मानकर गुणा करते हैं। गुणक ज्यों का त्योंही रखा।

$$\text{या ५ रु १} = \text{गुण्य}$$

$$\text{या ३ रु २} = \text{गुणक}$$

$$\text{या व १५ या ३}$$

$$\text{या १० रु २}$$

$$\text{या व १५ या ३ से २} = \text{गुणनफल हुआ।}$$

(३) गुणक = या ३ रु २ इसमें यावत्तावत् ३ तथा रु २ को दोनों को ही ऋण मानकर गुणा किया, गुण्य ज्यों का त्योंही रखा।

$$\text{या ५ रु ३} = \text{गुण्य}$$

$$\text{या ३ रु २} = \text{गुणक}$$

$$\text{या व १५ या ३}$$

$$\text{या १ रु २}$$

$$\text{या व १५ या ३ रु २} = \text{यह गुणनफल हुआ।}$$

(४) गुण्य या ५ रु ' इसमें गुण्य गुणक के दोनों खण्डों को परिवर्तन करने से—

$$\text{या ५ रु १} = \text{गुण्य}$$

$$\text{या ३ रु २} = \text{गुणक}$$

$$\text{या व १५ या ३}$$

$$\text{या १० रु २}$$

$$\text{या व १५ या ३ रु २} = \text{गुणनफल हुआ।}$$

“गुणन के विषय में विशेष”

गुणा—योग की साधारण क्रिया को गुणा कहते हैं। अर्थात् दो संख्याओं में दूसरी संख्या का जो प्रमाण हो उतनी बार प्रथम संख्या को रखकर उन सब संख्याओं के योग को उन दोनों संख्या का गुणनफल कहते हैं, भास्कराचार्य ने गुणा के छै प्रकार पाटी गणित में बतलाये हैं, वे सब आजकल के प्रसिद्ध गुणन के नियम के अन्तर्गत ही यद्यपि हैं तो भी पाटी गणित के खण्ड गुणन प्रकार का अधिक प्रचार है, ऊपर के उदाहरणों में वह लिखा भी गया है तो भी उस पर कुछ और प्रकाश डाला जाता है क्योंकि बीजगणित में गुणनफल निकालने के लिये कहीं-कहीं ऋण धन के सम्बन्ध को रखते हुए कुछ विशेषता अव्यक्तियों के गुणन में हो जाती है, दूसरे इसमें गुण्य, एवं गुणक को कम से

ऊपर नीचे रखकर गुणनफल निकालना ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट है, इसमें गुणक को ऊपर एवं गुण्य को नीचे रखकर भी गुणा किया जा सकता है।

अब यहां अन्यक्त अङ्कों के गुणा करने में पाटी गणित की तरह गुण्य को ऊपर गुणक को नीचे रखकर, गुणन कर उनको फिर स्थान क्रम से रखकर योग करने से गुणनफल होता है। जैसे $क + २$ तथा $क + ३$ का गुणनफल निकालना है।

क्रिया:—

$$क + २ = \text{गुण्यः}$$

$$क + ३ = \text{गुणकः}$$

$$\begin{array}{r} क^२ + २ क \\ \hline \end{array}$$

$$३ क + ६$$

$$क^२ + ५ क + ६ = \text{गुणनफल हुआ}$$

एवं $क - २$ तथा $क - ५$ को गुणा करना है।

क्रिया:—

$$क - २ = \text{गुण्यः}$$

$$क - ५ = \text{गुणकः}$$

$$\begin{array}{r} क^२ - २ क \\ \hline \end{array}$$

$$- ५ क + १०$$

$$क^२ - ७ क + १० = \text{गुणनफल हुआ}$$

अध्यासार्थ उदाहरणमाला नं० (२)

- (१) $ख^२ + ६ क + ९$ को $क + ३$ से गुणा करो।
- (२) $क^२ - ३ क - ५$ को $२ क - ५$ से गुणा करो।
- (३) $ख^२ + ३ ख + १$ को $ख - ३$ से गुणा करो।
- (४) $२ क - व + ३$ न को $२ क + व - ३$ न से गुणा करो।
- (५) $व^२ + वन + क^२$ को $व^२ + वन + क$ से गुणा करो।

उदाहरण (- क)^४ को सरल करना है।

$$(- क)^४ = (- क) \times (- क) \times (- क) \times (- क)$$

$$= क^२ \times (- क) \times (- क)$$

$$= (- क^३) \times (- क)$$

$$= क^४ \text{ यह हुआ}$$

का नियम है। उसमें सजातीय पदों का योगान्तर हो जाता और विभिन्न जातीय पदों की स्थिति वैसे ही रह जाती है। एक कोष्ठगत उदाहरण को स्पष्ट किया।

$$\therefore \text{अ}^3 - \text{अ} \{ \text{अ}^2 - (\text{अ}^2 - \text{अ}^2 - 1) + 1 \} \text{ को सरल करना है।}$$

$$\text{अ}^3 - \text{अ} \{ \text{अ}^2 - (\text{अ}^2 - \text{अ}^2 + 1) + 1 \}$$

$$= \text{अ}^3 - \text{अ} \{ \text{अ}^2 - \text{अ}^2 + \text{अ}^2 - 1 + 1 \}$$

$$= \text{अ}^3 - \text{अ}^3 + \text{अ}^3 - \text{अ}^3 + \text{अ} - \text{अ} = 0 \quad \text{यही उत्तर हुआ}$$

नोट—जिस प्रकार पाटीगणित में भिन्न के प्रश्नों में कोष्ठगत मानों को खोलने में मोटे खत के संकेतवाली भिन्न पहले सरल की जाती है उसी प्रकार बीजगणित में भी यहां इस बात में ही विशेषता रहती है कि अक्षरों में न्यास रहता है तथा पूर्व के गुणकाङ्क के सम्बन्ध से अर्थात् पूर्व में ऋण गुणकाङ्क रहने से साथ के साथ कोष्ठ के अन्दर के चिह्न बदलते जायेंगे, धन के ऋण, ऋण के धन होते जायेंगे बाद में सरल होने पर संक्षिप्त स्वरूप होगा। कोष्ठगत भिन्नों को किस प्रकार सरल करना चाहिये कौन कोष्ठ किस स्थिति में कब खोलना चाहिये किस प्रकार सरल किया जाता है इसके लिये हमने गणित मुक्तावली द्वितीय भाग में भली भांति समझा दिया है।

अभ्यासार्थ उदाहरणमाला नं० (३)

गुणनफल निकालो—

$$(१) (-\text{अ}^2)^3 \times (-\text{अ}^3)^4$$

$$(२) (-१)^4 \times (-\text{क})^3$$

$$(३) (-\text{क घ}^2 \text{ ज}^3)^2 \times (-\text{क}^3 \text{ व}^2 \text{ ज})^3$$

$$(४) (-\text{क}) \times (-\text{क}) \times (-\text{क}) \times (-\text{क})^3$$

$$(५) (-\text{अ}^2)^2 \times (\text{व}^2)^3 \times (-\text{क}^2)^4$$

$$(६) (-१)^3 \times (\text{अ क})^2 \times (-\text{व न})^3 \times (\text{स ज})^2$$

निम्नलिखित का मान निकालो जब कि अ = -१ तथा व = -२

$$(७) ४ \text{ अ} \times \text{व}^2; ३ \text{ व}^2 - २ \text{ व}, ३ \text{ अ}^2 - \text{व}^2$$

$$\text{यदि च} = ४ \text{ म} = -७$$

$$(८) ८ \text{ च}^2 - २ \text{ म}^3, ३ \text{ च}^4 + ४ \text{ म}^4$$

$$\text{यदि ल} = ४ \text{ ज} = -५$$

$$(९) ४ \text{ व}^4 + ८ \text{ ज}^3, ६ \text{ ल}^3 - ३ \text{ ज}^2$$

$$\text{अ} = -१ \text{ और } \text{व} = २$$

$$(१०) (\text{अ व})^2, (-\text{अ व})^2, (-३ \text{ अ}^2, \text{व})^3,$$

$$(-३ \text{ अ}^2, \text{व})^3, (-३ \text{ अ}^3 \text{ व}^2)^2$$

भागहारे करणसूत्रं वृत्तम्—

भाज्याच्छेदः शुद्ध्यति प्रच्युतः सन् स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु क्रमेण ।
यैर्यैर्वर्णैः संगुणो यैश्च रूपैर्भागहारे लब्धयस्ताः स्युरत्र ॥ ११ ॥

पूर्वगुणनफलस्य स्वगुणच्छेदस्य भागहारार्थं प्रथमपक्षस्य न्यासः ।

भाज्यः याव १५ या ७ रु २ । भाजकः या ३ रु २ ।

भजनादाप्तो गुण्यः या ५ रु १ ।

द्वितीयस्य न्यासः ।

भाज्यः याव १५ या ७ रु २ । भाजकः या ३ रु २ ।

भजनेन लब्धो गुण्यः या ५ रु १ ।

तृतीयस्य न्यासः—

भाज्यः याव १५ या ७ रु २ । भाजकः या ३ रु २ ।

हरणादाप्तो गुण्यः या ५ रु १ ।

चतुर्थस्य न्यासः—

भाज्यः याव १५ या ७ रु २ ।

भाजकः या ३ रु २ ।

भक्ते लब्धो गुण्यः या ५ रु १ ।

इत्यव्यक्तगुणनभजने

व्याख्या—छेदो हरः स यैर्यैर्वर्णैर्यैश्च रूपैः गुणितः सन् भाज्यात्
स्वेषु स्वेषु स्थानकेषु स्वसमान जातिषु प्रच्युतः सन् शुद्ध्यति नावशिष्यत
इति ता अत्र लब्धयः स्युः । ते वर्णाः तानि च रूपाणि लब्धयः स्युरित्यर्थः ।
शालिनी वृत्तमेतत् ।

अव्यक्त राशि के भागहार का प्रकार—

भाषा—भागहार में “भाज्याद्धरः शुद्ध्यति” इस पाटीगणित के नियम के
अनुसार भजनविधि स्पष्ट है तो भी वर्णों के साथ भजन की क्रिया में कुछ
भेद रहता है । अर्थात् जिन-जिन वर्ण और रूप से गुणा हुआ भाजक भाज्य से
अपने अपने स्थानों में घटाने से शुद्ध हो जाय अर्थात् शेष न रहे तो भागहार में
वे वर्ण एवं रूपादिमान ही वहां लब्धि होगी ।

उपपत्तिः—

भागहार की उपपत्ति उदाहरण से स्पष्ट समझी जा सकती है। जैसे उपरोक्त मूल के उदाहरण में ही जहां भाज्यः या व १५ या ७ रु २। भाजक = या ३ रु २—

भाजक	भाज्यः	लब्धिः
या ३ रु २	$\left. \begin{array}{l} \text{या व १५ या ७ रु २} \\ \text{या व १५ या १०} \end{array} \right\}$	$\left(\begin{array}{l} \text{या ५ रु} \end{array} \right.$
	$\times \text{या ३ रु २}$	
	या ३ रु २	
	✕	

लब्धिः = या ५ रु १ यह हुई। यह लब्धि उक्त प्रश्न में इतनी ही क्यों हुई यह जानना ही इसकी उपपत्ति है। यह जानने के लिये यहां पहले भाज्य में यावत्तावद्ग १५ है इसलिए उसमें यावत्तावद्ग को ही घटाना उचित है, उधर भाजक में पहले यावत्तावत् ३ है उनको रूपसे भी गुणने से “स्याद्रूपवर्णाभि-हताविति” इस नियम से गुणनफल वर्ण ही होता, यावत्तावत् को पहले गुण देने से समजात्योः घातः वर्ग एवस्यात् इस नियम से वर्ग ही यावत्तावत् का होगा यदि केवल यावत्तावत् वर्ग ही रहे वह भाज्य में केवल घटाया जाय तो घट नहीं सकता क्योंकि यावत्तावत् वर्ग के साथ भाज्य में १५ भी है, इस वास्ते लब्धि में या ५ ही माना जाय तो यावत् ५ एवं भाजक या ३ का गुणनभाज्य में ठीक घटेगा। इसके अतिरिक्त लब्धि माननेसे नहीं होता फिर या ५ के साथ रु २ का भी गुणा वर्ण होने से या १०, या ७ के साथ सम्बन्ध रखेगा इसलिये घटाने से या ३ शेष रहा अगला रु २ उतारा तब फिर भाग दिया भाजक से तो रु १ लब्धि में आया, क्योंकि रु १ का या ३ से गुणनफल या ३ होगा वह या ३ में से घटने जब जायगा तो “संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति” इस नियम से या ३ घन होकर “घनर्णयोरन्तरमेव योगः” इस नियम से कट जायगा तथा रु १ के साथ रु २ का गुणा भी रु २ ही होगा यह भी रु २ के नीचे रखने पर घटने की स्थिति में उपरोक्त नियम से घन होकर “घनर्णयोरन्तरमेव योगः” इस नियम से कट जायगा कोई शेष नहीं बचा इसलिये या ५ रु १ यही लब्धि हुई इसके अतिरिक्त मानने में भाजक लब्धि का गुणा भाज्य के समान नहीं होगा। इसलिये भाजक लब्धि का गुणा शेष युक्त होकर ही भाज्य के समान होता है यदि शेष न रहे तो भाजक लब्धि का गुणा भाज्यके समान होता है, इस नियम के आधार पर उपरोक्त उपपत्ति स्पष्ट है।

इसलिये (१) भाज्य = या व १५ रु ७ रु २, भाजक या ३ रु २

इस प्रश्न के उत्तर में लब्धि = या ५ रु यह हुई।

(२) भाज्य = या व १५ या ७ रु २ । भाजक = या ३ रु २ ।

इस प्रश्न में = या ५ रु १ लब्धि हुई।

(३) भाज्य = या व १५ या ७ रु २ । भाजक या ३ रु २

लब्धि: = या ५ रु १ आई।

(४) भाज्य = या व १५ या ७ रु २ भाजक = या ३ रु २

लब्धि: = या ५ रु १ ।

इसलिये अव्यक्तराशि के गुणन भजन की ग्रन्थोक्त-विधि समाप्त हुई—

भाग विधि के सम्बन्ध में कुछ विशेषता

(१) यदि किसी संख्या या राशि के किसी घात को उसी संख्या या राशि के दूसरे घात से भाग देना हो तो भाज्य के घात में भाजक का घात घटा दो शेष भजनफलका घात बचेगा—जैसे या^४ ÷ या^३ यहां यावत्तावत् के पक्षघात में यावत्तावत् ३ घात से भाग देना है यहां या^४ - ^३ = या^१ यहां घटाने से दोनों मानों के शेष या^१ ही रहता है यही यहां भजनफल होगा—

क्रिया: = या^४ ÷ या^३

परंतु या^४ = या × या × या × या × या

एवं या^३ = या × या × या

अतः = $\frac{\text{या}^4}{\text{या}^3} = \frac{\text{या} \times \text{या} \times \text{या} \times \text{या} \times \text{या}}{\text{या} \times \text{या} \times \text{या}}$

= या × या = या^१

= यही भजनफल हुआ (उत्तर) ।

(२) गुणन विधि में चिह्नों का गुणन भी सावित हो चुका है। अर्थात् धन, धन पदार्थों का गुणन धन, ऋण, ऋण पदार्थों का भी धन, धन, ऋण गुणन ऋण इत्यादि नियम पहले दिखलाया जा चुका है। भागहार में भी उसी प्रकार कहा है। इसका स्वरूप इस प्रकार समझना चाहिये।

$$= \frac{+}{+} = +, \frac{+}{-} = -, \frac{-}{+} = -, \frac{-}{-} = +$$

अर्थात् धन संख्या में धन का भाग धन, ऋण में ऋण का भाग भी धन, ऋण में धन का भाग देने से ऋण, एवं धन में ऋण का भाग देने से ऋण ही लब्धि आती है ऐसा जानना चाहिये।

(३) यदि किसी राशि को किसी दूसरी राशि से भाग देना हो तो पहले भाज्य के गुणक को भाजक के गुणक से फिर भाज्य के प्रत्येक अक्षर या खण्ड को भाजक के उसी अक्षर या खण्ड से भाग देना चाहिये फिर वाद में चिह्न के नियम के अनुसार चिह्न रखना चाहिये ।

$$\text{जैसे—} \frac{- १८ क^५. व^३. स^२}{६ क^२. व^३. स^२} = \text{इसको सरल करना है ।}$$

$$\begin{aligned} \text{क्रिया} &= \frac{- १८ क^५. व^३. स^२}{६ क^२. व^३. स^२} \\ &= \frac{- १८ क^५}{६ क^२} = - ३ क^३ \end{aligned}$$

$$= - ३ क^३ \text{ यही उत्तर हुआ ।}$$

क्रिया:—

भाजक	भाज्य	लब्धि:
३क + १	$\left. \begin{array}{l} ६ क^२ + ५ क + १ \\ ६ क^२ + २ क \end{array} \right\}$	$\left(\begin{array}{l} २ क + १ \end{array} \right.$
	$\frac{६ क^२ + ५ क + १}{६ क^२ + २ क}$	
	३ क + १	
	३ क + १	
	×	

$$= २ क + १ \text{ यह उत्तर हुआ—}$$

यहां पर भाज्य के पहले पद ६ क^२ को भाजक के पहले पद ३ क से भाग दिया तो भजनफल २ क हुआ यह लब्धि का पहला पद हुआ फिर भाजक के सब पदों को २ क से गुणा किया और गुणनफल के पदों को भाज्य के सजातीय पदों के नीचे लिखा और फिर भाज्य में घटा दिया तब शेष ३ क + १ रहा । अब इस शेष के पहले पद ३ क को भाजक के ३ क से भाग दिया तो भजनफल १ हुआ यह लब्धि का दूसरा पद हुआ । भाजक को १ से गुणा करके ३ क + १ हुआ उसको ३ क + १ में से घटाया तो शेष कुछ नहीं रहा, भाग पूरा हो गया इसलिये लब्धि २ क + १ यह हुई ।

नोट—(१) इससे यह सिद्धान्त निकला कि पहले भाज्य और भाजक दोनों को इस प्रकार लिखो कि किसी एक मुख्य अक्षर के जो दोनों में सम्मिलित हो चाताङ्क घटते हुए या बढ़ते हुए क्रम से लिखे हुए प्रतीत हो अर्थात् अधिक चाताङ्क पहले उससे छोटा बाद में फिर उससे छोटा सबसे छोटा चाताङ्क बाद में लिखो तब क्रिया करनी चाहिये ।

(२) फिर उसमें भाज्य के पहले पद को भाजक के पहले पद से भाग दो।
भजनफल सम्पूर्ण अभीष्ट भजन फल का पहला पद होगा।

दूसरे भाजक के प्रत्येक पद को भजनफल के इस प्रथम पद से गुणा करो
और गुणनफल को भाज्य में घटाओ।

(३) फिर शेषफल को नया भाज्य मानकर फिर भाजक से पहले की तरह
भाग देना चाहिए। उसी प्रकार तबतक भाग देते जाओ जबतक शेषफल शून्य
हो जाय।

उदाहरण नं० (१)

भाज्य = $२७ क^३ - २७ क^२ व + ९ क व^२ - व^२$ को $३ क - व$ से
भाग दो—

क्रिया:—

भाजक	भाज्य	लब्धि:
$३ क - व$	$\begin{array}{r} २७ क^३ - २७ क^२ व + ९ क व^२ - व^२ \\ \underline{२७ क^३ - ९ क^२ व} \\ - १८ क^२ व + ९ क व^२ \\ \underline{- १८ क^२ व + ६ क व^२} \\ ३ क व^२ - व^२ \\ \underline{३ क व^२ - व^२} \\ ० \end{array}$	$\left(\begin{array}{l} ९ क^२ - ६ क व \\ + व^२ \end{array} \right)$

∴ भजनफल = $९ क^२ - ६ क व + व^२$ यह उत्तर हुआ।

उदाहरण नं० (२)

भाज्य: = $क^४ + क^३ - ३ क^२ + २ क + १$

भाजक = $क^२ - २ क + १$

भाजक	भाज्य	लब्धि
$क^२ - २ क + १$	$\begin{array}{r} क^४ + क^३ - ३ क^२ + २ क + १ \\ \underline{क^४ - २ क^३ + क^२} \\ ३ क^३ - ४ क^२ + २ क \\ \underline{३ क^३ - ६ क^२ + ३ क} \\ २ क^२ - क + १ \\ \underline{२ क^२ - ४ क + २} \\ ३ क - १ \end{array}$	$\left(\begin{array}{l} क^२ + ३ क + २ \end{array} \right)$

यहाँ $k^2 + ३ क + २$ यह लब्धि हुई।

तथा $३ क - १$ यह शेष बचा।

यहाँ यह बात भी स्पष्ट है कि अब यहाँ अधिक भाग नहीं लग सकता, क्योंकि शेष में $क$ का सबसे बड़ा घाताङ्कमापक भाजक के घाताङ्कमापक $क$ से छोटा है:—यह भागहार अपूर्ण भागहार कहलाता है क्योंकि इसमें शेष बच जाता है। इसमें इस बात का ध्यान और भी रखना चाहिये कि भाज्य के ऊपर के मान में गुणा हुआ नीचे का मान घटाते समय 'संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति' इस नियम से आगे क्रिया करनी चाहिये। जैसा कि ऊपर के उदाहरण में स्पष्ट है।

अब यहाँ अव्यक्त के भागहार में दो उदाहरणों से कुछ स्पष्टीकरण और किया जाता है।

उदाहरण नं० (३)

$$\text{भाज्य} = क^४ - ४ क^२ + १२ क - ९$$

$$\text{भाजक} = क^२ - २ क + ३$$

क्रिया:—

भाजक

भाज्य

लब्धि:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{l} क^२ - २ क + ३ \end{array} \overline{) \begin{array}{l} क^४ - ४ क^२ + १२ क - ९ \\ क^४ - २ क^३ + ३ क^२ \end{array}} \quad \begin{array}{l} (क^२ + २ क - ३ \\ \hline २ क^३ - ७ क^२ + १२ क - ९ \\ २ क^३ - ४ क^२ + ६ क \\ \hline - ३ क^२ + ६ क - ९ \\ - ३ क^२ + ६ क - ९ \\ \hline \times
 \end{array}$$

इसलिये लब्धि $= क^२ + २ क - ३$ यह उत्तर हुआ।

उदाहरण नं० (४)

$$\text{भाज्य} = - १२ + ८ क + ३ क^२ - २ क^३ - ४ क^४ + क^५,$$

$$\text{भाजक} = - ४ + क^२$$

भाजक	भाज्य	लब्धि:
$\begin{array}{r} -४ + क^२ \\ \hline -१२ \end{array}$	$\begin{array}{r} १२ + ८ क + ३ क^२ - २ क^३ - ४ क^४ + क^५ \\ + ३ क^२ \\ \hline ८ क - २ क^३ - ४ क^४ + क^५ \\ \hline ८ क - २ क^३ \\ \hline - ४ क^४ + क^५ \\ \hline - ४ क^४ + क^५ \\ \hline \times \end{array}$	$\begin{pmatrix} ३ - २ क \\ + क^४ \end{pmatrix}$

३ - २ क + क^४ = लब्धि उत्तर हुआ—

नोट—इन उदाहरणों से यह स्पष्ट सिद्धान्त निकला कि सबसे पहले इस बात पर ध्यान देना चाहिये कि भाज्य के अन्दर बड़ी शक्ति का अङ्क या अक्षर कौन है। वह भाजक के किस अक्षर या अङ्क की कौन सी शक्ति से गुणा करने पर कट सकता है, फिर भाजक के प्रत्येक अक्षरों से या अङ्कों से उस गुणाङ्क को गुणा करके जो गुणनफल आवे, उसकी कौनसी शक्ति भाज्य के अन्दर सम्बन्ध रखती है, उसको भाज्य की उसी शक्ति के नीचे रखना चाहिये, तब घटाना चाहिये “संशोध्यमानं स्वगुणत्वमेति” इसका ध्यान रखते हुये अङ्क या अक्षर उतार कर फिर भाजक का भाग देना चाहिये इस प्रकार जबतक भाज्य की सब शक्तियाँ क्रमसे कट न जाय तबतक क्रिया करते चले जाना चाहिये अथवा शेष जबतक भाजक को दृष्टि में न्यून होवे तब तक क्रिया करनी चाहिये। इसमें अक्षरों में अधिक शक्तिवाला अक्षर पहले बाद में उससे छोटी शक्तिवाला फिर बादमें व्यक्ताङ्क रखने चाहिये। अथवा पहले ही व्यक्ताङ्क भी रख सकते हैं, बाद में उत्तरोत्तर बढ़ती हुई शक्तिवाले अक्षर रखने चाहिये जैसा कि उदाहरण नं० (४) में दिया है, भाजक से गुणा किया हुआ लब्धिरूप गुणनफल भाज्य की शक्ति का ध्यान रखते हुए उसीके नीचे रखना चाहिये जहां उसकी सजातीय शक्ति का अङ्क भाज्य में होवे इस प्रकार क्रिया करने से भागहार की विधि बड़ी आसानी से स्पष्ट हो जाती है।

अध्यासार्थ उदाहरणमाला नं० (६)

- (१) $अ^४ + ४ अ^२ क^२ + १६ क^४$ को $अ^२ + २अ क + ४ क^२$ से भाग दो।
- (२) $८२ क^२ + ४० - ४५ क^३ + १८ क^४ - ६७ क$ को $६ क^२ + ८ + ७ क$ से।
- (३) $८ अ^२ ब^३ + ३५ अ^५ + ७ अ^५ - ६ अ^३ ब^२ - २अब^४ - ७अ^४ ब$ को $२अब - ३ ब^२$ से।

(४) $k^3 - 2$ अ $k^2 + (अ^2 - अ व - व^2)$ क + अ^२ व + अ व^२ को
क - अ - व से भाग दो ।

(५) $३ (५ + क) - ७ क^२ (१ + २ क) + १० क^३$ को $५ - ४ क$ से भाग दो ।

(६) $अ^३ + ३ व स अ + (व^३ - स^३)$ को अ + (व - स) से भाग दो—

यदि क = १, व = २, ज = ३ तब निम्नलिखित मानों को सरल करो ।

(७) $\frac{क + क}{अ}, \frac{क + ज}{व}, \frac{व + ज}{क}, \frac{क - व}{अ}, \frac{क - ज}{व}, \frac{व - ज}{क}$

(८) $क \times व \times ज \cdot \frac{१}{क \cdot व \cdot ज}, \frac{क \cdot व}{अ}, \frac{ज \cdot क}{व}$

भागहार विधि समाप्त हुई ।

वर्गोदाहरणम्—

रूपैः षड्भिर्वर्जितानां चतुर्णा-

मव्यक्तानां ब्रूहि वर्गं सखे मे ॥ ९ ॥

न्यासः—या ४ रु ६ जातो वर्गः या व १६ या ४८ रु ३६

यद्यपि बीजगणिते वर्गकरणविधिः स्वतन्त्ररूपेण न कथिता तथापि
“अव्यक्तवर्गकरणीगुणासु चिन्त्यो व्यक्तोक्तखण्डगुणनाविधिरेवमत्र”
अनेन पूर्वोक्तेन नियमेनैव वर्गविधेरुक्तत्वात् पृथक् तदुपादानमनु-
चितमेवातस्तदुदाहरणमेवोक्तमिति स्पष्टार्थः—

भाषा—यद्यपि बीजगणित में वर्गकरण का नियम स्वतन्त्र रूपसे नहीं दिया
गया तो भी “समद्विधातः कृतिरुच्यते”, इस नियम से तथा “अव्यक्तवर्गकरणी
गुणासु” इस गुणन विधि से भी अव्यक्त अङ्कों का भी वर्गकरण स्पष्ट होता है,
इसलिये उदाहरण मात्र ही दिया गया ।

न्यासः—या ४ रु ६ इसका वर्ग करने के लिये स्थान गुणनविधि से वर्ग
किया—

या ४ रु ६

या ४ रु ६

या व १६ या २४

या २४ रु ३६

गुणनफल या व १६ या ४८ रु ३६

यही वर्ग हुआ ।

अव्यक्त राशि के वर्ग के विषय में कुछ विशेष—

उदाहरण नं० (१), $a + b$ इसका वर्ग निकालना है ।

क्रिया:—वर्ग की विधि पाटीगणित की रीतिसे

समद्विघात: इस रीति से

$$= (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

$$= a^2 + a b + a b + b^2$$

$$= a^2 + 2 ab + b^2$$

यह वर्ग हुआ—

इससे यह सिद्धान्त निकला कि (१) दो संख्याओं के जोड़ का वर्ग उन दोनों संख्याओं के वर्गों और दोनों के गुणनफल के दुगने के योगफल के बराबर होता है ।

(२) इसी प्रकार दो संख्याओं के अन्तर का वर्ग उन संख्याओं के वर्गों के योगफल से उन संख्याओं के गुणनफल का दूना घटा देने से जो शेषफल होता है उसके समान होता है ।

$$\text{जैसे } (a - b)^2 = a^2 - 2 ab + b^2$$

(३) इसी प्रकार दो राशियों का वर्गान्तर उन दोनों राशियों के योग और अन्तर के घात के समान होता है ।

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

∴ $a^2 - ab + b^2 + ab = a^2 - b^2$ यह सिद्धान्त भी गुणन विधिसे स्पष्ट है ।

(४) इसी प्रकार तीन संख्याओं के योगफल का वर्ग तीनों संख्याओं के पृथक्-पृथक् वर्गों के योग और तीनों संख्याओं के दो दो के गुणनफल के दुगने के जोड़ के योगफल के बराबर होता है । जैसे:—

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + ba + bc + ca + ab + bc + ca$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 ab + 2 ac + 2 bc$$

इसलिये घात की क्रिया से उपरोक्त नियम भी स्पष्ट है ।

अभ्यासार्थ उदाहरणसाला नं० (१)

$$(१) \cdot (x + y + z) \quad \text{का वर्ग करो ।}$$

$$(२) \cdot (2 + 2 x + 2 y) \quad \text{,,}$$

$$(३) \cdot (अ^२ + ब^२ + क^२) \quad ,,$$

$$(४) \cdot (३ क^२ + ४ घ^२ + ३ न^२) \quad ,,$$

$$(५) \cdot (५ क + ब^२ - न^२) \quad ,,$$

वर्गमूले करण सूत्रं वृत्तम्—

कृतिभ्य आदाय पदानि तेषां द्वयोर्द्वयोश्चाभिहतिं द्विनिघ्नीम् ।

शेषात्त्यजेद्रूपपदं गृहीत्वा चेत्सन्ति रूपाणि तथैव शेषम् ॥१२॥

व्याख्या—वर्गे कृते वर्गमूलानयनम्—तेषां वर्गराशिगताव्यक्तानां मध्ये कृतिभ्यः पदान्यादाय तेषां पदानां परस्परं द्वयोर्द्वयोरभिहतिं द्विनिघ्नीं शेषाद्विशोधयेत् । यदि शुद्धिर्भवेत्तदा तानि, अर्थात् तस्य वर्गस्य पदानि भवेयुः । निरवशेषं वर्गमूलं स्यादित्यर्थः । अथ यदि वर्गराशौ रूपाणि सन्ति तर्हि रूपपदं गृहीत्वा शेषं तथैव द्वयोर्द्वयोश्चाभिहतिं द्विनिघ्नीं शेषात्त्यजेदिति । विद्यमानेषु रूपेषु यदि रूपपदं न लभ्यते तदा स वर्गराशि-
नेति ज्ञेयमिति उपजातिवृत्तमेतत् ॥ १२ ॥

अव्यक्त राशि के वर्ग मूल का प्रकार—

भाषा—वर्गराशि में जितने अव्यक्ताङ्क वर्ग हों उनका मूल पहले लेना चाहिये, और फिर उन मूलों में से दो दो मूलों के दूने घात को शेष में घटा दो तो वर्गमूल होता है । इसी प्रकार यदि वर्गराशि में रूप होवें तो उनका मूल लेकर उक्त किया करनी चाहिये यदि रूपों के होते हुवे उनका वर्गमूल न मिले तो वह वर्गराशि नहीं समझनी चाहिये ।

उपपत्ति—

वर्गमूल की उपपत्ति जानने के लिये, पहले इस बात पर ध्यान देना चाहिये कि वर्ग क्या वस्तु है, वर्ग समद्विघात का नाम है, समद्विघात की विधि से यह बात स्पष्ट है कि समद्विघात में गुण्य एवं गुणक ये दोनों पदार्थ समान ही होते हैं, उनमें से गुणनफल के जानने पर किन दो समान राशियों का यह गुणनफल है यह जानना का ही अभीष्ट है, पहिले वर्ग के उदाहरण में ही, देखिये । यहां—

$$\text{गुण्य} = \text{या } ४ \text{ रु } ६$$

$$\text{गुणक} = \text{या } ४ \text{ रु } ६$$

$$\text{पहली पङ्क्ति या } १६ \text{ या } २४$$

$$\text{दूसरी पङ्क्ति या } २४ \text{ रु } ३६$$

$$\text{गुणनफल या } १६ \text{ या } ४८ \text{ रु } ३६$$

यहां गुणनफल की क्रिया में दो आड़ी लकीर के बीच की पंक्ति में गुण्य, अथवा गुणक के एक खण्ड का वर्ग = (या ४ का वर्ग) या व १६ यह है तथा दोनों खण्डों का घात (या ४ का ४ का घात) = या २४ यह है। इसी प्रकार दूसरी पंक्ति में दोनों खण्डों का घात या २४ एवं दूसरे खण्ड का वर्ग (४ का वर्ग ४ ३६ यह) है, अब यह दोनों खण्डों का घात दोनों पंक्तियों में है, यह जोड़कर गुणनफल की पंक्ति में लिखा गया है, वही द्विगुण दोनों खण्डों के घात के समान है, जो या ४८ है, इससे यह ज्ञात हुआ कि दो खण्डवाले राशि के वर्ग करने में तीन खण्ड गुणनफल में उपपन्न होते हैं, पृथक् पृथक् उन दोनों खण्डों का वर्ग एवं दोनों खण्डों का द्विगुण घात, इसलिये याव १६ या ४८ ४ ३६ यह गुणनफल वर्ग बना जो तीन खण्डों से बना है, इसलिये इन तीनों खण्डों के जानने से पहले इन तीन खण्डों में से दोनों खण्डों का जो वर्गात्मक हैं उनका वर्गमूल पूरा २ लेना चाहिये फिर यह देखना चाहिये कि इन दोनों खण्डों का द्विगुणित घात बीच का अर्थात् तीसरे खण्ड के समान है या नहीं, वर्गात्मक राशि में अवश्य ही द्विगुणित राशि के समान मिलेगा—इससे यह स्पष्ट हुआ कि वर्ग करने में प्रत्येक खण्डों का वर्ग तथा दूना दोनों खण्डों का घात होता है, इसके ज्ञान से “कृतिभ्य आदाय पदानि”, यह सूत्र उपपन्न होता है, यह प्रकार तीन खण्डवाले राशि के वर्ग करने में चार खण्ड के वर्ग करने में अथवा इससे अधिक में भी बराबर ठीक मिलता चला जायगा—

पूर्वसिद्धस्य वर्गस्य मूलार्थं न्यासः

याव १६ या ४८ ४ ३६ ।

लब्धं मूलम् या ४ ४ ६

इत्यव्यक्त वर्ग वर्ग मूले ।

इत्यव्यक्तषड्विधम् ।

भाषा—रूपैः षड्भिः वर्जितानां चतुर्णां, इस प्रश्न के अनुसार निकले हुए वर्ग का वर्गमूल लिया गया है ।

न्यास—या व १६ या ४८ ४ ३६ इस वर्ग राशिमें यावत्तावत् वर्ग १६ और ४ ३६ ये दो वर्ग हैं, इनके क्रम से मूल या ४ ४ ६ यह हुए, इन दोनों के द्विगुणित घात या ४८ है अब यहां यह विचार करना चाहिये कि दोनों मूल खण्डों का घात द्विगुण या ४८ के बराबर तभी होगा यदि या ४ ४ ६ में कोई एक ऋण हो इसलिये ४ ६ को मूल में ऋण कल्पना किया तब अभीष्टमूल या ४ ४ ६ हुआ ।

इसलिये अव्यक्तषड्विध समाप्त हुआ—

“अव्यक्तमूल क्रिया में कुछ विशेष”

वर्ग की विधि एवं घन की विधि पहिले बतलाई जा चुकी है, जिस किसी संख्या अथवा राशि का वर्ग या घन किया जाय, तो दी हुई संख्या अथवा राशि अपने राशिबर्ग या राशि घनका वर्गमूल तथा घनमूल कहलाती है, वर्गमूल का चिह्न $\sqrt{\quad}$ है। राशि के तीन घात से घन बनता है, इसलिये अपने राशि घनका वह राशि घनमूल कहलाई इसका चिह्न $\sqrt[3]{\quad}$ है। इसी प्रकार $\sqrt[4]{\quad}$, $\sqrt[5]{\quad}$, $\sqrt[6]{\quad}$ ये क्रम से दी हुई संख्या या राशि के चौथे, पाँचवें, छठे घात का चौथा, पाँचवाँ, छठा घात मूल कहलावेगा।

उदाहरण (१) $\sqrt{२२५}$ का मान निकालो,

$$\sqrt{२२५} = \sqrt{३ \times ३ \times ५ \times ५} = \sqrt{३^२ \times ५^२} = ३ \times ५ = १५$$

नोट— $३ \times ३ \times ५ \times ५$ के वर्गमूल को $\sqrt{(३ \times ३ \times ५ \times ५)}$ के रूप में लिखा जा सकता है, प्रायः $\sqrt{३ \times ३ \times ५ \times ५}$ इस रूप में लिखते हैं, इसलिये मूल के चिह्न को बतलानेवाली रेखा जो बढ़ा कर खींची गई है उसका अर्थ कोष्ठ भी समझना चाहिये जैसा ऊपर दिया गया है तथा यह मूल क्रिया व्यक्ताङ्कों में जिस प्रकार होती है उसी प्रकार अव्यक्ताङ्कों में भी लिखी जाती है तथा बतलाई जाती है, जैसे—

उदाहरण नं० (२), ९ क^२ का वर्गमूल जानना है

$$\text{चूँकि } ९ \text{ क}^२ = ३ \times ३ \times \text{क} \times \text{क} = (३ \text{ क})^२$$

$$\therefore \sqrt{९ \text{ क}^२} = ३ \times \text{क} = ३ \text{ क यह वर्गमूल हुआ।}$$

उदाहरण नं० (३), $\sqrt[३]{२७ \text{ अ}^३ \cdot \text{क}^६}$ का मान जानना है,

$$\sqrt[३]{२७ \text{ अ}^३ \cdot \text{क}^६} = \sqrt[३]{३^३ \text{ अ}^३ \text{ क}^२ \cdot २^३} = ३ \text{ अ} \cdot \text{क}^२ \text{ घनमूल हुआ।}$$

नोट—यदि किसी भिन्न राशि का वर्गमूल आदि निकालना हो तो अंश एवं हर का पृथक् पृथक् मूल आदि निकालने से उस राशि का वर्ग मूल आदि हो जाता है। पाटीगणित में भी इसके लिये “वर्गे कृती घनविधौ तु घनौ विधेयौ हारांशयोरथ पदे च पदप्रसिद्धयै” ऐसा कहा है।

(५) अभ्यासार्थं उदाहरणमात्रा—

वर्गमूल निकालो—

(१) अ^४. व^२ (२) ४ अ^२. क^४. व^२ (३) २५ क^२. अ^८(४) $\frac{१६६ क^४}{२५ ख^२}$ (५) २५ क^४. ख^४. अ^४(६) $\frac{४६ क^२. प^४. न^४}{१४४ च^४. अ^४ ख^२}$

घनमूल निकालो—

(१) २७ अ^८. क^{२७} (२) ८ क^{१२} (३) $\frac{१२५ क^८}{६४ व^३. क^२७}$ (४) $\sqrt[३]{-२७ क^३. प^३}$ (५) $\sqrt[३]{१२५ अ^३. व^३}$

अथानेकवर्णषड्विधम्

तत्र संकलनव्यवकलनयोः उदाहरणम्—

यावत्तावत्कालकनीलकवर्णास्त्रिपञ्चसप्तधनम् ।

द्वित्र्येकमितैः क्षयगैः सहिता रहिताः कति स्युस्तैः ॥ १० ॥

न्यासः—या ३ का ५ नी ७ । या २ का ३ नी १ योगे जातम्
या १ का २ नी ६ । वियोगे जातम् या ५ का ८ नी ८ ।

इत्यनेकवर्णसंकलनव्यवकलने ।

भाषा—धन यावत्तावत् तीन, कालक पांच और नीलक सातको ऋण यावत्तावत् दो, कालक तीन और नीलक एक-से सहित और रहित करने से क्या होंगे ।

(१) न्यास—योज्य या ३ का ५ नी ७

योजक या २ का ३ नी १

योगफल = या १ का २ नी ६ हुआ

(२) वियोज्य = या ३ का ५ नी ७

वियोजक = या २ का ३ नी १

अन्तर = या ५ का ८ नी ८ हुआ

इनका अन्तर “संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति” इस नियम से ही हुआ ।

अनेक वर्ण का संकलन व्यवकलन समाप्त हुआ ।

गुणनदिरुदाहरणम् ।

यावत्तावत्त्रयमृणमृणं कालकौ नीलकः स्वं
रूपेणाढ्या द्विगुणितमितैस्ते तु तैरेव निम्नाः ।
किं स्यात्तेषां गुणनजफलं गुण्यभक्तं च किं स्याद्
गुण्यस्याथ प्रकथय कृतिं मूलमस्याः कृतेश्च ॥ ११ ॥

न्यासः—गुण्यः या ३ का २ नी १ रू १

गुणकः या ६ का ४ नी २ रू २

गुणिते जातम् याव १८ काव ८ नीव २ याकाभा २४ यानीभा १२
कानीभा ८ या १२ का ८ नी ४ रू २ । अस्मादेव गुणनफलाद् गुण्ये-
नानेन या ३ का २ नी १ रू १ भक्तादाप्तो गुणकः या ६ का ४ नी
२ रू २ ।

इत्यनेकवर्णगुणनभजने ।

पूर्व गुण्यस्य वर्गार्थं न्यासः ।

या ३ का २ नी १ रू १

जातोवर्गः—याव ९ काव ४ नीव १ याकाभा १२ यानीभा ६
कानीभा ४ या ६ का ४ नी २ रू १ ।

वर्गादस्मान्मूलम् या ३ का २ नी १ रू १

इत्यनेकवर्णषड्विधम् ।

अनेकवर्ण के गुणन का उदाहरण—

भाषा—धनरूप १ के सहित ऋण यावत्तावत् तीन, ऋण कालक दो और
धन नीलक एक, इनको धन रूप दो के सहित ऋण यावत्तावत् छै ऋण कालक
चार और धन नीलक दो से गुणकर गुणनफल बताओ ।

(१) न्यासः—गुण्य या ३ का २ नी १ रू १

गुणक या ६ का ४ नी २ रू २

या व १८ या ० का १२ या ० नी ६ या ६

या का १२ का व ८ का ० नी ४ का ४

या नी ० का नी ४ नी व २ नी २

या ६ का ४ नी २ रू २

गुणनफल = याव १८ या ० का २४ या ० नी १२ या १२ काव ८

कानी का ८ नीव २ नी ४ रू २

यह गुणनफल हुआ—

अनेक वर्ण के भजन का उदाहरण—

या व १८ या का २४ या ० नी १२ या १२ का व ८ का नी ८ का ८ नी व २ नी ४ रु २ । इसमें या ई का रं नी १ रु १ इसका भाग देने से क्या लब्धि मिलेगी ।

क्रिया:—

भाजक	भाज्य	लब्धि:
या ई का रं नी १ रु १	या व १८ या ० का २४ या नी १२ या १२ का व ८ का नी ८ का ८ नी व २ नी ४ रु २	या ई का ४ नी २ रु २

अनेक वर्ण के वर्ग का उदाहरण—

रूप एक के सहित ऋण यावत्तावत् तीन, ऋण कालक २ और धन नीलक एक इनका वर्ग क्या होगा—

वर्ग के लिये “समद्विघातः कृतिरुच्यते” इस नियम से—

(१) वर्ग के लिए न्यास

गुण्य = या ई का रं नी १ रु १

गुणक = या ई का रं नी १ रु १

या व ९ या का ६ या नी ई या ई

का-या ६ का व ४ का नी रं का रं

नी-या ई नी का रं नी व १ नी १

या ई का रं नी १ रु १

गुणनफल = या व ९ या का १२ या नी ई या ई का व ४ का नी ४
का ४ नी व १ नी २ रु १ यही वर्ग हुआ

अनेक वर्ण के मूल का उदाहरण—

या व ९ या का १२ या नी ई या ई का व ४ का नी ४ का ४
नी व १ नी २ रु १ इस वर्गात्मक स्वरूप का मूल निकालना है ।

मूलानयन में घाताङ्क को अपचितरूप में स्थापन करना चाहिये जैसे
१ या^२ - ६ या + १२ या का - ६ यानी + ४ का^२ + ४ का - ४ कानी + नी^२ +
२ नी + १ सर्वप्रथम वर्ग का मूल लेना चाहिये जैसे ९ या^२ का मूल ३ या हुआ
अब द्विगुण मूल ६ या से १२ या का में भाग दिया तो लब्धि २ का आई पुनः
इसका वर्ग ४ का को घटाया फिर द्विगुणित मूल ६ या + ४ का से भाग देना
है तो लब्धि - नी कल्पना करने से - ६ यानी - ४ का नी भी घट
जायगी और पुनः नी^२ भी घटजायगा तदुत्तर शेष - ६ या - ४ का + २ नी + १

बचेगा यहां पर लब्धि १ कल्पना करनी होगी क्योंकि वर्गात्मक तो अब १ मात्र है इससे द्विगुण पूर्व लब्धिको गुणन किया तो ६ या + ४ का - २ नी यह पूर्व शेष में घट नहीं सकता यदि लब्धि रूप को ऋण कल्पना करें तो द्विगुण पूर्व लब्धि को गुणन करने से - ६ या - ४ का + २ नी ऐसा होगा, यह शेष में घट सकता है । अथवा विचार करना चाहिये कि धन स्थान में ऋण के ग्रहणमें यदि ९ या^२ का मूल जो ३ या है यह - ३ या भी हो सकता है क्योंकि ऋण धन दोनों का वर्ग धन ही होता है । इस प्रकार का प्रथम मूल स्वीकार करने से भी मूल ठिकाने से मिल सकता है जैसे—

$$\begin{array}{r}
 ९ या^२ + १२ या का - ६ यानी - ६ या + ४ का^२ \quad | \quad - ३ या - २ का + नी + १ \\
 - ४ कानी - ४ का + नी^२ + २ नी + १ \quad | \\
 \hline
 ९ या^२ \quad | \quad १२ या का - ६ यानी \\
 - ६ या - २ का \quad | \quad १२ या का + ४ का^२ \\
 \hline
 \quad \quad \quad | \quad - ६ या नी - ६ या - ४ का नी \\
 \quad \quad \quad | \quad - ६ या नी - ४ का नी + नी^२ \\
 \hline
 \quad \quad \quad | \quad - ६ या - ४ का + २ नी + १ \\
 \quad \quad \quad | \quad - ६ या - ४ नी + २ नी + १ \\
 \hline
 \quad \quad \quad \times
 \end{array}$$

इसलिये इसका मूल-३ या-२ का + नी + १ हुआ वा, ३ या + २ का - नी-१ निम्न लिखित स्वरूपों का वर्गमूल निकालो—

(६) अभ्यासार्थ उदाहरणमाला

- (१) ९ य^४ र^२ + ६६ य^२ र ज + १२१ ज^२
- (२) ९ अ^८ + $\frac{अ^४ व^४}{३६}$ - अ^६ व^२
- (३) व^२ य^४ - २ अ व य^३ + (अ^२ + २ व) य^२ - २ अ य + १
- (४) य^२ - २ अ य + अ^२ + २ य र - २ अ र + र^२
- (५) ४ य (१ + य) - २ अ (१ + २ य) + अ^२ + १
- (६) य^४ + ४ य^३ - २ य^२ - १२ य + ९
- (७) य^४ - ४ य^३ + ८ य + ४

इति पं० विशुद्धानन्द गौड़ ज्योतिषाचार्य विरचित संस्कृतव्याख्या

तथा भाषाभाष्यसहिते बीजगणितपूर्वार्धे अनेक-

वर्णषड्विधं समाप्तम् ।

अथ करणीषड्विधम् ।

तत्र संकलनव्यवकलनयोः करणसूत्रं वृत्तद्वयम्—

योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य वधस्य मूलं द्विगुणं लघुं च ।

योगान्तरे रूपवदेतयोः स्तो वर्गेण वर्गं गुणयेद्भजेच्च ॥१३॥

लघ्व्या हतायास्तु पदं महत्याः सैकं निरेकं स्वहतं लघुघ्नम् ।

• योगान्तरे स्तः क्रमशस्तयोर्वा पृथक्स्थितिः स्याद्यदि नास्ति मूलम् १४

अधेन्द्रजोपजातिकाभ्यां करणीसंकलनव्यवकलने प्रतिपादयति—

व्याख्या—यस्य कस्यापि राशेर्मूले गृहीते निरग्रं मूलं न संभवति स किलराशिः करणीशब्देनोच्यते । करण्योर्योगेऽन्तरे वा कर्तव्ये रूप-वत्कृतो यः करणीयोगः सा महती करणीति कल्पयेत् । करण्योर्घातस्य मूलं द्विगुणं सा लब्धी करणीति च कल्पयेत् । तयोर्लघुमहतयोः कल्पितकरण्योः रूपवत् कृते ये योगान्तरे ते प्रथमकरण्योर्योगान्तरे स्तः । अथ “अव्यक्तवर्गकरण्यगुणनासु चिन्त्यः” इत्यादिना “भाज्याद्धरः शुद्धयति” इत्यादिना च करणी गुणनभजनयोः सिद्धावपि तत्र विशेषमुच्यते— “वर्गेण वर्गं गुणयेद्भजेच्च” इति । अस्यायमाशयः । करणी गुणने कर्तव्ये यदिरूपाणां गुण्यत्वं गुणकत्वं वा स्यात् करणीभजने वा कर्तव्ये यदिरूपाणां भाज्यत्वं भाजकत्वं वा स्यात्तदा रूपाणां वर्गं कृत्वा गुणनभजने कार्य्ये । करण्याः वर्गरूपत्वात् । वर्गस्यापि समद्विघाततया गुणनविशेषत्वादुक्तवत्सिद्धिः । “स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्नाः” इत्यादिना व्यक्तोक्तप्रकारेणापि वा करणीवर्गस्य सिद्धिः स्यात्किन्तु “वर्गेण वर्गं गुणयेद्भजेच्च” इत्युक्तत्वाद्विगुणान्त्यनिघ्ना इत्यत्र चतुर्गुणान्त्यनिघ्ना इति द्रष्टव्यम् । अतः करण्या वर्गेऽपरेऽङ्काश्चतुर्गुणान्त्यनिघ्ना एव कार्य्याः, तदैव वर्गः सिद्धयति । मूलज्ञानार्थं तु सूत्रं वक्ष्यति । अथ प्रकारान्तरेण योगान्तरे ‘लघ्व्या’ इत्यादिना निरूपयति—लघ्व्या करण्या हताया महत्याः करण्या यत्पदं तदेकत्र सैकमपरत्र निरेकमुभयमपि वर्गितं लघुकरण्यगुणितं च क्रमेण करण्योः योगान्तरे स्तः । अत्र लघ्व्या महत्याभागे यदि भिन्नतास्यात्तदा मूलाभागे

यथासम्भवमपवर्त्तो दातव्यः अत्र करण्योर्मध्ये याङ्कतो लघुः सा लघुः ।
याङ्कतो महती सामहतीतिज्ञेयम् । अत्र लघ्व्या हताया महत्या यदि मूलं न
लभ्यते तर्हि योगान्तरे कथं कर्त्तव्य इत्यत्र आह—“पृथक्स्थितिः स्याद्य-
दि नास्ति मूलम्” इति ॥ १४ ॥

अपवर्त्तनेनापि करण्योः योगान्तरे भवतः ।

अत्र केनचिदधो लिखितं पद्यं कल्पितं तदपि सयुक्तिकमेवास्ति—
आदौकरण्यावपवर्त्तनीये-

तन्मूलयोरन्तरयोगवर्गौ ।

इष्टापवर्त्ताङ्कहतौ भवेतां-

क्रमेण विश्लेषयुती करण्योः ॥ १ ॥

व्याख्या—अस्यायमाशयो यदादौ प्रथमं करण्यौ केनचित्समानाङ्केना-
पवर्त्तनीये ततस्तन्मूलयोरन्तरयोगौ कृत्वा ततस्तयोर्वर्गौ विधेयौ पुनरिष्टाप-
वर्त्ताङ्केन हतौ गुणितौ कार्यौ ततः क्रमशः करण्योः विश्लेषयुती भवेताम् ।
अर्थात् तन्मूलयोरन्तरवर्गः इष्टापवर्त्ताङ्कहतस्तदा तयोःकरण्योरन्तरं स्यात्
योगवर्ग इष्टापवर्त्ताङ्कहतस्तदा करण्योर्योगः स्यादिति ज्ञेयम् ।

उदाहरणम् ।

द्विकाष्टमित्योस्त्रिभसंख्ययोश्च योगान्तरे ब्रूहि पृथक् करण्योः ।

त्रिसप्तमित्योश्च चिरं विचिन्त्य चैत्षड्विधं वेत्सि सखे करण्याः ॥

न्यासः—क २ क ८ योगे जातम् क १८ अन्तरे च क २

द्वितीयोदाहरणे न्यासः—क ३ क ७ योगे जातम् क ४८ ।

अन्तरे च क १२ ।

तृतीयोदाहतौ न्यासः—क ३ क ७ अनयोर्घाते मूलाभावात्
पृथक् स्थितिरेव । योगेजातम् क ३ क ७ अन्तरे च क ३ क ७

इति करणीसंकलनव्यवकलने ।

भाषा—करणी के जोड़ने और घटाने का प्रकार—जिस संख्या अथवा राशि
का पूरा पूरा मूल न मिले वह संख्या अथवा राशि का मूल करणी कहलाती है । योज्य
योजक, अथवा वियोज्य वियोजक जो करणी होवे उनका योग करके जो योगफल

आवे उसको महती संज्ञा मानो । फिर घात के मूल को दूना करो उसको लघु संज्ञा मानो इस प्रकार महती और लघु संज्ञक जो मान होवे उनका रूप की तरह ही योग और अन्तर करो । करणी के गुणन करने में जो रूप गुण्य और गुणक हों भजन करने में भाज्य और भाजक हों तो रूपों का वर्ग करके वाद में गुणन भजन करो । यदि घात का मूल न मिले तो पृथक् ही रखना होगा ।

उदाहरण—

भाषा—करणी दो करणी आठ, करणी तीन करणी सत्ताईस और करणी तीन करणी सात इन दो दो करणियों के योग और अन्तर अलग-अलग बताओ ।

न्यास (१) क २ क ८ इन दो करणियों का योग करने के लिये “योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य” इस नियम के अनुसार दोनों का योग क १० हुआ, इसकी महती संज्ञा है, फिर क २ क ८ इनका घात क १६ हुआ । इसका वर्गमूल ४ हुआ फिर इसका दूना किया तो ८ हुआ इसकी लघुसंज्ञा मानी अब महती क १० और लघु क ८ इन दोनों का रूपों की तरह योग क १८ और अन्तर क २ हुआ, ये ही उक्त दोनों करणियों के योग और अन्तर हुए ।

न्यास (२) क ३ क २७ इनका भी इसी प्रकार योग करने के लिये दोनों का योग = क ३० यह महती दोनों के घात मूल $\sqrt{२७ \times ३} = \sqrt{८१} = ९$ फिर इसका दूना $९ \times २ = १८$ अर्थात् क १८ इसकी लघुसंज्ञा हुई पुनः दोनों का रूप की तरह योगान्तर = $३० + १८ =$ क ४८ योग हुआ तथा $३० - १८ = १२$, क १२ यह अन्तर हुआ ।

न्यास (३) क ३ क ७ इनका योग करणी १० हुआ, फिर इन दोनों के घात के मूल का दूना करना है, यहाँ दोनों का घात = $३ \times ७ = २१$ इसका मूल पूरा नहीं आता, इसलिये “पृथक् स्थितिः स्याद्यदि नास्ति मूलम्” इस नियम के अनुसार इनकी पृथक् स्थिति ही योग होगा इसलिये योग = क ३ क ७ तथा अन्तर = क ३ क ७ यह हुआ—

द्वितीय नियम के अनुसार किया—

न्यास (१)—क २ क ८ का योग और अन्तर करना है यहाँ पर बड़ी करणी ८ है इसमें छोटी करणी २ का भाग दिया लब्धि आई ४ इसका मूल लिया = २ हुआ इसमें १ जोड़ा और एक घटाया तो ३ । १ यह हुए । इनका अलग अलग वर्ग किया ४ ९ । ४ १ हुआ फिर इनको लघुकरण २ से गुणा किया तो क १८ और क २ यह क्रम से योग और अन्तर हुए

न्यास (२)—क २७ क ३ में भी इसी तरह किया क २७ में क ३ का

भाग दिया ९ लब्धि मिली इसका मूल लिया ३ हुआ इसमें १ जोड़ा और एक घटाया तो ४; २ यह हुए फिर इनका वर्ग किया १६, ४ हुआ फिर इसको लघु करणी ३ से गुणा किया क ४८ यह योग हुआ क १२ यह अन्तर हुआ—

न्यास (३)—क ७ क ३ में भी यही विधि आरम्भ की। प्रथम तो करणी ३ से करणी ७ में भाग ही नहीं लगा यदि भिन्नात्मक माना भी जाय तो उसका मूल पूरा पूरा नहीं मिलता—इसलिये पृथक् स्थिति ही उक्त नियमानुसार यहां भी रह जावेगी इसलिये क ३ क ७ यह योग हुआ क ३ क ७ यह अन्तर हुआ इसलिये करणी के जोड़ने और घटाने का प्रकार समाप्त हुआ।

अत्रोपपत्तिः ।

अवर्गात्मकस्य यस्य कस्यचिदङ्कस्य मूलं न लभ्यते, परं तन्मूलेन सह गणिते चेदावश्यकता स्यात्तदा तन्मूलद्योतकं करणीति संज्ञा प्राचीनैः व्यवहृता ।

यथाऽष्टानां मूलं नास्ति, तदा तन्मूलद्योतकं क८, अधुना $\sqrt{८}$ एवं नव्याः स्वीकुर्वन्ति । अतोऽवर्गात्मकयोरङ्कयोर्मूलयोगः यस्यमूलं स करणीयोगः ।

एवमेवावर्गात्मकयोरङ्कयोर्मूलान्तरं यस्यमूलं, तत्करण्यन्तरं स्यात् । अतोऽत्र योगेऽन्तरे च कर्तव्ये उपपत्तौ संख्यास्थानेऽक्षरतो वासनायाः सिद्धिः स्यात् ।

$$\text{अतः } \sqrt{अ} \pm \sqrt{ब} = \sqrt{(\sqrt{अ} \pm \sqrt{ब})^2} \text{ पक्षौ समौ ।}$$

$$\text{परं } \sqrt{(\sqrt{अ} \pm \sqrt{ब})^2} = \sqrt{अ+ब \pm २\sqrt{अ} \times \sqrt{ब}} \\ \sqrt{अ+ब \pm \sqrt{४ अ \cdot ब}}$$

अत्र $अ+ब =$ महती संज्ञा, $२\sqrt{अ \cdot ब} =$ लघुः

अत्र यदि $\sqrt{अ} > \sqrt{ब}$ तो महान्

$$\therefore \sqrt{अ} - \sqrt{ब} > ० \text{ शून्यतो महान्}$$

उभयोर्वर्गौ कृते $अ - २\sqrt{अ} \times \sqrt{ब} + ब > ०$

$$\therefore अ+ब - २\sqrt{अ \cdot ब} > ०$$

अत्र प्रत्यक्षतः

$$अ+ब > २\sqrt{अ \cdot ब}$$

अतः $अ+ब$ अस्य महती संज्ञा

$२\sqrt{अ \cdot ब}$ अस्य लघुसंज्ञा च शुक्तियुक्तैष कल्पिता ।

अतएव योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य वधस्य मूलं द्विगुणं लघुञ्च,
योगान्तरे रूपवदेतयोःस्त इत्युपपन्नम् ।

$$\therefore २\sqrt{k} = \sqrt{४k} \text{ इमौ पक्षौ समावेव ।}$$

$$\text{अथवा } \frac{\sqrt{k}}{२} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{k}}{२}\right)^2} \text{ अत्रापि समावेव ।}$$

$$\text{परं } \sqrt{\left(\frac{\sqrt{k}}{२}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{४}} \text{ समौ ।}$$

अनया युक्त्या “वर्गेण वर्गं गुणयेद्भजेच्च” इति सम्यगुपपद्यते ।

कल्प्यताम्—($\sqrt{अ} \pm \sqrt{ब}$) = करणीयोगान्तरमस्ति

$$\therefore \frac{(\sqrt{अ} \pm \sqrt{ब}) \sqrt{ब}}{\sqrt{ब}} = \text{करणी योगान्तरम् नात्र काचिद्विकृतिः}$$

$\sqrt{ब}$ अनेन गुणिते हते च ।

$$\therefore \sqrt{ब} \left(\frac{\sqrt{अ}}{\sqrt{ब}} \pm १ \right) \text{ एतदपि करणीयोगान्तरतुल्यम्}$$

$$\therefore \text{अत्र यदि } \sqrt{अ} \text{ महती करणी } \sqrt{ब} \text{ लघुकरणी तदा}$$

$$\sqrt{ब} \left(\sqrt{\frac{अ}{ब}} \pm १ \right) =$$

$$\sqrt{ब} \left(\sqrt{\frac{अ}{ब}} \pm १ \right)^2 = \text{अतः “लघ्याहतायास्तु पदं महत्याः सैकं}$$

निरेकं स्वहतं लघुघ्नम् । योगान्तरेस्तः” इतिसूत्रं साधूपपन्नं जातम्

यथैव वर्गकरणौ, तथैव घनकरणौ, चतुर्घातकारणी, पञ्चघातकरणीत्यादि-
ष्वपि वेद्यम् ।

पदमित्यनेन कथनेनापि घनपदं चतुर्घातपदं, षोडशमपि भवेत्तदेव वेद्यमिति
तत्रेदमवश्यमवधेयं यत् स्वहतमित्यत्र “यावद्घात पदमिष्टं भवेत् तावद्धारमेव
स्वेनहतमिति योज्यम् ।

गुणनोदाहरणम्—

द्विज्यष्टसंख्या गुणकः करण्यो

गुण्यस्त्रिसंख्या च सपञ्चरूपा ।

वधं प्रचक्ष्वाशु विपञ्चरूपे-

गुणेऽथ वा व्यर्कमिते करण्यौ ॥ १३ ॥

न्यासः—गुणकः । क २ क ३ क ८ । गुण्यः । क ३ रु ५ ।

अत्र गुण्ये गुणके वा, भाज्ये भाजके वा करणीनां करण्योर्वा, यथासंभवं लाघवार्थं योगं कृत्वा गुणनभजने कार्य्ये । तथा कृते जातः

गुणकः । क १८ क ३ । गुण्यः । क २५ क ३ ।

गुणिते जातम् रु ३ क ४५० क ७५ क ५४ ।

व्याख्या—उपर्युक्तोदाहरणे गुणकः द्वित्र्यष्टसंख्याः करण्यः । पञ्च-
रूपसहिता त्रिसंख्या करणी गुण्यः, पञ्चरूपोपे त्र्यर्कमिते करण्यौ वाऽपि
गुणकः अतोऽत्र गुणकद्वयेनोदाहरणद्वयं ज्ञेयम् । उपजातिवृत्तमेतत् ।

उदाहरण—

भाषा—रूप पांच सहित करणी तीन को करणी दो करणी तीन करणी आठ
से, और रूप पांच के सहित करणी तीन को रूप पांच से हीन करणी तीन करणी
१२ से गुण कर गुणनफल अलग अलग बताओ ।

न्यास—अब यहां पर गुण्य, गुणक, एवं भाज्य, भाजक में लाघव के
लिये जिन करणियों का पूर्व नियमानुसार योग हो सकै उनका योग कर तब
गुणन एवं भजन करना चाहिये । और जो किसी उदाहरण में रूप होवे करणी के
गुणन एवं भजन की स्थिति में रूप को करणी की स्थिति में कर लेना चाहिये
क्योंकि एक जातीय सम्बन्ध से गुणन भजन होता है ।

(१) क २ क ३ क ८ इस गुणक में क २ क ८ का योग क १८ होता
है इसलिये क १८ क ३ गुणक हुआ गुण्य में रूप पांच का करणी स्वरूप मानने
से क २५ हुआ अब उसे गुणन किया ।

गुण्य = क २५ क ३

गुणक = क १८ क ३

क ४५० क ४५

क ७५ क ९

गुणनफल = रु ३ क ४५० क ७५ क ५४

यहाँ गुणनफल में करणी ९ के स्थान में रु ३ लिखा इसलिये रु ३ क ४५०
क ७५ क ५४ यह गुणनफल हुआ ।

विशेषसूत्रं वृत्तम्—

क्षयो भवेच्च क्षयरूपवर्गश्चेत्साध्यतेऽसौ करणीत्वहेतोः ।

ऋणात्मिकायाश्च तथा करण्या मूलं क्षयो रूपविधानहेतोः ॥१५॥

द्वितीयोदाहरणे न्यासः —

गुणकः—क २५ क ३ क १२ ।

गुण्यः—क २५ क ३ ।

अत्र गुणके करण्योर्योगे कृते गुणकः क २५ क २७ गुणिते जातम् क ६२५ क ६७५ क ७५ क ८१ एतास्वनयोः करणी ६२५ क ८१ मूले रु २५ रु ९ अनयोर्योगे जातम् रु १६ अनयोः करणी ६७५ क ७५ अन्तरे योग इति जातो योगः क ३०० यथाक्रमं न्यासः रु १६ क ३०० ।

इति करणी गुणनम् ।

व्याख्या—क्षय इति यदि क्षयरूपाणां वर्गस्तर्हि क्षयो भवेत् असौ क्षयरूपवर्गश्चेत्करणत्व निमित्तं साध्यते । ऋणात्मिकाया इति । ऋणात्मिकायाः करण्या मूलं चेत् तर्हि क्षयो भवेच्चेन्मूलं रूपविधाननिमित्तं साध्यते इति उपजातिवृत्तमेतत्

विशेष—

भाषा—ऋण रूप का वर्ग ऋण होता है जो वह करणी के हेतु सिद्ध किया जाय, और ऋण करणीका मूल ऋण होता है जो उसका रूप साधन करना होवे तब यह “न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात्” इस सूत्र का अपवादसा हो जाता है ।

(१) प्रथम उदाहरण में क २५ क ३ गुण्य है और रु ५ क ३ क १२ गुणक है । अब यहाँ करणी ३ क १२ गुणक की करणियों का योग करने से क २७ हुई और रु ५ का वर्ग क २५ हुआ ।

गुण्य = क २५ क ३

गुणक = क २५ क २७

क ६२५ क ७५

क ६७५ क ८१

गुणनफल = रु १६ क ३००

नोट—यहाँ पर क ६२५ का मूल रु २५ हुआ और क ८१ का मूल रु ९ हुआ इन दोनों मूलों का योग रु १ हुआ इसलिये ऋण रु १६ लिखा गया । क ६७५ क ७५ इनका योग करना है तो “योगं करण्योर्महती” इस नियम से

क ७५० यह महती करणी हुई करणियों का घात ५०६२५ हुआ इसका मूल २२५ हुआ इसको दूना किया ४५० हुआ फिर महती ७५० ऋण करणी का और लघुकरण ४५० का अन्तर करने से क ३०० हुए यही योग हुआ, क्योंकि “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” ऐसा नियम है, इसलिये क १६ क ३०० यह गुणन-फल सिद्ध हुआ जो ऊपर दिखलाया गया है ।

करण के गुणन का प्रकार समाप्त हुआ ।

अत्रोपपत्तिः ।

(-३) $\sqrt{२}$ अत्र रूपत्रयेण ऋणेन करणीद्वयं धनं गुणितमस्ति । अत्र (-३) $\sqrt{२} = \sqrt{(-३)^२ \times २} = \sqrt{१८}$ अत्रेदं न ज्ञायते यत् $\sqrt{१८}$ अस्य मूलं धनमृणं वाऽपेक्षितं परं हि करणीद्वयं धनं यदि रूपत्रयेण ऋणेन गुण्यते तदा गुणनफलमवश्यमृणं स्यादतोऽत्र १८ अस्य मूलमृणमेवोचितम् । १८ अस्य मूलमृणमत्रास्तीति ज्ञानाय किमपि चिह्नविशिष्टमपेक्षितमत-आचार्येणोर्ध्वस्थविन्दुना क्षयचिह्नेन बोधितम् । इदमत्र कथनं स्फुटमेवास्ति यत्किल, ऋणरूपत्रयस्य यदि करणी निर्माणाय कृतिः कियते तदा क्षयो भवेदिति युक्तमुक्तम् ।

एवम्— $\sqrt{१६} = -$ क १६, अत्र ऋणषोडशकरण्याः “न मूलं क्षय-स्यास्ति तस्याकृतित्वात्” इत्यनेन नियमेन मूलग्रहणमनुचितम् । परन्त्वत्र धन-करण १६ मूलमृणमस्ति, नहि, ऋणषोडशमूलम् । अतो ऋण करणी मूलं यदि रूपार्थमपेक्षितं तदा, ऋणमवगन्तव्यमिति—अतः “ऋणात्मिकायाश्च तथा करण्याः मूलं क्षयो रूपविधानहेतोः” इति भास्करकथनं साधु—

पूर्वगुणनफलस्य स्वगुणच्छेदस्य भागहारार्थं न्यासः—भाज्यः क ९ क ४५० क ७५ क ५४ और भाजकः = क २ क ३ क ८ अत्र ‘क २ क ८’ एतयोः करण्योर्योगे कृते जातम् क १८ क ३ । ‘भाज्याच्छेदः शुद्धयति प्रच्युतः सन्’ इत्यादि करणेन लब्धो गुण्यः रु ५ क ३ ।

भागहार—

भाषा—(१) भाज्यः = क ९ क ४५० क ७५ क ५४ और भाजकः = क २ क ३ क ८ है । यहां भाजक के क २, क ८ इन करणियों का “योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य” इत्यादि सूत्र के अनुसार योग करने से क १८ हुआ । इसलिये भाजक = क १८ क ३ हुआ ।

भाजक

भाज्य

लब्धि (भजन फल)

क १८ क ३)

क ९ क ४५० क ७५ क ५४

(रु ५ क ३)

क ४५० क ७५

क ९ क ५४

क ९ क ५४

×

यहां 'भाज्याच्छेदः शुद्ध्यति—' इस रीति से क २५ क ३ अर्थात् रूपक ५ क ३ लब्धि प्राप्त हुई।

द्वितीयोदाहरणे—

न्यासः—भाज्यः = क २५६ क ३००। भाजकः = क २५ क ३ क १२ करणयोर्योगे कृते जातम् क २५ क २७। अत्रादौ त्रिभिर्गुणयित्वा धनकरणयोः ऋणकरणयोश्च योगं विधाय पश्चात् पञ्चविंशत्या गुणयित्वा शोधिते लब्धम् रु ५ क ३। अत्रापि पूर्ववल्लब्धो गुण्यः रु ५ क ३।

भाषा—(१) भाज्य = क २५६ क ३००। भाजक = क २५ क ३ क १२ है यहां पर भी भाजक की क ३ क १२ का उपरोक्त नियम से ही योग किया तो क २७ हुआ। इसलिये क २५ क २७ भाजक हुआ—

भाजक	भाज्य	लब्धि
क २५ क २७)	क २५६ क ३००	(क ३ क २५
	क ७५ क ८१	
	क ६७५ क ६२५	
	क ६७५ क ६२५	

नोट—यहां भाज्य करणी में भाजक गत करणियोंका भाग देने से क ३ लब्धि ग्रहण की इसलिये भाजक गत करणी २५ करणी २७ से गुणा किया तो क ७५ क ८१ हुए अब फिर भाज्य गत क ३०० में से एक ७५ को घटाया तो “संशोध्यमानं स्वमृणत्वमेति” इस नियमसे क ७५ यह घटते समय धन होगी और धन क ७५ एवं धन क ३०० का योग क ६७५ हुआ तथा १५६ ऋण में क ८१ धन को घटाया तो “संशोध्यमान” के नियम से ही क ८१ घटने की स्थिति में ऋण होगी और ऋण, ऋण करणियों का भी योग ही होगा—इसलिये योग क ६२५ हुआ अब रु ५ अर्थात् क २५ लब्धि ग्रहण की यह ऋण करणी मानने से ठीक शुद्ध होगी इसलिये लब्धिसे भाजक गत करणी २५ एवं क २७ से गुणा किया तो क ६२५ यह धन गुणनफल होगा तथा क ६७५ यह गुणनफल ऋण होगा तब “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” करने से विस्तृत शुद्ध हो जाता है इसलिये लब्धि = क ३ क २५ यह हुई।

अथान्यथोच्यते—

धनर्णताव्यत्ययमीप्सितायाश्छेदे

करण्या असकृद्विधाय ।

तादृक् छिदा भाज्यहरौ निहन्या—

देकैव यावत्करणी हरे स्यात् ॥१६॥

भाज्यास्तया भाज्यगताः करण्यो

लब्धाः करण्यो यदि योगजाः स्युः ।

विश्लेषसूत्रेण पृथक् च कार्या—

स्तथा यथा प्रष्टुरभीप्सिताः स्युः ॥१७॥

तथा च विश्लेषसूत्रं वृत्तम्—

वर्गेण योगकरणी विहता विशु—

द्ध्येत्खण्डानि तत्कृतिपदस्य यथेप्सितानि ।

कृत्वा तदीयकृतयः खलु पूर्वलब्ध्या

क्षुण्णा भवन्ति पृथगेवमिमाः करण्यः ॥१८॥

व्याख्या—उपर्युक्तोदाहरणे यत्र भाज्यः क २५६ क ३०० । भाजकः क २५ क २७ अस्ति—अत्र प्रश्ने भागहारविधिना प्रथमं करणी ३ लब्धौ गृहीता परमस्य संदिग्धत्वमेव न तु निश्चितं दृश्यते यद्यपि पश्चाच्छुद्धिर्भवति तथापि पूर्वलब्धरेषैवग्राह्या इत्यस्य निर्णयो न वास्तविकः । अथवा कियद्गुणो भाजको भाज्याच्छुध्यतीति दुरवबोधमतः परमकारुणिकैराचार्यचरणैश्शिष्यावबोधाय प्रकारान्तरेणोपजातिका वृत्तद्वयं अन्यनियमसूचनार्थं न्यस्तम् । धनर्णतेति । छेदेऽर्थात् भाजके ईप्सिताया एकस्याः करण्याः धनर्णताव्यत्ययमर्थात् विपर्ययासं विधाय तादृशेन भाजकेन यथास्थितौ भाज्यहरौ गुणयेत् । एवं कृते करणीनां यथोक्त्या योगे च कृते भाज्यभाजकौ स्तः । अथास्मिन्नपि भाजके यदि द्वयादीनि करणीखण्डानि स्युस्तदात्रापि एकस्याः करण्या धनर्णता विपर्ययासं कृत्वा तादृशभाजकेन पूर्वगुणनसंपन्नौ भाज्यभाजकौ गुणयेत् ।

तत्रापि यथासंभवं करणीयोगे कृते तौ भाज्यभाजकौ स्तः । एवमसकृत् तावद्विधेयं यावद्भाजके एकैव करणी भवेत् । अथ निष्पन्नया भाजक-करण्या भाज्यकरण्यो रूपवदेव भाज्याः यल्लभ्यन्ते ता लब्धिकरण्यो भवन्ति । अथ यदि लब्धाः करण्यो योगजाः करण्यः स्युस्तदा विश्लेष-सूत्रेण तास्तथा पृथक्कार्या यथा प्रष्टुरभीप्सताः स्युरिति—(१६, १७) ।

अथ विश्लेषसूत्रव्याख्या—

योगकरणी येन वर्गेण विहता सती विशुद्ध्येतत्कृतिपदस्य यथेप्सितानि खण्डानि कृत्वा तदीयकृतयः पूर्वलब्ध्या क्षुण्णाः पृथक्करण्यो भवन्ति । अस्यायमाशयो यत् योगकरणी येन वर्गेण विहता सती निःशेषा भवेत्तदा तस्य वर्गस्य मूलं ग्राह्यम्, तस्य खण्डानि प्रष्टुर्यावन्त्य-भीष्टानि तावन्ति कृत्वा तेषां खण्डानां वर्गाः कर्तव्याः । ते वर्गाः पूर्व-लब्ध्या क्षुण्णाः वर्गेण हृतायां योगकरण्यां या लब्धिः सा पूर्वलब्धिः । तथा गुणितास्ते वर्गाः पृथक्करण्यो भवन्ति ॥१८॥

अत्रोपपत्तिः ।

कल्प्यते $\sqrt{k \pm x} \sqrt{x} = \text{करणी योगान्तरमस्ति}$

अत्र यदि $k = a^2 \cdot v$ एवमेवहि $x = n^2 \cdot v$

$\therefore \sqrt{k \pm x} \sqrt{x} = \sqrt{a^2 \cdot v \pm n^2 \cdot v}$

पुनः $\sqrt{k \pm x} \sqrt{x} = \sqrt{v} \times a \pm \sqrt{v} \times n$

$\therefore \sqrt{k \pm x} \sqrt{x} = \sqrt{v} (a \pm n)$

$\therefore \sqrt{k \pm x} \sqrt{x} = \sqrt{v} (a \pm n)^2$

अतः “आदौ करण्यवपवर्त्तनीये तन्मूलयोरन्तरयोगवर्गौ ।

इष्टापवर्त्ताद्बृहत्तौ भवेतां क्रमेण विश्लेषयुती करण्योः ॥”

इति सूत्रं सूचयन् जातम् ।

अथ “घनर्णेति”—

$\therefore \frac{\text{भाज्यः}}{\text{भाजकः}} = \text{लब्धिः} ।$ भाजकेन भक्तो भाज्यः लब्धिः स्यादिति स्पष्टमेव

गणितविदाम् । तत्र गणितिकाः गणितेऽङ्गलाघवाय केनचिदङ्गेन हरभाज्यावपवर्त्य क्रियां कुर्वन्ति लब्धिस्तु तत्रापि सैवस्यात्परं हरभाज्यावपवर्त्तनेन तत्र गणिते गौरव-

मन्तरैव लब्धेशानयनं स्यात् । परं करण्याः भागहारे न तथा लाभवन्मायाति । तत्र हरभाज्ययोरपवर्तननियमेन गौरवमापद्यते । अतस्तत्राऽऽचार्यचरणैरन्यथा युक्तिस्का—

तत्र हि यदि भाज्येऽनेकानि करणीखण्डानि स्युः भाजके चैकमेव खण्डम् तदाऽनेकखण्डात्मकस्य भाज्यस्यैकखण्डात्मकेन भजने सौकर्यम् । यदि च भाजकेऽनेकाः करण्यः स्युस्तदा भाजकेन भाज्ये भजने गौरवम् । अतस्तत्र भाजकगतानेककरणीखण्ड-संख्याया एकत्वसाधनायोपायविशेषोऽङ्गो विहितस्तत्रापि भाजकभाज्ययोः केनचिद-ङ्केन गुणितयोरपि भजनफले न काचिद्विकृतिः । अतो यदि भाजके धनकरणीद्वयं तदा तदन्तरमितेनेष्टेन भाज्यभाजकौ यदि गुण्येते तदा भाजके योगान्तर-घातस्य वर्गान्तरसमत्वात् तद्वर्गयोर्मूले गृहीते सति तदन्तरतुल्या भाजके एकैव करणीस्यात् । अन्यथा यदि भाजके ऋण करणी चेत्तदा तत्करणीयोगतुल्ये-नेष्टेन हरभाज्यौ गुणनीयौ तथैवात्रापि भाजके योगान्तरघातसंभवस्ततः “योगान्तर घातस्य वर्गान्तरसमत्वात् तद्वर्गयोर्मूले गृहीते तदन्तरेण तुल्या भाजकेऽत्रापि एकैव करणी स्यात् । यदि भाजके करणीद्वयं भवेत्तदा हरभाज्ययोः व्यस्तघनर्णहरेण गुणनेनैक-वारमेवैका करणीभवति । करणीतृतीये वारद्वयं करणी चतुष्टये वारत्रयं व्यस्तघनर्ण-हरेण गुणनेन हारे एकाकरणी भवत्यतोऽसकृदियुक्तम् । अतः—

“धनर्णताव्यत्ययमीप्सितायादृष्टे करण्या” इति सूत्रं साधूपपन्नं जातम् ।

अथ यदि “योगजाः करण्यः स्युस्तदा विश्लेषसूत्रेण ताः पृथक् कार्याः—अतः विश्लेषसूत्रोपपत्तिः—अवर्गात्मकस्यवर्गात्मकस्यचाङ्कस्यघातोऽवर्ग एवातोऽव्यक्ते—

$$\sqrt{\text{या}^2 \cdot \text{का}} = \text{या} \quad \sqrt{\text{का}} \text{ अत्र यदि या} = \text{नी} + \text{पी} + \text{ह} ।$$

तदा स्वरूपस्योत्थापनात्—

$$\therefore \sqrt{\text{या}^2 \cdot \text{का}} = \text{या} \quad \sqrt{\text{का}}$$

$$\therefore \sqrt{\text{या}^2 \cdot \text{का}} = (\text{नी} + \text{पी} + \text{ह}) \sqrt{\text{का}}$$

$$\therefore \sqrt{\text{या}^2 \cdot \text{का}} = \text{नी} \sqrt{\text{का}} + \text{पी} \sqrt{\text{का}} + \text{ह} \sqrt{\text{का}}$$

$$\therefore \sqrt{\text{या}^2 \cdot \text{का}} = \sqrt{\text{नी}^2 \cdot \text{का}} + \sqrt{\text{पी}^2 \cdot \text{का}} + \sqrt{\text{ह}^2 \cdot \text{का}}$$

$$\therefore \text{अतः “वर्गेण योगकरणी” स्युपपन्नं जातम् ।}$$

न्यासः । भाज्यः क ९ क ४५० क ७५ क ५४ ।

भाजकः क १८ क ३ ।

अत्र भाजके त्रिमितकरण्याः ऋणत्वं प्रकल्प्य क १८ क ३ अनेन भाज्ये गुणिते योगे च कृते जातम् क ५६२५ क ६७५ । भाजके च क २२५ अनया भाज्ये हते लब्धम् क २५ क ३ ।

भाषा—उदाहरण (१) में भाज्य क ९ क ४५० क ७५ क ५४ और भाजक क १८ क ३ है। यहां क ३ को ऋण माना तो क १८ क ३ भाजक हुआ। अब इस नूतन भाजक से भाज्य को तथा भाजक को दोनों को क्रम से गुणा किया—

$$\text{गुण्य} = \text{क ९ क ४५० क ७५ क ५४}$$

$$\text{गुणक} = \text{क १८ क ३}$$

$$\text{क १६२ क ८१०० क १३५० क ९७२}$$

$$\text{क २७ क १३५० क २२५ क १६२}$$

$$\text{गुणनफल} = \text{क ५६२५ क ६७५}$$

नोट—यहां धन और ऋण करणियों का योग करने से क ८१०० क २२५ क ९७२ क २७ ये करणियां अवशिष्ट रहीं क्योंकि धन और ऋण करणी का “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” इस नियम से धन ऋण के तुल्य होने से करणियां कट गईं। ऊपर की करणियों में पहिली, दूसरी, तीसरी, चौथी करणी का योग करने से भाज्य में क ५६२५ क ६७५ ये करणी हुईं। इसी प्रकार भाजक की करणी भी नूतन गुणक से गुणा करके बनानी चाहिये। यहां तबतक क्रिया होगी जबतक भाजक में केवल एक करणी हो जावे, इसलिये—

$$\text{गुण्य} = \text{क १८ क ३}$$

$$\text{गुणक} = \text{क १८ क ३}$$

$$\text{क ३२४ क ५४}$$

$$\text{क ५४ क ९}$$

$$\text{गुणनफल} = \text{क २२५}$$

यहाँ भी धन ऋण करणी योग “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” इस नियम के अनुसार धन ऋण करणी कट गईं शेष क ३२४ एवं क ९ का योग भी “योगं करणयोर्महती प्रकल्प्य” इस नियम से धन ऋण होने से अन्तर-ही योग होगा इसलिये योग = क २२५ अब इसको भाजक माना। पूर्वगुणनफल में इस गुणनफल का भाग दिया—

$$\begin{array}{r} \text{क २२५} \quad) \quad \begin{array}{l} \text{क ५६२५ क ६७५} \\ \text{क ५६२५} \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} \text{क २५ क ३} \end{array} \right. \\ \hline \text{X क ६७५} \\ \text{क ६७५} \end{array}$$

इसलिये लब्धि क २५ अथवा रु ५ एवं क ३ यह हुई।

द्वितीयोदाहरणे न्यासः—

भाज्यः—क २५६ क ३०० ।

भाजकः—क २५ क २७ ।

अत्र भाजके पञ्चविंशतिकरण्या धनत्वं प्रकल्प्य क २५ क २७ भाज्ये गुणिते धनर्णकरणीनामन्तरे च कृते जातम् क ३०० क १२ । भाजके च क ४ अनया भाज्ये हते लब्धम् क २५ क ३ ।

इदानीं पूर्वोदाहरणे गुण्ये भाजके च कृते न्यासः ।

भाज्यः—क ९ क ४५० क ७५ क ५४ ।

भाजकः—क २५ क ३ ।

अत्रापि त्रिमितकरण्याः ऋणत्वं प्रकल्प्य भाज्ये गुणिते युते च जातम् क ८७१२ क १४५२ । भाजके च क ४८४ । अनया हते भाज्ये लब्धो गुणकः क १८ क ३ ।

पूर्व गुणके खण्डत्रयमासीदिति योगकरणीयम् क १८ विभलेष्या तत्र 'वर्गेण योगकरणी विहता विशुद्ध्येत्' इति नवात्मकवर्गेण विहता सती शुद्ध्यतीति लब्धम् २ नवानां मूलं ३ अस्य खण्डे १।२ अनयोः कृती १।४ पूर्वलब्ध्या २ गुणिते २।८ एवं जातो गुणकः क २ क ३ क ८ ।

इति करणीभजनम् ।

द्वितीय उदाहरण में न्यास—

भाषा—(२) उदाहरण में भाज्य २५६ क ३०० और भाजक क २५ क २७ है, अब यहां भाजक की करणियों में एक करणी का धन ऋण व्यत्यय करने के लिये क २५ को धन मानकर भाज्य को गुणा किया ।

गुण्य = क २५६ क ३००

गुणक = क २५ क २७

क ६४०० क ७५००

क ६९१२ क ८१००

गुणनफल = क १०० क १९ यह हुआ ।

नोट—यहां करणी ६४०० तथा क ८१०० का “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” के नियम से अन्तर ही योग होगा, इसलिये अन्तर के लिये ‘लघ्व्या हतायास्तु पद-मित्यादि’ नियम से मूल ८०,९० हुए इसका अन्तर १० हुआ। इसका वर्ग क १०० हुआ। क ७५०० एवं क ६९१२ इन करणियों में “आदौ करणायवपवर्त्तनीये” इस नियम से ३ का अपवर्त्तन देने से क २५०० क २३०४ हुआ, इनका क्रम से मूल ५० तथा ४८ हुआ, इनका अन्तर २ आया इसका वर्ग ४ हुआ अपवर्त्तनाङ्क से गुणा किया $४ \times ३ = १२$ हुआ इसलिये गुणनफल भाज्यगत क १०० क १२ यह हुआ।

इसी प्रकार भाजक का भी गुणनफल निकाला—

$$\text{अतः गुण्य} = \text{क } २५ \text{ क } २७$$

$$\text{गुणक} = \text{क } २५ \text{ क } २७$$

$$\text{क } ६२५ \text{ क } ६७५$$

$$\text{क } ६७५ \text{ क } ७२९$$

$$\text{गुणनफल} = \text{क } ४ \text{ यह हुआ}$$

यहां पर भी धन ऋण करणियों का अन्तर होने से कट गया। शेष करणियों का योग भी अन्तर ही योग बनेगा, इसलिये क ६२५ क ७८९ का क्रम से मूल २५। २७ हुए अन्तर २ हुआ इसका वर्ग क ४ हुआ। इससे भाज्य में भाग दिया—

भाजक

भाज्य

लब्धि

क ४)

क १०० क १२
क १००

(क ५ क ३

क १२

क १२

अब विद्वेषसूत्र के समन्वय के लिये प्रथम उदाहरण का न्यास करते हैं

(१) प्रथम उदाहरण में क ९ क ४५० क ७५ क ५४ यह भाज्य और क २५ क ३ यह भाजक माना इसमें क ३ को ऋण मानकर पूर्वोक्तविधि से किया की—

$$\text{गुण्य} = \text{क } ९ \text{ क } ४५० \text{ क } ७५ \text{ क } ५४$$

$$\text{गुणक} = \text{क } २५ \text{ क } ३$$

$$\text{क } २२५ \text{ क } ११२५० \text{ क } १८७५ \text{ क } ११५०$$

$$\text{क } २७ \text{ क } १३५० \text{ क } २२५ \text{ क } १६२$$

$$\text{गुणनफल} = \text{क } ८७१२ \text{ क } १४५२$$

नोट—यहां भी समान करणियों का “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” इस नियम से अन्तर करने पर शेष कुछ नहीं रहा—

क ११२५० क १८७५ क २७ क १६२ ये करणी जो बाकी हैं इनमें क १८७५ एवं क २७ तथा क ११२५० तथा क १६२ का योग होने से क १४५२ क ८७१२ यह भाज्यगतमान हुआ ।

इसी प्रकार भाजक का साधन किया—

$$\begin{array}{r} \text{गुण्य} = \text{क } २५ \text{ क } ३ \\ \text{गुणक} = \text{क } २५ \text{ क } ३ \\ \hline \text{क } ६२५ \text{ क } ७५ \\ \text{क } ७५ \text{ क } ६ \end{array}$$

$$\text{गुणनफल} = \text{क } ४८४$$

यहां क ७५ तथा क ७५ ये दोनों तो कट गईं बाकी क ६२५ तथा क ६ का अन्तर ही योग हुआ सो क ४८४ यह हुआ । भाजक में एक ही करणी रह गई इसलिये यह नूतन भाजक माना गया—

भाजक ।

भाज्य ।

लब्धि ।

क ४८४)

क ८७१२ क १४५२
क ८७१२

(क १८ क ३

$$\begin{array}{r} \times \text{ क } १४५२ \\ \text{क } १४५२ \end{array}$$

नोट—क १८ क ३ यह जो लब्धि आई है इसमें क १८ यह योगज करणी है क्योंकि पहिले उदाहरणमें भी इसका मान आया है । अब विश्लेष सूत्र से पृथक् करण किया—इसलिये क १८ में ९ का भाग दिया लब्धि २ आई अब ९ का मूल ३ हुआ इसके दो खण्ड किये १।२ इनका वर्ग किया क्रम से १।४ हुआ पूर्व लब्धि २ से गुणा किया २।८ क्रम से हुए ये ही खण्ड योगज करणी १८ के खण्ड हुए इसलिए उत्तर = क २ क ३ क ८ यह हुआ । करणी का भाग-हार समाप्त हुआ—

करणि वर्गादेरुदाहरणम्—

द्विकत्रिपञ्चप्रमिताः करण्यस्तासां कृतिं त्रिद्विकसंख्ययोश्च ।

षट्पञ्चकत्रिद्विकसंमितानां पृथक् प्रथङ्मे कथयाशु विद्वन् ॥१४॥

अष्टादशाष्टद्विकसंमितानां कृतीकृतानां च सखे पदानि ।

न्यासः । प्रथमः क २ क ३ क ५ । द्वितीयः क ३ क २ ।

तृतीयः क ६ क ५ क ३ क २ । चतुर्थः क १८ क ८ क २ ।

“स्थाप्योऽन्त्यवर्गश्चतुर्गुणान्त्यनिघ्नाः” इत्यनेन ‘गुण्यः पृथग्गुणक-
खण्डसम’ इत्यनेन वा जाताः क्रमेण वर्गाः ।

प्रथमः रू १० क २४ क ४० क ६० । द्वितीयः रू ५ क २४ ।

तृतीयः रू १६ क १२० क ७२ क ६० क ४८ क ४० क २४ ।

अत्रापि करणीनां यथासंभवं योगं कृत्वा वर्गवर्गमूले कार्ये । तद्यथा
क १८ क ८ क २ ।

आसां योगः क ७२ । अस्या वर्गः क ५१८ अस्या मूलम् रु ७२ ।

इति करणी वर्गः ।

करणी के वर्ग आदि का उदाहरण—

भाषा—क २ क ३ क ५, क ३ क २, क ६ क ५ क ३ क २ और क १८
क ८ क २ इनका पृथक् पृथक् वर्ग कहो तथा वर्गमूल कहो ।

यहां करणी के वर्ग में यद्यपि “स्थाप्योऽन्त्यवर्गो द्विगुणान्त्यनिघ्ना” व्यक्तगणित
के इस नियम से ही वर्ग होता है केवल “अपरेऽङ्का द्विगुणान्त्यनिघ्ना” के स्थान में
“अपरेऽङ्काश्चतुर्गुणान्त्यनिघ्नाः” करना चाहिये क्योंकि यह विषय करणी के प्रकरण
में “वर्गेण वर्गं गुणयेद्भजेच्च” इसकी टिप्पणी में कह भी दिया है ।

इसलिये करणी के वर्ग में उसको चौगुना करके और अङ्कों को गुणन करना
होता है । इसके लिये क्रम से न्यास—

न्यास (१) क २ क ३ क ५ इसको वर्ग करना है अब यहाँ तीनों
करणियों का योग $(२ + ३ + ५) = १०$ होता है यह करणी न मानकर रू १०
मानना होगा और सबों को चौगुना करके और अङ्कों को गुणना चाहिये । तब
करणी का वर्ग होगा—जैसे—

क २ क ३ क ५

क ४ क २४ क ४०

क ९ क ६०

क २५

रू १० क २४ क ४० क ६०

यह क २ क ३ क ५ राशिका वर्ग हुआ—इससे यह सिद्धान्त बना कि जिन जिन करणी राशियों का मूल पूरा मिलता है उन मूलों का योगरूप लिख देते हैं क्योंकि “स्थोप्योऽन्त्य वर्गश्चतुर्गुणान्त्यनिघ्नाः करने में, जिन जिन करणियों का वर्ग होगा उनका तो पूरा पूरा वर्गमूल मिलेगा बाकी चतुर्गुणान्त्यनिघ्ना करने से जो करणी बनेगी वे ज्यों के त्यों वर्ग के स्वरूप में आवेंगी इसलिये उपरोक्त उदाहरण में क ४ क ९ क २५ के मूल क्रम से २, ३, ५, मिला इनका योग रु १० लिखा। क २४ क ४० क ६० ये वर्ग की करणी हुई।

न्यास (२)

क ३ क २

क ९ क २४

क ४

रु ५ क २४ यह ही क ३ क २ का वर्ग हुआ—

न्यास (३)

क ६ क ५ क २ क ३

क ३६ क १२० क ४८ क ७२

क २५ क ४० क ६०

क ४ क २४

क ९

रु १६ क १२० क ७२ क ६० क ४८ क ४० क २४

यह वर्ग हुआ—

करणीमूले सूत्रं वृत्तद्वयम्—

वर्गे करण्या यदि वा करण्यो—

स्तुल्यानि रूपाण्यथवा बहूनाम् ।

विशोधयेद्रूपकृतेः पदेन—

शेषस्य रूपाणि युतोनितानि ॥ १९ ॥

पृथक् तदर्धे करणीद्वयं स्या—

न्मूलेऽथ बह्वी करणी सप्तोऽर्या ।

रूपाणि तान्येकमनतोऽपि भूयः

शेषाः करण्यो यदि सन्ति वर्गे ॥ २० ॥

व्याख्या—वर्गे ज्ञाते सति कस्यायं वर्गः इति ज्ञानार्थमाह । वर्गे करण्यस्तुल्यानि, करण्योर्वा तुल्यानि, बहूनां करणीनां वा तुल्यानि रूपाणि रूपकृतेर्विशोधयेत् । अत्र रूपग्रहणं योगवियोगयोः “योगं-करण्योर्महतीं प्रकल्प्य इत्यादि प्रकारस्य व्यावृत्त्यर्थम् । शेषस्य पदेन रूपाणि पृथग् युतो नितानि कृत्वा तदर्धे कार्ये, मूले तत्करणीद्वयं भवति । यदि पुनर्वर्गे शेषाः करण्यः सन्ति तर्हि तयोर्मूलकरण्योर्मध्येऽल्पा सा मूलकरणी, या महती तानि रूपाणि प्रकल्प्य अतो रूपेभ्योभूयोऽप्येवम् । करण्यस्तुल्यानि रूपाणि रूपकृतेर्विशोधयेदित्यादिना पुनरपि मूलकरणीद्वयं स्यात् पुनरपि यदि शेषाः करण्यो भवेयुस्तदैवमेव पुनः कुर्यात् । अत्र महती रूपाणीत्युपलक्षणम्, कचिन्महती मूलकरणी अल्पा तुल्यरूपाणीति द्रष्टव्यम् वक्ष्यतिचाचार्यः ॥ १९ ॥ २० ॥

प्रथम वर्गस्य मूलार्थं न्यासः—

रू १० क २४ क ४० क ६० ।

रूपकृतेः १०० चतुर्विंशति चत्वारिंशत् करण्यस्तुल्यानि रूपाण्यपास्य शेषम् ३६ अस्य मूलम् ६ अनेनोनाधिकरूपाणामर्धे जाते २।८ अत्रापीयं २ मूलकरणी द्वितीयां रूपाण्येव प्रकल्प्य पुनः शेषकरणीभिः स एव विधिः कार्यः । तत्रेयं रूपकृतिः ६४ अस्याः षष्टिरूपाण्यपास्य शेषम् ४ अस्य मूलम् २ अनेनोनाधिकरूपाणामर्धे ३।५ जाते मूलकरण्यौ क ३ क ५ । मूलकरणीनां यथाक्रमं न्यासः क २ क ३ क ५ ।

द्वितीयवर्गस्य न्यासः—

रू ५ क २४ । रूपकृतेः २५ करणीतुल्यानि रूपाणि २४ अपास्य शेषम् १ अस्य मूलेनोनाधिकरूपाणामर्धे जाते मूलकरण्यौ क २ क ३ ।

तृतीय वर्गस्य न्यासः—

रू १६ क १२० क ७२ क ६० क ४८ क ४० क २४ ।

रूपकृतेः २५६ करणीत्रितयस्यास्य ‘क ४८ क ४० क २४’

तुल्यानि रूपाण्यपास्योक्तवज्जाते खण्डे २।१४ महतीरूपाणीत्यस्याः १४ कृतिः १९६ अस्याः करणीद्वयस्यास्य 'क ७२ क १२०' तुल्यानि रूपाण्यपास्योक्तवज्जाते खण्डे ६।८ पुनः रूपकृतेः ६४ षष्टिरूपाण्यपास्योक्तवत्खण्डे ३।५ एवं मूलकरणीनां यथाक्रमं न्यासः क ६ क ५ क ३ क २ ।

चतुर्थ वर्गस्थ न्यासः—

रु ७२ । इयमेव लब्धा मूलकरणी ७२ । पूर्वं खण्डत्रयमासीदिति वर्गेण योगकरणी विहता विशुद्ध्येत् इति षट्त्रिंशता विहता शुद्ध्यतीति षट्त्रिंशतो मूलम् ६ । एतस्य खण्डानां १।२।३ । कृतयः १।४ । ९ पूर्व-लब्ध्यानया २ क्षुण्णाः २।८।१८ एवं पृथक्करण्यो जाताः क २ क ८ क १८ ।

अत्रोपपत्तिः

$$(\sqrt{अ} + \sqrt{ब})^2 = अ + \sqrt{४ अ \cdot ब} + ब$$

$$\therefore (\sqrt{अ} + \sqrt{ब})^2 = अ + ब + \sqrt{४ अ \cdot ब}$$

$$\text{एवमेव } (\sqrt{अ} + \sqrt{ब} + \sqrt{क}) = अ + ब + क + \sqrt{४ अ \cdot ब} + \sqrt{४ अ \cdot क} + \sqrt{४ ब \cdot क}$$

एवमग्रेऽपि अत्र रूपं हि मूल करण्योः करणीनां वा योगोऽस्ति । करण्यश्च मूलकरण्योः मूलकरणीनां वा चतुर्घातात्मिकाः सन्ति ।

तथा चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्यचान्तरं राश्यन्तरवर्गतुल्यं भवति तेन करणी-योगतुल्यरूपवर्गे करण्योस्तुल्या निरूपाण्यपास्य शेषमन्तरवर्ग एवावशिष्यते तत्रमूलं-गृहीत्वा संक्रमणेनोपपत्तिः सुगमा ।

यद्यनेकाः करण्य अपेक्षितास्तदानया क्रियया तु केवलं करणीद्वयं तत्र स्वल्पातु वस्तुतो निर्दिष्टा करणी किन्तु बह्वी करणी शेष करणीयोगरूपा अतस्तामेव रूपं प्रकल्प पुनः क्रिया कार्येत्युपपन्नं सर्वम् ।

भाषा—पहिळे किये हुए वर्गों के मूल के लिये उदाहरण बतलाते हैं ।

(१) रु १० क २४ क ४० क ६०, इसका वर्गमूल निकालना है अब

यहाँ रु १० का वर्ग = १०० हुआ। यहाँ पर एक करणी के तुल्य रूप घटाने से मूल नहीं मिलता है और तीनों करणियों का अधिक हो जाता है घट नहीं सकता इसलिये दो करणी के तुल्य रूप घटाना ठीक हुआ—अतः क २४ क ४० अथवा क २४ क ६० अथवा क ४० क ६० का अर्थात् दो-दो के योग के तुल्य रूप घटता है। यहाँ पर अब क २४ क ४० के योग को रूप मान कर घटा कर मूल का साधन करते हैं। इसलिये रु १० का वर्ग १०० हुआ इसमें दोनों का योग ६४ घटाने से ३६ शेष बचा इसका मूल ६ हुआ इसको रु १० में जोड़ने और घटाने से क्रम से १६ और ४ हुए इनका आधा ८। २ हुआ इस तरह मूल में दो करणी आईं। उधर वर्ग राशि में एक करणी और बाकी है इसलिये यहाँ की बड़ी करणी ८ को रूप माना इसका वर्ग किया ६४ हुआ इसमें शेष क ६० को रूप मानकर घटाया शेष ४ हुआ इसका मूल २ हुआ इसको रु ८ में जोड़ा घटाया क्रम से १० और ६ हुए आधे करने पर क्रम से ५ और ३ हुए इस प्रकार मूलकरणि क्रम से क २ क ३ क ५ हुई इसी प्रकार क २४ क ६० को अथवा क ४० क ६० के योग को भी रूप मानकर घटाने से भी वहीं करणी खण्ड होते हैं।

(२) रु ५ क २४ इस उदाहरण में रूप ५ का वर्ग २५ हुआ २४ घटाने से १ बचा, इसका मूल भी १ हुआ इसको रु ५ में जोड़ा घटाया ६। ४ हुआ, आधा किया ३। २ हुए इसलिए मूलकरणि, क २ क ३ हुई।

(३) रु १६ क १२० क ७२ क ६० क ४८ क ४० क २४, इस उदाहरण में भी रु १६ का वर्ग किया २५६ हुआ, इसमें क १२० क ७२ क ४८ के योग के समान रूप घटाने से १६ शेष बचा इसका मूल ४ हुआ इसको रूप में जोड़ा घटाया = २०। १२ क्रम से हुए। आधा किया १०। ६ हुए इनमें क ६ मूलकरणि का एक खण्ड हुआ क १० को रूप माना फिर वर्ग किया १०० हुआ इसमें क ६० और क ४ के योग के तुल्य घटाया १६ शेष यहाँ भी रहा इसका मूल ४ हुआ। इसको रु १० में जोड़ा घटाया क्रम से १४। ६ हुए। इनका आधा ७। ३ हुआ इसलिये क ३ यह मूल की करणी का दूसरा खण्ड आया क ७ को फिर रूप माना इसका वर्ग किया ४९ हुआ इसमें क ४० को रूप मानकर घटाया ९ शेष रहा मूल लिया ३ हुआ रु ७ में जोड़ा घटाया १०। ४ हुए आधा किया ५। २ हुए अब वर्गराशि में कोई करणी न रहने से ये दोनों करणी खण्ड क ५। क २ भी मूलकरणि के खण्ड हुए इसलिये सब मूलकरणि के खण्ड क ६ क ३ क ५ क २ हुए अतः मूलकरणि = क ६ क ३ क ५ क २।

(४) रु ७२ क ० इस उदाहरण में रु ७२ का वर्ग किया ५१८४ हुआ इसमें करणी ० को रूप मानकर घटाने से ५१८४ ही रहा इसका मूल लिया रु ७२ ही हुआ इसको रु ७२ में घटाने और जोड़ने से ०। १४४ हुए इनका आधा ० तथा ७२ ही हुआ, इस प्रकार यहां मूलकरणी ७२ ही सिद्ध हुई अब यह क ७२ योग करणी है, इसलिये इसको “वर्गेण योगकरणी विहता विशुद्ध्येत्” इस विश्लेष सूत्र से इसका पृथक् २ मान निकालना चाहिये। इसलिये क ७२ में ३६ वर्गाङ्क का भाग देने से लब्धि २ आई और भाजक ३६ का वर्गमूल ६ हुआ इसके तीन खण्ड ३।२।१ किये और इनके वर्ग को पहिले जो २ लब्धि मिली थी उससे गुण देने से क १८ क ८ क २ हुए क्योंकि उपरोक्त ३।२।१ खण्डों के वर्ग ९।४।१ होते हैं २ से गुणने पर क १८ क ८ क २ मान हुए ये ही पूर्वकरणी खण्ड हुए।

अथ वर्गतर्णकरण्या मूलानयनार्थं सूत्रं वृत्तम्

ऋणात्मिका चैत्करणी कृतौस्याद्विनात्मिकां तां परिकल्प्य साध्ये ।
मूले करण्यावनयोरभीष्टा क्षयात्मिकैका सुधियावगम्या ॥ २१ ॥

व्याख्या—अथ यदि वर्गराशौ काचित् ऋणकरणीभवेत् तत्र मूलग्रहणे विशेषमाह ।

ऋणात्मिकेति । यदि वर्गे करणी ऋणात्मिका स्यात्तर्हि तामृणात्मिकां करणीं धनात्मिकां परिकल्प्य मूले साध्ये । अनयोर्मूलकरणयोर्मध्येऽभीष्टा एका करणी सुधिया बुद्धिमता नरेण क्षयात्मिका ज्ञेया तत्र वर्गे यद्येकैव क्षयकरणी स्यात् तदा एकस्या मूलकरण्याः क्षयत्वम् । यदि द्वयादयो भवन्ति तदैकस्या द्वयोर्बहूनां वा मूलकरणीनां युक्त्या यथा संभवति तथा क्षयत्वं कल्प्यम् । यत्र वर्गे सर्वा अपि क्षयकरण्यास्तत्रापि सर्वासामपि मूलकरणीनां पक्षे क्षयत्वमवगन्तव्यम् ॥ २१ ॥

अत्रोपपत्तिः ।

$$(\sqrt{अ} + \sqrt{क})^2 = अ + क + \sqrt{४ अक} \text{ तथा}$$

$$(\sqrt{अ} - \sqrt{क})^2 = अ + क - \sqrt{४ अक}$$

अत्र वर्गद्वयेऽपि स्फुटमवलोक्यते यद्वृत्तकरण्योर्माने तथाविध एव तेन ऋणात्मिकां करणीं धनात्मिकां परिकल्प्य मूलं साधनीयं तत्र मूले यथायोग्यैव करणी क्षयात्मिका कल्प्येति ।

वर्गगत ऋणकरणी के मूल का प्रकार—

भाषा—यदि करणी के वर्ग में कोई ऋण करणी होवे तो उसको धन मानकर “वर्गे करण्य यदि वा करण्योः” इस नियम के अनुसार जब दो मूलकरणी होवे उन दोनों मूलकरणियों में एक को ऋण मान लेना चाहिये इसका यह आशय हुआ कि वर्गराशि में कई एक करणी ऋणगत होवे तो मूल करणियों में से जिस करणी का ऋण होना संभव हो उसे ऋण कल्पना करो और जो वर्ग में दो तीन करणियां ऋण होवे तो मूल करणियों का ऋणात्मक भी मान बुद्धिमान व्यक्ति को जैसी स्थिति होवे उसके अनुसार ऋण मानना चाहिए ।

उदाहरणम्—

त्रिसप्तमित्योर्वद मे करण्योर्विश्लेषवर्गं कृतितः पदं च ।

न्यासः—क ३ क ७ । यद्वा क ३ क ७ । अनयोर्वर्गः समएव रू १० क ८४ । अत्र वर्गे ऋणकरण्या धनत्वं प्रकल्प्य प्राग्वल्लब्ध-करण्योरेकाऽभीष्टा ऋणगता स्यादिति जातम् क ३ क ७ । क ३ क ७ ।

उदाहरणम्—

द्विकत्रिपञ्चप्रमिताः करण्यः स्वस्ववर्णगा व्यस्तधनवर्णगा वा ।
तासां कृतिं ब्रूहि कृतेः पदं च चेत् षड्विधं वेत्ति सखे करण्यः ॥

न्यासः—क २ क ३ क ५ । वा क २ क ३ क ५ । आसां वर्गः समएव जातः रू १० क २४ क ४० क ६० ।

अत्र ऋणकरण्योस्तुल्यानि धनरूपाणि १०० । रूपकृतेः १०० अपास्य शेषस्य मूलम् ० । अनेनोनाधिकरूपाणामर्थे क ५ । क ५ अत्रैका ऋणम् क ५ अन्या रूपाणीति ।

न्यासः—५ क २४ । पूर्ववज्जाते करण्यौ धने एव क ३ क २ । यथाक्रमं न्यासः क २ क ३ क ५ ।

अथवाऽनयोः क २४ क ६० तुल्यानि धनरूपाणि ८४ रूप-कृतेः १०० अपास्योक्तवज्जाते मूलकरण्यौ क ७ क ३ अनयो-र्महती ऋणं क ७ । तान्येव रूपाणि प्रकल्प्य रू ७ क ४० अतः

प्राग्वत्करण्यौ क ५ क २ । अनयोरपि महती ऋणमिति यथाक्रमं
न्यासः क ३ क २ क ५ ।

अथ द्वितीयोदाहरणे—

प्राग्वत्प्रथमपक्षे मूलकरण्यौ क ५ । क ५ अनयोरेका ऋणं क ५
तान्येव रूपाणीति ऋणोत्पन्ने करणी खण्डे ऋणे एवेति यथाक्रमं
न्यासः क ३ क २ क ५ ।

द्वितीयपक्षेणापि यथोक्ता एव मूलकरण्यः क २ क ३ क ५ एवं
बुद्धिमताऽनुक्तमपि ज्ञायत इति ।

आधा—करणि तीन, करणी सात के अन्तर का वर्ग कहो फिर उस वर्ग का
वर्गमूल कहो । करणी दो, करणी तीन, करणी पांच ऋण अथवा करणी दो
ऋण, करणी तीन ऋण, करणी पांच धन इनका वर्ग बताओ तथा वर्ग का
वर्गमूल बताओ—

(१) क ३ क ७ । अथवा क ३ क ७ इनका वर्ग समान ही हुआ वर्ग =
रू १० क ८४ अब इस वर्ग का वर्गमूल साधन करते हैं । रू १० का वर्ग
किया १०० हुआ इसमें क ८४ ऋण के तुल्य रूप मानकर घटाये तो “संशो-
ध्यमानं स्वमृणत्वमेति” इस नियम से १८४ योग हुआ इसका मूल निकाला तो
नहीं पूरा मिला इसलिये क ८४ का धन मानकर रूप वर्ग में घटाया तो शेष
बचा १६ इसका मूल ४ हुआ इसको रूप में जोड़ा तथा घटाया १४ । ६ हुए
इनका आधा ७३ हुए इस प्रकार क ३ क ७ ये मूल करणी सिद्ध हुई इनमें
कोई एक को ऋण कल्पना करने से क ३ क ७ या क ३ क ७ ये करणी हुई ।

(२) क २ क ३ क ५ अथवा क २ क ३ क ५ इनका वर्ग = रू १०
क २४ क ४० क ६० यह बराबर ही होगा इसका वर्गमूल साधन करना है रू १०
का वर्ग १०० हुआ इसमें ४० और ६० के योग को घटाया तो शेष
रहा ० शून्य इसका मूल ० शून्य हुआ इसको रूप में जोड़ा और घटाया तो
१०।१० हुए इनका आधा ५।५ हुआ—इनमें से एक को ऋण माना सो क ५
यह मूल करणी का एक खण्ड हुआ इसी क ५ को रूप माना इसका वर्ग २५
हुआ इसमें क २४ के तुल्यरूप घटाने से शेष १ बचा इसका मूल १ हुआ—
इसको रू ५ में जो घटाया तो ६।४ हुए आधा किया ३।२ हुए यह करणी
हुई ये दोनों धन हुई यदि एक ऋण भी माना जाय तो वर्ग में क २४ धन नहीं

होगी इसलिए क ५ क ३ क २ यह मूल सिद्ध हुआ मूल करणी को धन मानकर गणित करते हैं यहां मूल करणी ५ है दूसरी करणी ५ ऋण है इसको रूप मानकर वर्ग किया २५ हुआ इसमें शेष करणी २४ के तुल्य रूप घटा देने से १ बचा ५ में जोड़ा घटाया ६१४ हुए आधा किया ३०२ हुए यह दोनों करणी ऋण होनी चाहिए क्योंकि एक को ऋण मानने से पूर्व नियम से क २४ धन न होगी, यदि दोनों को ही धन मान लेवे तो पूर्व नियम से क ४० क ६० ये ऋण न होंगी इसलिये क ५ क ३ क २ वही मूल हुआ अथवा रूप के वर्ग में क २४ क ६० के तुल्यरूप घटाने से शेष १६ रहा । इसका वर्गमूल ४ हुआ रूप में जोड़ा घटाया १०१६ आधा किया ५०३ हुए इनमें से क ७ को रूप मान कर वर्ग किया ४९ हुआ इसमें धन करणी ४० घटाने से ९ शेष रहा वर्गमूल तीन हुआ इसको रूप में जोड़ा घटाया १०१४ हुए आधा किया ५०२ हुए इनमें ५ को ऋण मानने से क ३ क २ क ५ यह मूल सिद्ध हुआ—इसी प्रकार रूप के वर्ग में क २४ क ४० के योग के समान रूप घटाने से शेष ३६ बचा इसका मूल ६ हुआ इसको रूप में जोड़ा घटाया १६१४ हुए आधा किया ८०२ हुए इनमें से क ८ को रूप माना वर्ग किया ६४ हुआ ६० क को रूप मानकर घटाया शेष ४ बचे मूल लिया २ हुए ८ रूप में जोड़ा घटाया १०१६ हुए आधा किया ५०३ हुए इसलिये क २ क ३ क ५ ये मूल करणी सिद्ध हुई । इस प्रकार बुद्धिमान् सब जगह समझासकते हैं ।

पूर्वैर्नायमर्थो विस्तीर्योक्तो बालावबोधार्थं तु मयोच्यते ।

एकादिसंकलितमितकरणीखण्डानि वर्गराशौ स्युः ।

वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्यरूपाणि ॥२०॥

करणीषट्के तिसृणां दशसु चतसृणां तिथिषु च पञ्चानाम् ।

रूपकृतेः प्रोक्तं पदं ग्राह्यं चेदन्यथा न सत् क्वापि ॥२१॥

उत्पत्त्यमानयैवं मूलकरण्याऽल्पया चतुर्गुणया ।

यासामपवर्त्तः स्याद्रूपकृतेस्ता विशोऽध्याः स्युः ॥२२॥

अपवर्त्तादिपिलब्धा मूलकरण्यो भवन्ति ताश्चापि ।

शेषविधिना न यदि ता भवन्ति मूलं तदा तदसत् ॥२३॥

करणीवर्गराशौ रूपैरवश्यं भवितव्यम् । एककरण्या वर्गे रूपा-
ण्येव, द्वयोः सरूपैका करणी, तिसृणां षट् । पञ्चानां दश, षण्णां
पञ्चदश इत्यादि ।

अतो द्वयादीनां करणीनां वर्गेषु एकादिसंकलितमितानि करणीनां
खण्डानि रूपाणि च यथाक्रमं स्युः । अथ यदि उदाहरणे तावन्ति न
भवन्ति तदाऽसौ योगकरणी विश्लेष्या वा भवतीति मूलं ग्राह्यमित्यर्थः ।
वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्यरूपाणीति स्पष्टार्थम् ।

व्याख्या—अथ “वर्गे करण्या यदि वा करण्यो” रित्याद्युक्तेरनियमेन
करणीशोधने सति मूलाशुद्धिः स्यादिति करणीवर्गे करणीसंख्या नियम-
पूर्वकं शोध्येतिकरणी नियमं निरूपयति । एकादीति—अत्रैकादि संकलित-
मितकरणीखण्डानि वर्गराशौ स्युरित्यनेनैककरण्या वर्ग एका करणी द्वयोः
करणयोर्वर्गे करणीत्रितयं स्यादित्यादि निरूपितं तच्च प्रत्यक्षविरुद्धम्,
अतः स्वयमेव तदर्थं विवृणोति । करणी वर्गराशौ रूपैरवश्यं भवितव्यम् ।
एककरण्या वर्गे रूपाण्येव । द्वयोः सरूपैका करणी । तिसृणां तिस्रश्चतसृणां
षट् पञ्चानां दश षण्णां पञ्चदश । ततो द्वयादीनां करणीनां वर्गेष्वेकादि-
संकलितमितानि करणी खण्डानि यथाक्रमं स्युः । अथ यद्युदाहरणे
तावन्ति न भवन्ति तदा योगकरणीं विश्लेष्य वा तावन्ति कृत्वा
मूलं ग्राह्यमित्यर्थः । वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्यरूपाणि
रूपकृतेः प्रोह्य पदं ग्राह्यमिति यदुक्तं मूले तत्संशोधनं संकलित-
वशेनेति स्पष्टार्थः संकलितञ्च “सैकपदघ्नपदार्धमि”त्यादि पाटीगणिते
उक्तम् । तस्मान्मूले—

रा३।४।५।६।७।८।९।१०।११।१२।१३।१४।१५ करण्यः

१।३।६।१०।१५।२१।२८।३६।४५।५५।६६।७८।९१।१०५

इत्यादीनि करणीखण्डानि वर्गराशौ स्युरित्यत्र-कस्येदं संकलितं यद्वर्गराशौ
विद्यत इति ज्ञात्वा तद्रूपकृतेः विशोध्य पदं ग्राह्यम् । चेदन्यथा तत् कापि
मन्नेति स्पष्टम् । उत्पत्त्यमानयेति । अत्राल्पयेत्युपलक्षणम् । यत्र महती

करणी, अल्परूपाणि तत्र महत्या चतुर्गुणया यासामपवर्त्तः स्यात्ता एव रूपकृतेः विशोध्याः स्युः । आचार्यमते, अल्पत्वं पारिभाषिकं यतोऽस्य सूत्रस्योदाहरणे इमां मूलकरणीं रूपाणि प्रकल्प्यान्ये करणीखण्डे साध्येते सा महती इत्यर्थ इति व्याकरिष्यति । पुनर्नियमान्तरमाह—अपवर्त्त इति । अल्पया कचिन्महत्या वा चतुर्गुणयाऽपवर्त्ते कृते याः करण्यो-लब्धास्ता एव मूलकरण्यो भवन्तीति वस्तुस्थितिः । अथ यदि शेषविधिना मूलेऽथ बह्वी करणी तयोर्येत्यादिना वा न भवन्ति तदा तन्मूलमत्स-दिति ज्ञेयम् ।

भाषा—करणी वर्ग में करणी खण्ड के शोधन का प्रकार । करणी के वर्ग में किसी संख्या के संकलित के तुल्य करणी खण्ड होते हैं । इसलिये करणी वर्ग में यदि तीन करणी खण्ड तो रूप के वर्ग में दो करणी खण्ड घटाकर मूल लेना चाहिये क्योंकि तीन, दो का संकलित है । यदि छ करणीखण्ड हों तो तीन करणीखण्ड घटाकर मूल लेना चाहिये क्योंकि छ, तीन का संकलित है । दश करणीखण्ड हों तो चार करणीखण्ड घटाकर मूल लो जो पन्द्रह हों तो पांच करणीखण्ड घटाकर मूल लो, इस नियम के अतिरिक्त मूल लेना अशुद्ध होगा । इस नियम से जो छोटी मूलकरणी उत्पन्न होगी उसको चतुर्गुण करो और उस चतुर्गुण मूलकरणी का जिन करणीखण्डों में अपवर्त्तन लगे वे रूपवर्ग में घटाने के योग्य हैं, इससे यह स्पष्ट हुआ कि पिछले नियमानुसार करणी खण्डों को रूप के वर्ग में घटाने से जो मूल करणी बनेगी, उससे घटाये हुये करणीखण्ड अवश्य पूरे पूरे कट जायेंगे यदि निःशेष न हों तो मूल अशुद्ध है, यह जानना चाहिये । और घटाये हुए करणी के खण्डों में चतुर्गुण मूलकरणी का अपवर्त्तन देने से जो मूल करणी बनेगी वे शेष-विधि से न आवें तो वह मूल अशुद्ध जानना—इसका यह आशय है कि रूप के वर्ग में एकादि संकलित के नियम से जितने करणी खण्डों का योग घट जाय, घटा दे, फिर घटाने से जो शेष बचे उसका मूल लेकर रूप में जोड़ने घटाने तथा आधा करने से जो दो करणी उपपन्न हूँ उनमें छोटी करणी के चौगुने मान से उन घटी हुई करणियों में भाग देने से जो जो लब्धियाँ आवे वे ही शेष-विधि से अर्थात् (आई हुई जो मूल की दो करणी है उनमें जो बड़ी है उसको रूप मानकर पहिले ही नियम के अनुसार वर्गादि करने पर शेष करणियों को घटा कर फिर मूल लेकर रूप में घटाने तथा जोड़ने से आधा करने पर वे ही करणी आ जावे तो वह शुद्ध जानना नहीं तो अशुद्ध ही जानना चाहिये ।

अत्रोपपत्तिः

$\sqrt{k} + \sqrt{x} + \sqrt{g} + \sqrt{b} + \sqrt{y} + \sqrt{l}$ सन्ति करणीखण्डानि । अस्या-
मवस्थायां “स्थाप्योऽन्त्यवर्गश्चतुर्गुणान्त्यनिघ्नाः” इत्यादिना प्रथमं प्रथमस्या वर्ग-
स्ततश्चतुर्गुणप्रथमकरणीगुणिताः प्रथमातिरिक्ताः करण्योऽर्थात्तत्र रूपोनकरणीसंख्या-
तुल्याः करण्यस्ततो द्वितीयकरण्या वर्गः ततश्चतुर्गुणद्वितीयकरणीगुणिता द्वयूनकरणी-
संख्यकाः करण्यः । एवमेव तृतीयकरण्या वर्गस्ततश्चतुर्गुणतृतीयकरणीगुणितास्त्रयून-
करणीसंख्यकाः करण्यः सिद्धाः ।

यथा वर्गकरणी संख्याः—

प - १ । प - २ । प - ३ । प - ४ । प - (प - १)
एतासां योगः करणीमानानि = प - १ + प - २ + प - ३ + प - ४
प - (प - १) अत्रायखण्डानां रूपोनपदस्थानस्थितपदानां योगः = प (प - १)

द्वितीयखण्डानां व्यक्तानामृणात्मकानां योगो रूपोनपदस्य संकलितसमस्तेन—
करणीमानानि = प (प - १) - $\frac{प (प - १)}{२} = \frac{२प (प - १) - प (प - १)}{२}$

$$= \frac{प (प - १)}{२} = \frac{(प - १ + १) (प - १)}{२}$$

$$\therefore \frac{(प - १ + १) (प - १)}{२} = \text{रूपोनपदसंकलितसमानम्} ।$$

अतो द्वाद्यादीनां करणीनां वर्गे एकादिसंकलितमितकरणीखण्डानि भवन्तीति
साधूक्तम् ।

एककरण्याः वर्गे रूपाण्येव भवन्ति । द्वयोः करण्योर्वर्गे एका करणी भवति ।
एवं तिसृणां करणीनां वर्गे तिस्रः करण्यो भवन्ति । चतसृणां करणीनां वर्गे षट्
करण्यः । एवं पञ्चानां करणीनां वर्गे दश करण्यो भवन्ति ।

अत्रेदमवधेयम् यत् करण्याः वर्गराशौ यद्येकैव करणी तर्हि रूपकृतेः सैव
विशोष्या । यदि च वर्गात्मिके राशौ करणीत्रयं भवेत्, तदा मूलेऽपि करणीत्रयं =
(१ + २) अत्र प्रथमं एकां विहाय करणीद्वययोगसममानं रूपकृतेः विशोष्यम् ।
यदि च तत्र वर्गे करणीषट्कं भवेत्, तदा मूले करणी चतुष्टयं = (१ + ३) एकां
विहाय त्रयाणां योगसमं शोष्यम् । यदि वर्गे करणीदशकं तदा तन्मूले
करण्यषड्विधत्वात् = (१ + ४) प्रथमाभेदैकां विहाय चतुःकरण्ययोगरूपं मानं

रूपकृतेः शोध्यम् * । अतः “वर्गेकरणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्यरूपाणि । करणी-
षट्के तिसृणां दशसु चतसृणामित्यारम्य चेदन्यथा न सत् क्वापीत्यन्तमुपपन्नम् ।

उत्पत्त्यमानयेति—

($\sqrt{k} + \sqrt{x} + \sqrt{g}$)^२ अस्यवर्गेऽत्र “स्थाप्योन्त्यवर्गश्चतुर्गुणान्त्यनिघ्नाः”
इत्यनेन नियमेन—

$k + x + g + \sqrt{4} k x + \sqrt{4} k g + \sqrt{4} x g$ अयं वर्गो जातः ।
अत्र प्रथमं ‘क’ इति प्रथमं खण्डम् ततः ‘ख + ग’ इति च द्वितीयं खण्डम् । अत्र
हि ‘क’ इति लघुराशिः । ‘ख + ग’ इति महद्राशिः ।

$\sqrt{4} x k$ अनेन $\sqrt{4} k x$, $\sqrt{4} k g$ इति खण्डद्वयस्यापवर्त्तनं स्यात्,
अतः “उत्पत्त्यमानयाऽल्पया चतुर्गुणया यासामपवर्त्तः स्याद्रूपकृतेस्ताः विशोध्याः
स्युरित्युपपन्नम् ।

अपवर्त्तादपि लब्धेति—

$k + x + g + \sqrt{4} k x + \sqrt{4} k g + \sqrt{4} x g =$ अत्र वर्गे उप-
र्युक्तोपपत्तौ प्रथमं खण्डम् यल्लघुराशिमानं कल्पितम् तत्खण्डं नोच्छेद्युः खण्डम् अर्था-
दस्मादेवात्यं शेषकरणीयोगमानं सम्भवेत् तदा “मूलेऽथ बह्वी करणी तयोर्या”
इत्यनेन मूले लघुकरणी उपपत्त्या सिद्धयति । अतोहि “अल्पया चतुर्गुणयैवेति
नियमो न अपि तु कचिन्महत्याऽपि” अत्र हि $\sqrt{4} k$ अनया याः याः कर-
ण्योऽपवर्त्तिताः भवन्ति तास्ता एव शोधनीयाः स्युः । $\sqrt{4} k$ अनया अपवर्त्तितासु तासु
ख, ग इति भवति । यथेतन्मितं मानं “विशोध्यैद्रूपकृतेः पदेन” इत्यादिना
शेषविधिना, नागमिष्यति तदा तन्मूलमसत् इति विज्ञेयम् ।

अतएव “अपवर्त्तादपि लब्धा मूलकरण्यो भवन्ति ताश्चापि । शेषविधिना न
यदि ता भवन्ति मूलं तदा तदसत्” इति सूत्रं सम्यगुपपन्नं भवति ।

इति करणीवासना समाप्ता ।

* सं० यतो रूपाणि करणीयोगस्तस्य वर्गो युतिवर्गः तत्र प्रथमकरण्याः पृथकरणे प्रथमकरण्यो
शेषकरणीषातश्चतुर्गुणः शोध्योऽन्तरवर्गार्थम् । एवं करणीपञ्चवर्गं करणीदशको प्रथमकरण्याः
पृथकरणे प्रथमकरणी-शेषकरणीचतुष्टयषातश्चतुर्गुणः शोध्य इति चतस्र एवं करण्यः शोध्याः
अतो वर्गस्य यावन्ति करणीखण्डानि मूलानि एकोनस्य तत्खण्डस्य तुल्याः करण्यः प्रथमं
शोध्या इति ।

उदाहरणम्—

वर्गे यत्र करण्यो दन्तैः सिद्धैर्गजैर्मिता विद्वन् ।

रूपैर्दशभिरुपेताः किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात् ॥ १ ॥

न्यासः—रू १० क ३२ क २४ क ८ । अत्र वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्यैव तुल्यानि रूपाणि प्रथमं रूपकृतेरपास्य मूलं ग्राह्यं पुनरेकस्या एवं क्रियमाणेऽत्र पदं नास्तीत्यतोऽस्य करणीगतमूलाभावः । अथानियमेन सर्वकरणितुल्यानि रूपाण्यपास्य मूलमानीयते तदिदम् क २ क ८ समागच्छति इदमसद् यतोऽस्य वर्गोऽयं रू १८ । अथवा दन्तगजमितयोर्योगं कृत्वा रू १० क ७२ क २४ आनीयते तदिदमप्यसत् रू २ क ६ ।

व्याख्या—हे विद्वन् यत्र वर्गे करण्यः दन्तैः द्वात्रिंशता, सिद्धैः चतुर्विंशत्या, गजैरष्टभिः, मिताः संमिताः सन्ति । किं भूता दशभिरूपैः उपेताः युक्ताः सन्ति, तस्य वर्गस्य मूलं किं स्यादिति ब्रूहि ।

भाषा—जिस वर्ग में रूप दस के सहित करणी बत्तीस, करणी चौबीस और करणी आठ हैं उसका क्या मूल होगा ।

यहां करणी के वर्ग में करणी खण्ड तीन हैं, इसलिये रूप के वर्ग में पहिले दो करणी खण्ड के तुल्य रूप घटाकर मूल लेना चाहिये, बाद में एक करणी खण्ड के समान रूप घटाकर मूल निकालना चाहिये । परन्तु इस नियम से पूरा मूल नहीं आता । अनियम से तीनों करणियों के योग तुल्य रूप घटाने से शेष का मूल पूरा आता है जैसे रू १० का वर्ग १०० हुआ इसमें क ३२ क २४ क ८ के योग ६४ को घटाने से शेष ३६ रहा, इसका वर्गमूल ६ हुआ, इसको रू १० में जोड़ने घटाने से १६ । ४ हुए आधा किया क ८ क २ हुए यह मूल हुआ, परन्तु यह मूल शुद्ध नहीं है, क्योंकि इसका वर्ग रू १८ होता है । क्योंकि रू १० में क ६४ को जो कि रू ८ के समान है जोड़ने से रू १८ ही होता है । अथवा क ३२ एवं क ८ का योग "लब्ध्या हतायास्तु पदं महत्या" इस रीति से योग करने से वर्ग हुआ रू १० क ७२ क २४ अब रूपकृति १०० में क ७२ और क २४ के तुल्य रूप घटाने से शेष ४ बचे मूल लिया २ आये इसे रू १० में जोड़ने तथा घटाने से १२ और ८ हुए इनका आधा ६ और ४ हुए यह मूल हुआ । परन्तु यह भी मूल ठीक नहीं है क्योंकि इसका वर्ग रू १० क ९६ होता है ।

उदाहरणम्—

वर्गे यत्र करण्यस्तिथिविश्वहुताशनैश्चतुर्गुणितैः ।

तुल्या दशरूपाढ्याः किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात् ॥ २ ॥

न्यासः—रू १० क ६० क ५२ क १२ ।

अत्र किल वर्गे करणीत्रयमस्तीति तत्करणीद्वयस्य द्विपञ्चाशद् द्वादशमितस्य क ५२ क १२ तुल्यरूपाण्यपास्य ये मूलकरण्या-
वुत्पद्येते क ८ क २ । तयोरल्पयाऽनया २ चतुर्गुणया ८ द्विपञ्चाशद्
द्वादशमितयोरपवर्तो न स्यादतस्ते न शोध्ये यत उक्तमुत्पत्त्यमानयैव-
मित्यादि । अत्राल्पयेत्युपलक्षणं तेन कचिन्महत्याऽपि तदा मूलकरणीं
रूपाणि प्रकल्प्यान्त्ये करणी खण्डे साध्ये सा महती प्रकल्प्येत्यर्थः ।
तथा कृते मूलम् क २ क ३ क ५ । इदमप्यसद्यतोऽस्य वर्गोऽयम्
रू १० क २४ क ४० क ६० ।

व्याख्या—यत्र करण्याः वर्गे तिथि पञ्चदश, विश्व त्रयोदश, हुताशन
करणौत्रयं. एतदपि पृथक् पृथक् चतुर्गुणितम् यानि मानानि तानि
करण्यावर्गे सन्ति तत्र च दशरूपैरपि युक्ताः करण्यः सन्ति तदा एतस्याः
करण्या वर्गमानस्य वर्गमूलं किं स्यादिति ब्रूहि—

भाषा—जिस करणी के वर्ग में रू १० के सहित करणी साठ करणी बावन
और करणी बारह हैं उनका मूल क्या होगा—अब यहाँ इसका वर्गमूल निकालनेके
लिये 'वर्गे करणीत्रितये करणीद्वितयस्य तुल्यरूपाणि' इस नियम से वर्गमूल
नहीं आता जबतक "उत्पत्त्यमानयाऽल्पया चतुर्गुणया" इस नियम से क्रिया
नहीं की जायगी, तबतक मूल न मिलेगा, इससे यह आशय स्पष्ट है कि करणी
के मूल लेने में जितने नियम बतलाये उनके अनुसार क्रिया करने पर भी जिस
करणौ वर्ग का मूल न आवे तो वह वर्ग अशुद्ध ही जानना चाहिये । अब यहाँ
रू १० क ६० क ५२ क १२ यह दर्गराशि है, यहाँ तीन करणी खण्ड हैं ।
इसलिये रूपके वर्ग १०० में क ५२ और क १२ के योग के समान रूप घटाये
तो ३६ शेष बचे, मूल लिया ६ हुआ रू १० में जोड़ा घटाया १६ । ४ हुए
आधा किया ८ । २ हुए इनमें मूलकरणी २ हुई क ८ को रूप माना
फिर रूप का वर्ग किया ६४ हुआ शेष करणी ६० घटाया ४ बचा, इसका मूल

लिया २ हुआ इसको रूप ८ में जोड़ा घटाया १० हुआ ६ हुआ आधा किया ५।३ हुआ, इस प्रकार क २ क ३ क ५ ये मूलकरणी हुई, परन्तु यह वर्गमूल भी ठीक नहीं है। यद्यपि यह नियम के अनुसार ही सिद्ध होता है, परन्तु इस मूल का यदि वर्ग करते हैं तो रू १० क २४ क ४० क ६० यह आता है। इसलिये आचार्य ने “उत्पत्त्यमानया अल्पया चतुर्गुणया यासामपवर्तः स्याद्रूपकृते-स्ताः विशोद्धाः स्युः” ऐसा कहा है, क्योंकि अल्पकरणी यहां क २ है, इसका चौगुना ८ हुआ, इसका क ५२ क १२ जो ये दो शोधितकरणी थीं, इनमें अपवर्तन नहीं लगता है, इसलिये यह मूलप्रश्नोक्त करणी वर्गराशि अशुद्ध है। (वर्गमूल क २ क ३ क ५ का रू १० क २४ क ४० क ६० यह वर्ग ठीक है इसमें अल्पकरणी २ के चौगुने ८ का शोधितकरणी खण्ड में पूरा-पूरा अपवर्तन लग जाता है) परन्तु प्रश्नोक्त वर्गराशि में नहीं, इसलिये वर्गराशि अशुद्ध रही। यहां “स्वल्पयेत्युपलक्षणं क्वचिन्महत्यापि” ऐसा कहा है, इसका यह आशय है कि जिस प्रकार छोटी करणी का चौगुने से जिस प्रकार शोधित करणी खण्डों में अपवर्तन देना कहा है, उसी प्रकार कहीं चौगुनी बड़ी करणी से भी शोधित खण्डों में भी अपवर्तन लगता है। जिस मूल करणी को रूप मानते हैं वही महती करणी होती है।

उदाहरणम्—

अष्टौ षट्पञ्चाशत् षष्टिः करणीत्रयं कृतौ यत्र ।

रूपैर्दशभिरुपेतं किं मूलं ब्रूहि तस्य स्यात् ॥३॥

न्यासः—रू १० क ८ क ५६ क ६० । अत्राद्यखण्डद्वये क ८ क ५६ । शोधिते उत्पन्नयाऽल्पया चतुर्गुणया तयोः खण्डयोरपवर्तन-लब्धे खण्डे १।७ परं शेषविधिना मूलकरण्यौ नोत्पद्येते अतस्ते खण्डे न शोध्ये अन्यथा तु शोधने कृते मूलं नायातीत्यतस्तदसत् ।

व्याख्या—करण्याः वर्गे अष्टौ षट्पञ्चाशत् षष्टिरिति करणीत्रयं दशरूपैः सहितमस्ति एतस्य वर्गस्य वर्गमूलं किं स्यादिति ब्रूहि ।

भाषा—जिस करणी के वर्ग में रू १० के साथ करणी आठ करणी छप्पन और करणी साठ ये तीन करणी हैं, इनका वर्गमूल क्या होगा—

अब इसके वर्गमूल साधन में रूप के वर्ग १०० में दो करणियों के योग के समान रूप घटाकर (क ५६ क ८ के योग को घटाने से) शेष ३६ हुआ इसका

वर्गमूल ६ हुआ, रूप १० में जोड़ने घटाने से १६।४ हुए आधा किया ८।२ इनमें छोटी करणी क २ हुई बड़ी करणी ८ को रूप माना वर्ग किया ६४ हुआ क ६० को रूप मानकर घटाया ४ शेष रहा—मूल लिया २ हुआ रू ८ में जोड़ा और घटाया १०।६ हुए आधा किया ५।३ हुए, इसलिये क २ क ३ क ५ ये वर्गमूल की करणी हुई परन्तु यह मूल भी अशुद्ध है, क्योंकि यहाँ अल्पकरणि २ का चौगुना ८ हुआ, इसका क ८ क ५६ में अपवर्त्तन देने से १।७ हुई यह दो करणी आई, परन्तु शेषविधिसे क ५ क ३ आती हैं। इसलिये प्रथम रूप वर्ग में क ८ क ५६ का योग घटाना ठीक नहीं हुआ, इसलिये यह नियम बताया कि “शेषविधिना न यदि ताः भवन्ति मूलं तदा तदसत्” अतः इस नियम तथा उपरोक्त नियमों से जो करणीमूल आयगा, वही शुद्ध माना जायगा—

इससे यह सिद्धान्त निश्चित हुआ कि “एकादिसंकलित के नियम से”, तथा “अल्पया चतुर्गुण्या के नियम से एवं शेषविधि के नियम से सबसे समन्वय होकर जो करणी का मूल आवेगा वही मूल शुद्ध माना जायगा, अन्यथा अशुद्ध ही रहेगा।

उदाहरणम्—

चतुर्गुणाः सूर्यतिथीषुरुद्रनागर्त्तवो यत्र कृतौ करण्यः ।

सविश्वरूपा वद तत्पदं ते यद्यस्ति बीजे पटुताभिमानः ॥४॥

न्यासः—रू १३ क ४८ क ६० क २० क ४४ क ३२ क २४ ।
अत्र करणीषट्के तिसृणां करणीनां तुल्यानि रूपाणि प्रथमं रूपकृतेर-
पास्य मूलं ग्राह्यं पश्चाद् द्वयोस्तत एकस्या एवं कृतेऽत्र मूलभावः ।
अथान्यथा तु प्रथममाद्यकरण्यास्तुल्यानि रूपाण्यपास्य पश्चाद् द्वितीय-
तृतीययोस्ततः शेषाणां रूपकृतेर्विशोध्यानीति तन्मूलम् क १ क २
क ५ क ५ । तदिदमप्यसत् यतोऽस्य वर्गोऽयम् रू १३ क ८ क ८०
क १६० । यैरस्य मूलानयनस्य नियमो न कृतस्तेषामिदं दूषणम् ।
एवंविधवर्गे करणीनामासन्नमूलकरणेन मूलान्यानीय रूपेषु प्रक्षिप्य मूलं
वाच्यम् ।

व्याख्या—सूर्यशब्देन द्वादश तिथिशब्देन पञ्चदश इषुशब्देन
पञ्च रुद्रशब्देन एकादश नागशब्देनाष्टौ ऋतुशब्देन षट् संख्याया

ग्रहणम् एतत्संख्यामानं चतुर्गुणितं यत्र करणीवर्गं करणीमानानि सन्ति तच्च करणीवर्गमानं विश्वरूपैरर्थात् त्रयोदशरूपैः युक्तमस्ति तस्य पदं किं स्यादिति वद कथय यदि बीजेऽर्थात् बीजगणिते तव पटुताया चतुरताया अभिमानोऽस्ति ।

भाषा—जिस करणी वर्ग में रूप तेरह करणी अड़तालीस करणी साठ करणी बीस करणी चौवालीस, करणी बत्तीस और करणी चौबीस हैं इसका वर्गमूल क्या होगा कहो यदि बीजगणित में तुमको चतुरता का अभिमान है ।

यहां इस उदाहरण में छ करणी खण्ड हैं, इसलिये तीन करणी खण्ड के योग के समान रूप मानकर घटाने से मूल लेना चाहिये । फिर दो करणी के तुल्य रूप घटाने से फिर इसके बाद में १ एक करणी के तुल्यरूप घटाना चाहिये परन्तु इस प्रकार करने से वर्गमूल नहीं आता, नियम विरुद्ध किया करने से रूप वर्ग १६९ में करणी ४८ के तुल्य रूप घटाने से शेष १२१ बचा मूल लिया ११ हुआ इसको रूप १३ में जोड़ा घटाया २४।२ हुए आधा किया १२।१ हुए इनमें एक छोटी २ करणी मूल को करणी मानी दूसरी बड़ी को रूप माना वर्ग किया १४४ हुआ क ६० क २० के योग ८० को घटाया, ६४ शेष बचा मूल लिया ८ हुआ रूप १२ में जोड़ा घटाया २०।४ हुए आधा किया १०।२ हुए फिर १० इस बड़े खण्ड को रूप माना वर्ग किया, १०० हुआ इसमें क ४४ क ३२ और क २४ के योग को घटाया शेष ० हुआ, इसका वर्गमूल ० शून्य ही हुआ, इसको रूप १० में जोड़ा घटाया १०।१० हुए आधा किया—५।५ हुआ इसलिये क १ क २ क ५ क ५ यह मूल हुआ परन्तु यह भी अशुद्ध है क्योंकि इसका वर्ग रू १३ क ८ क २० क २० क ४० क ४० क १०० यह होता है, इसमें यथा संभव करणी खण्डों का योग करने से रू २६ क ८ क ८० क १६० हुआ । जिन आचार्यों ने मूल के आनयन में नियम नहीं बतलाया उनका यह दोष है । ऐसे स्थल में करणी खण्डों का आसन्न मूल लेकर उसे रूप में जोड़ दो तब उसको मूल कहो—

अथ महतीत्युपलक्षणम् यतः कचिदल्पाऽपि । तत्रोदाहरणम्—

चत्वारिंशदशीतिर्द्विंशतीतुल्याः करण्यश्चेत् ।

सप्तदशरूपयुक्तास्तत्र कृतौ किं पदं ब्रूहि ॥५॥

न्यासः—रू १७ क ४० क ८० क २०० । शोधिते जाते

खण्डे क १० क ७ । पुनः लघ्वीं करणीं रूपाणि कृत्वा लब्धे करण्यौ
क ५ क २ एवं मूलकरणीनां न्यासः क १० क ५ क २ ।

इति करणीषड्विधम् ।

इति षट्त्रिंशत्परिकर्माणि ॥

व्याख्या—कचिदल्पाऽपि रूपाणीत्यत्रोदाहरणम् । चत्वारिंशदिति—
अर्थात् यत्र करण्याः वर्गे चत्वारिंशत्, अशीतिः, द्विशती तुल्याः करण्यः
सप्तदशरूपयुक्ताः सन्ति एतत्कृतौ किं पदं स्यादिति ब्रूहि ।

उदाहरण—

भाषा—जिस वर्ग में रूप सतरह के सहित करणी चालीस करणी अस्सी और
करणौ दो सौ हैं । वहाँ पर क्या मूल होगा ?

क्रिया—यहाँ भी रूप सतरह का वर्ग किया २८९ हुआ क ८० एवं क २००
के योग के तुल्य मान घटाया ९ शेष रहा, मूल लिया ३ हुआ रूप १७ में जोड़ा,
घटाया २०१४ हुए आधा किया १०१७ करणी खण्ड हुए इनमें छोटी करणी को
रूप मानकर पिछले नियम से ७ का वर्ग किया ४९ हुआ ४० को घटा कर ९ बचा
मूल लिया ३ हुआ रूप ७ में जोड़ा घटाया १० । ४ हुए आधा किया ५।२
हुए, इस प्रकार क १० क ५ क २ ये करणी खण्ड हुए, यह मूल शुद्ध है ।
क्योंकि इस मूलका वर्ग रूप १७ क ४० क ८० क २०० होता है । यहाँ पहिली
मूलकरणी १० और ७ है इनमें बड़ी करणी १० का चतुर्गुण ४० का क ८०
क २०० में अपवर्त्तन देने से १।५ करणी खण्ड हुए, शेष विधि से भी वे ही खण्ड
आते हैं, इसलिये यह मूल शुद्ध है । इससे यह स्पष्ट है कि “कचिदल्पापि”
यह अर्थ उक्त उदाहरण में स्पष्ट है ।

उपपत्ति सहित करणीषड्विध समाप्त हुआ ।

करणौ सम्बन्धि अभ्यासार्थ प्रश्नमाला नं० (७)

$$(१) \sqrt{९} + \sqrt{४}$$

$$(२) ३\sqrt{२} + १०\sqrt{२} - ५\sqrt{२}$$

$$(३) ३\sqrt{५} + २\sqrt{५} - १\sqrt{५}$$

$$(४) \sqrt{२४} + \sqrt{५४} - \sqrt{९६}$$

$$(५) ९\sqrt{१८} - ३\sqrt{८} + २\sqrt{५०}$$

गुणन सम्बन्धि उदाहरणमाला

- (१) क २ × क ३ × क ५
 (२) $२\sqrt{२} \times ३\sqrt{३} \times ५\sqrt{५}$
 (३) $\sqrt{८ \times \sqrt{३९}} \times \sqrt{८ - \sqrt{३९}}$
 (४) $(३\sqrt{१२} - ३\sqrt{४}) (३\sqrt{१२} + \sqrt{६})$

भाग सम्बन्धि उदाहरणमाला

- (१) $१४\sqrt[३]{९} क \div २\sqrt[३]{४} क ।$
 (२) $३ अ \sqrt[३]{क} \div \frac{३}{४} \sqrt[३]{क अ}$
 (३) $\sqrt[३]{४ क^२} \div \sqrt{२ क}$

करणी वर्ग सम्बन्धि उदाहरणमाला

- (१) क ५ क १० क ८ क १५ ।
 (२) क ४ क ३ क ५ क ८ ।
 (३) क १२ क २५ क २० ।
 (४) क १५ क २० क २५ क ३० ।

उपरोक्त करणियों के निकाले हुए वर्ग का वर्गमूल निकालो—

अथ कुट्टकः ।

भाज्यो हारः क्षेपकश्चापवर्त्यः केनाप्यादौ संभवे कुट्टकार्थम् ।
 येनच्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेन क्षेपश्चैतद्दुष्टमुद्दिष्टमेव ॥२६॥

व्याख्या—एवं सामान्यतोऽव्यक्तक्रियोपयुक्तं षड्विधचतुष्टयमुक्त्वा साम्प्रतमनेकवर्णसमीकरणक्रियोपयुक्तं कुट्टकमाह । कुट्टको नाम गुणकः । अथास्य निरूपणं शालिन्या क्रियते भाज्यो हार इति—
 कश्चिद्राशिर्येन गुणित उद्दिष्टक्षेपेण युतो न उद्दिष्टहरेण भक्तः सन्निःशेषः स्यात् तस्य गुणकविशेषस्य “कुट्टक” इति संज्ञा, इति तु स्पष्टमेव । अत्रा-
 गता लब्धिर्लब्धिसंज्ञा । हरो हरसंज्ञ एव । क्षेपोऽपि क्षेपसंज्ञ एव अन्वर्थ-
 स्संज्ञाश्चैताः । यो राशिर्गुण्यते तस्य “भाज्यः” इति संज्ञा भजनयोगात् ।
 अस्य कुट्टकस्य ज्ञानार्थमादौ स भाज्यो हारः क्षेपकश्च केनापि समेनाङ्केना-

पवर्त्यः । भाज्यहारक्षेपा एकेनैवाङ्केनापवर्त्या इति भावः । कस्यामव-
स्थायां । अपवर्त्तनसंभवे सति । निःशेषभजनमपवर्त्तनमित्युच्यते ।
अपवर्त्तने कृते भाज्यहारौ दृढसंज्ञकौ स्तः । दृढभाज्यहारौ भवत इति
भावः । भाज्यहारक्षेपाणामपवर्त्तनसंभवे सति, अवश्यमपवर्त्या एव ।
येनाङ्केन भाज्यहारौ छिन्नावपवर्त्तितौ तेनाङ्केन क्षेपश्चेन्नच्छिन्नोऽर्थादप-
वर्त्तितो न स्यात् तदा एतदुद्दिष्टं पृच्छकेन पृष्टं दुष्टमेव ।

भाषा—इस प्रकार सामान्य बीजक्रिया के उपयोगी धनर्ण षड्विध, ख षड्विध
वर्ण षड्विध तथा करणी षड्विध कहकर अब अनेकवर्ण समीकरण के उपयोगी
विषय कुट्टक का निरूपण करते हैं । उद्दिष्टराशि जिस अङ्क से गुणा होकर उद्दिष्टक्षेप
के जोड़ने अथवा घटाने से और उद्दिष्ट भाजक के भाग देने से निःशेष हो जाय
तो उस गुणक की कुट्टक संज्ञा मानी है । परन्तु यहां पर जो राशि गुणी जाती है
उसे भाज्य, जो जोड़ा या घटाया जाय उसे क्षेप जिसका भाग दिया जाता है
उसे हार और जो लब्धि आती है उसे लब्धि कहते हैं, कुट्टक की विधि के लिये
पहिले 'भाज्य' हार और क्षेप में किसी एक समान अङ्क से अपवर्त्तन देना चाहिये,
इस प्रकार अपवर्त्तन देने से भाज्य हार ये दोनों तो अपवर्त्तित हो जाँय परन्तु
क्षेप यदि अपवर्त्तित न होवे तो वह उदाहरण दुष्ट अर्थात् अशुद्ध होगा, ऐसा
जानना चाहिये ।

अत्रोपपत्तिः

कुट्टको नामगुणकविशेषः * । कुट्टके हि गुणलब्धी साध्येते त एव गुणलब्धी
भाज्यहार-क्षेपवशेन भवतः । त एवापवर्त्तितभाज्यहारक्षेपाणां वशेनापि भवि-
तुमर्हतस्तत्रापवर्त्तनविधिनाऽङ्कलाघववशेन ते आयातः । लब्धिगुणसाधनाय वल्ली
साधनं, वल्ली साधनाय च भाज्यहारक्षेपा अपवर्त्तनीयाः भवन्ति ।

अत्र गुणकः = गु, भाज्यः = भा, हारः = हा ।

क्षेपः = क्षे, लब्धिः = ल ।

∴ लब्धिः = $\frac{\text{गु. भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हार}}$

अत्र भाज्यहारक्षेपेषु केनचित्समेनाङ्केन गुणितेष्वपवर्त्तितेषु च लब्धौ न काचि-
द्विकृतिरित्यनेनापवर्त्तितेषु सत्सु

$$\frac{\frac{\text{गु. भा} \pm \text{क्षे}}{\text{क}}}{\frac{\text{हा}}{\text{क}}} = \frac{\text{गु} \times \frac{\text{भा}}{\text{क}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}}}{\frac{\text{हा}}{\text{क}}}$$

$$= \frac{\text{गु} \times \text{अपवर्तितभाज्य} \pm \text{अपवर्तितक्षेप}}{\text{अपवर्तित हा}} = \frac{\text{गु} \times \text{अभा} \pm \text{अ क्षे.}}{\text{अ. हा.}} = \text{लब्धिः}$$

अत “भाज्यो हारः क्षेपकश्चापवर्त्यः” इत्युपपन्नम्

$$\text{पूर्व लब्धिः} = \frac{\text{गु. भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हार}}$$

∴ ल × हार = गु. भा ± क्षे
 वा $\frac{\text{ल} \times \text{हा}}{\text{क}} = \frac{\text{गु} \times \text{भा}}{\text{क}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}}$ } अत्रपक्षौ भाज्यहारयोरपवर्त-
 नाङ्केन भक्तौ कार्यौ
 तदा जातौ पक्षौ ।

$$= \text{ल} \times \frac{\text{हा}}{\text{क}} = \text{गु} \times \frac{\text{भा}}{\text{क}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}}$$

अत्र हि प्रथमपक्षोऽभिज्ञाङ्कात्मक एव, द्वितीयपक्षे च प्रथमखण्डसमिज्ञा-
 ङ्कात्मकम् । तत्र हि द्वितीयपक्षे द्वितीयं खण्डम् = $\frac{\text{क्षे}}{\text{क}}$ इदं यदि नाभिज्ञं भवेत् तदा
 तयोः भिज्ञाभिज्ञाङ्कात्मकयोः खण्डयोर्योगवियोगो द्वितीयपक्षे भिज्ञाङ्क एव स्यात् ।
 सचैतादृशो भिज्ञाङ्कात्मको द्वितीयः पक्षः कथं ह्यभिज्ञाङ्कात्मकेन प्रथमपक्षेण समानः
 सम्भवेत् ।

नहि भिज्ञाङ्कोऽभिज्ञात्मकोऽङ्को भवितुमर्हतीति नियमात् । अतश्च तावदत्रापि
 येनाङ्केन भाज्यहारौ छिन्नौ तेन क्षेपोऽप्यवश्यं छिन्न एव ।

अतः “येनच्छिन्नौ भाज्यहारौ न तेन क्षेपश्चैतदुद्गृह्यमुद्दिष्टमेव” इत्युपपन्नम् ।

परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः

शेषस्तयोः स्यादपवर्त्तनं सः ।

तेनापवर्त्तेन विभाजितौ यौ-

तौ भाज्यहारौ दृढसंज्ञकौ स्तः ॥२७॥

मिथो भजेत्तौ दृढभाज्यहारौ-

यावद्विभाज्ये भवतीह रूपम् ।

फलान्यधोऽधस्तदधो निवेश्यः

क्षेपस्तथाऽन्त्ये खमुपान्तिमेन ॥२८॥

स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युते तदन्त्यं

त्यजेन्मुहुः स्यादिति राशियुग्मम् ।

ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः

फलं गुणः स्यादधरो हरेण ॥२९॥

व्याख्या—परस्परमित्यादि । ययोः राश्योः परस्परमर्थादन्योन्यं भाजितयोः सतोर्यः शेषाङ्कः स तयोरपवर्त्तनं स्यात् । तेन तौ निःशेषं भज्येते एव । अस्यायमाशयः । हरेण भाज्ये भक्ते यच्छेषं तेनापि सहरो भजनीयः, तच्छेषेणापि भाज्यशेषम्, तेनापि हरशेषमिति । पुनः पुनः परस्परभजने क्रियमाणे यद्यन्ते रूपं शेषं स्यात्तदा तौ नापवर्त्तते एव, रूप-स्यैव शेषत्वात् । यदा तु शून्यं शेषं स्यात्तदा हरीभूतं यत्प्राक् शेषमधः स्थापितं तदेव भाज्यहारयोरपवर्त्तनं स्यात् शेषोऽह्यपवर्त्तनाङ्कः । तस्मादन्तिमशेषाङ्क एवापवर्त्तनाङ्कः । एवं ज्ञातेनापवर्त्तनाङ्केन भाज्यहारौ विभाजितौ तौ दृढसंज्ञकौ स्तः । तेनैव क्षेपोऽप्यपवर्त्त्यः । सोऽपि दृढ-संज्ञः स्यात् । अथ तौ दृढभाज्यहारौ, उक्तवन्मिथः परस्परं तावद्विभजेद्या-वद्विभाज्ये रूपं भवेत् । इहैतेषु परस्परभजनेष्वागतानि फलान्यधोऽधो निवेश्यानि । तेषां फलानां वल्लीवदधोऽधः स्थापितानामधः क्षेपो निवेश्य-स्तथा तेषामप्यधोऽन्ते खं निवेश्यम् । एवं वल्ली जायते । तत उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हतेऽर्थात् स्वोर्ध्वस्थितेऽङ्के हतेऽन्त्येनाङ्केन युते च सति तदन्त्यं त्यजेत् इति मुहुः । पुनः उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हतेऽन्त्येन युते तदन्त्यं त्यजेत्, इति पुनः पुनः कृते राशियुग्मं स्यात् । तत्रोर्ध्वराशिर्दृढेन विभाज्येन तष्टः सन् फलं भवेत् । फलमर्थाह्विधः स्यात् अधरोऽधस्तनो राशिर्दृढेन हरेण तष्टः सन् गुणः स्यात् अत्र “तष्टः” इत्यनेन भक्तावशेषितो राशिर्ग्राह्यो न तु लब्धिरित्यर्थः । तेन गुणेन दृढभाज्ये गुणिते दृढक्षेपयुतोने दृढहरेण-भक्ते शेषं न स्यात् । उद्दिष्टेष्वपि भाज्यहारक्षेपेषु ते एव गुणलब्धी इत्यर्थतः सिद्धम् ।

भाषा—दो राशियों के आपस में भाग देनेपर जो शेष बचे वह उनका अपवर्तनाङ्क होता है। अर्थात् उस अपवर्तनाङ्क से वे दोनों राशियाँ भाग देनेपर निःशेष हो जायँगी। इसलिये अपवर्तन दिये हुये भाज्य द्वार और क्षेप दृढसंज्ञक कहलाते हैं। बाद में उन दृढ संज्ञक भाज्यद्वारों को परस्पर तबतक भाग देते जाओ जबतक कि भाज्यके स्थान में रूप शेष हो जावे, इस प्रकार जो लब्धि मिले उन्हें एक के नीचे एक इस क्रमसे लिखो और फिर उन लब्धियों के नीचे क्षेप को लिखकर उसके नीचे शून्य लिखो इस प्रकार करने से अङ्कोंकी एक ऊर्ध्वाधर पङ्क्ति उत्पन्न होगी उसको वल्ली कहते हैं (इस वल्लीमें ऊर्ध्वाधर स्थापित अङ्क यदि समस्थानों में हो तो समवल्ली और विषमस्थानों में हो तो विषमवल्ली होती है) फिर अन्त के समीपवाले अङ्क से उसके ऊपर के अङ्क को गुण दो और उसमें अन्तवाले अङ्क को जोड़ दो बादमें उस अन्तवाले अङ्क को मिटा दो यों बारम्बार किया करने से अन्तमें दो राशि होगी जब तक दो राशि हो तब तक क्रिया करते जाना चाहिये। बाद में ऊपरवाली राशि दृढभाज्य से तष्टित होनेपर फल लब्धि होगी और नीचे वाली राशि दृढद्वार से तष्टित होकर गुण कहलावेगा। ये ही दो राशि क्रम से लब्धि, गुणक नाम से कहलावेंगी।

अत्रोपपत्तिः—

अनेन महत्तमापवर्तनाङ्कज्ञानं क्रियते—तज्ज्ञानाय भाज्यभाजकौ ज्ञातव्यौ ययो-
रपवर्तनाङ्कमन्वेष्टव्यं स्यात्। भाज्यो हि लब्धिभाजकयोः घातेन शेषयुतेन च
समानः स्यात् इति सिद्धान्तेन—

अ
क — अत्र अ = भाज्यः, क = भाजकः।

$$\begin{array}{r}
 \therefore \text{भाजकः)} \text{ भाज्यः (लब्धिः} \\
 \text{क) अ (ग} \\
 \text{क • ग} \\
 \hline
 \text{च) क (प} \\
 \text{च • प} \\
 \hline
 \text{ल) च (ख} \\
 \text{ल • ख} \\
 \hline
 \text{त) ल (घ} \\
 \text{ल} \\
 \hline
 \text{X}
 \end{array}$$

भाज्यः = भाजकः × लब्धिः + शेषः इति नियमादत्र

अ = (क × ग) + च (१) प्रथम भागहारक्रियायाम् ,

∴ क = (च × प) + ल (२) द्वितीय भागहारक्रियायाम् ,

∴ च = (ल × ख) + त (३) तृतीय भागहारक्रियायाम् ,

∴ ल = (त × घ) + ० (४) चतुर्थभागहारक्रियायाम् अत्र हि “ल” अर्थात् भाज्यः “त” इति भाजकेनापवर्त्यते । अतः च, क, अ, इमे भाज्या अपि “त” इत्यनेनापवर्तनीयाः स्युः । अतः “त” इति सर्वेषामपि महत्तमापवर्तनम् * ।

अनेनैतत्स्फुटं यत् स एवाङ्को महत्तमापवर्तनाङ्को भवितुमर्हति यश्च भाज्य-भाजकयोः परस्परभजनादन्ते शेषः स्यात् ।

अर्थाद्येन शेषेणान्तिमेन, भाज्ये भक्ते पश्चाच्चिःशेषतैवाग्रे स्यादिति । अतः महत्तमापवर्तनाङ्कः शेष सम एव सिद्ध्यति शेषान्त्यूनाधिके महत्तमापवर्तनाङ्के कल्पिते भिन्नतैव सततं स्यान्न निःशेषता । अत उपपन्नं “परस्परं भाजितयोर्ययोर्धः शेषस्तयोः स्यादपवर्तनं सः” ।

उपर्युक्तेनोपपत्तिविधिना सिद्धेन महत्तमापवर्तनाङ्केन भाज्यभाजकयो रपवर्तितयोर्दृढसंज्ञकत्वं सिद्धम् । अदृढत्वे भाज्यभाजकयोः पुनरपवर्तनप्रसङ्गः प्रसज्यते, अतस्तत्र दृढसंज्ञकयोरर्थात् दृढाङ्कात्मकयोः भाज्य भाजकयोः परस्पर-भजनात् पश्चादन्तेरूपतुल्यमेव शेषं स्यात् । अतः—“तेनापवर्तनं विभाजितौ यौ तौ भाज्यहारा दृढसंज्ञकौ स्तः” इत्युपपन्नं जातम् ।

अथ गुणलब्धोरानयनोपपत्तिविचारः क्रियते ।

अत्र विषये म. म. श्रीसुधाकरद्विवेदिनां रचितोपपत्तिर्यथा—

$$\text{का} = \frac{१०० \text{ या} + \text{क्षे}}{६३} \quad \text{अत्र या} = \text{गुणकः} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{का} = \text{लब्धिः} \end{array} \right\}$$

$$\text{तदा का} = \frac{१०० \text{ या} + \text{क्षे}}{६३} = \text{या} + \frac{३७ \text{ या} + \text{क्षे}}{६३} = \text{या} + \text{नी}$$

* सं० $\frac{\text{अ}}{\text{क}}$ अत्र महत्तमापवर्तनाङ्कविचारे यदि क संख्यया अ निःशेषं विभज्येत तदा क

एव महत्तमापवर्तनाङ्कः । एवं न चेत्तदा च शेषः महत्तमापवर्तनाङ्कः स्यात् । एवमपि न चेत्तदा क शेषः महत्तमापवर्तनाङ्कः स्यात् एवमग्रे ज्ञेयम् अतः परस्परभजने कृते यच्छेषं स्पष्टिभं तदेव महत्तमापवर्तनम् । शेषान्महान् कश्चिदपवर्तनाङ्कः कल्पेत तदा शेषे तस्यापवर्तनस्यासंभवात् भाज्यहारयोस्तेनापवर्तनं न संभवति ।

$$\text{यदि नी} = \frac{३७ \text{ या} + \text{क्षे}}{६३} \text{ तदा, या} = \frac{६३ \text{ नी} - \text{क्षे}}{३७} = \text{नी} + \text{पी}$$

$$\text{यदि पी} = \frac{२६ \text{ नी} - \text{क्षे}}{३७} \text{ तदा, नी} = \frac{३७ \text{ पी} + \text{क्षे}}{२६} = \text{पी} + \text{लो}$$

$$\text{यदि लो} = \frac{११ \text{ पी} + \text{क्षे}}{२६} \text{ तदा, पी} = \frac{२६ \text{ लो} - \text{क्षे}}{११} = २ \text{ लो} + \text{श्वे}$$

$$\text{यदि श्वे} = \frac{४ \text{ लो} - \text{क्षे}}{११} \text{ तदा, लो} = \frac{११ \text{ श्वे} + \text{क्षे}}{४} = २ \text{ ह} + \text{श्वे}$$

$$\text{यदि चि} = \frac{३६ + \text{क्षे}}{४} \text{ तदा, ह} = \frac{४ \text{ श्वे} - \text{क्षे}}{३} = \text{श्वे} + \text{चि}$$

$$\text{यदि चि} = \frac{३६ - \text{क्षे}}{३} \text{ तदा, श्वे} = \frac{३ \text{ चि} + \text{क्षे}}{१} = \text{क्षे}$$

$$\text{यदि चि} = ०$$

अत्र यावत्तावत्कालकादिगुणकवशेन जातावली, अर्थात् भाज्यहारयोः परस्परं भजनेनागता लब्ध कमशोऽधोऽधः स्थाप्यास्तदधः क्षेपस्तदधः शून्यम्, ततः स्वोर्ध्वं हतेऽन्त्येन युते तदन्त्यं त्यजेत् इत्युपपन्नम् ।

अत्र राशियुग्मं गुणलब्ध्यावात्कालकयोर्मनि भवतः ।

ऊर्ध्वेति—

$$\text{कुट्टकविधिना} = \frac{\text{गु} \cdot \text{भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हार}} = \text{लब्धिः}$$

$$\therefore \text{गु} \cdot \text{भा} \pm \text{क्षे} = \text{हार} \times \text{ल}$$

$$\text{अत्र कल्प्यते } \frac{\text{गु}}{\text{हा}} = \frac{\text{गुशे}}{\text{हार}}, \therefore \text{गुशे} = \text{गु} - \text{हार} \cdot \text{इ} ।$$

$$\text{अथ गु} \cdot \text{भा} \pm \text{क्षे} = \text{हा, लब्धिः}$$

$$\therefore \text{गु} \cdot \text{भा} \pm \text{क्षे} - \text{इ} \cdot \text{हा} \cdot \text{भा} = \text{हा} \cdot \text{ल} - \text{इ} \cdot \text{हा} \cdot \text{भा}$$

$$\text{वा भा} (\text{गु} - \text{इहा}) \pm \text{क्षे} = \text{हा} (\text{ल} - \text{इ} \cdot \text{भा})$$

अत्रपक्षयोः

‘इ’ हा • भा, इदं—

विशोध्यते-भाज्य

हारौगुणकौ च पृथक्

कृतौ-तदाजातौ पक्षौ—

कल्प्यते $\frac{ल}{भा} = इ + \frac{लशे}{भा}$,
 $\therefore ल = भा \cdot इ + लशे$
 $\therefore ल - भा \cdot इ = लशे$
 अत्र गुणशेषे लब्धिशेषे च 'इ', प्रमित
 लब्धोर्मानं समानमेवेति—
 अतः "उर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः फलं गुणः
 स्यादधरो हरेण" इत्युपपन्नम् ।
 अनयैव युक्त्या "गुण लब्धोः समं ग्राह्यं धोमता तक्षणे फलम् । इत्यपि
 सिद्धयतीति ध्येयमिति सर्वमुपपन्नम् ।

एवं तदैवात्र यदा समास्ताः

स्युर्लब्धयश्चेद्विषमास्तदानीम् ।

यथागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ

स्वतक्षणाच्छेषमितौ तु तौ स्तः ॥३०॥

व्याख्या—अथागतफलेषु विषमेषु सत्सु विशेषमाह—एवमिति ।
 एवं तदैव स्यात् यदाऽत्र परस्परभजने ता अर्थात् आगताः लब्धयः
 समाः स्युरिति । अस्यायमाशयः यत्, आगता लब्धयः द्वे चतस्रः षट्
 अष्टावित्यादयः स्युः । यदि तु ताः लब्धयो विषमाः स्युः, एका तिस्रः पञ्च
 सप्तेत्यादयस्तदानीं कथितप्रकारेण यथा आगतौ लब्धिगुणौ तौ स्वतक्षणा-
 च्छोध्यौ शेषतुल्यौ तौ लब्धिगुणौ स्तः । तक्ष्यते तनू क्रियते अनेनेति
 तक्षणः । स्वश्च।सौतक्षणश्च इति स्वतक्षणस्तस्मात् । गुणो दृढहाराच्छोध्यो
 लब्धिर्दृढभाज्याच्छोध्येतिभावः ।

विषमवल्लित्वात् स्वतक्षणाच्छोधनेन लब्धिगुणौ धनक्षेपे भवतः,
 समवल्लित्वात् तु धनक्षेपे भवत एव ॥ ३० ॥

भाषा—पहिले नियम से साधन की हुई लब्धि यदि विषम होवे तो विशेष
 नियम कहते हैं ।

इसमें परस्पर दोनों अङ्कों को भाग देने में जब अन्त में १ शेष बच
 जाता है तब तक क्रिया की जाती है और लब्धियों को ऊपर नीचे लिखने
 से बढ वाली बनती है उस वाली की संख्या सम संज्ञक हो अर्थात् २, ४, ६, ८

इत्यादि होवे तभी उपरोक्त गुणलब्धि ठीक मनी जायंगी क्योंकि वे समबली को कहलावेगो, यदि लब्धि विषम होवे अर्थात् बली की संख्या विषम होवे अर्थात् १-३-५ इत्यादि होवे तो आये हुए लब्धिगुण अपने अपने तक्षण में घटाये जाने पर वास्तव लब्धि गुण होंगे ।

भवति कुट्टविधेर्युतिभाज्ययोः

समपवर्त्तितयोरपि वा गुणः ।

भवति यो युतिभाजकयोः पुनः

स च भवेदपवर्त्तनसंगुणः ॥३१॥

व्याख्या—द्रुतविलम्बितेन गुणकमाह भवतीति । युतिः क्षेपः युतिभाज्ययोः समपवर्त्तितयोः सतोरपि कुट्टकविधेर्वा गुणः स्यात् । अपि समुच्चये । वा प्रकारान्तरे । क्षेपभाज्ययोरपवर्त्तनसंभवेऽप्यपवर्त्तन-मकृत्वाऽपि गुणः सिध्यति । यद्वा तयोरपवर्त्तितयोः सतोरपि यथोक्त-कुट्टकविधिना स एव गुणः स्यादित्यर्थः । तेन गुणेन भाज्यं संगुण्य क्षेपेण संयोज्य-हरेण विभज्य लब्धिरत्र ज्ञेया । भवति य इति पुन-र्विशेषे । युतिभाजकयोरपवर्त्तनसंभवे सत्यपवर्त्तितयोः सतोः यथोक्तकुट्टकविधिना यो गुणो भवति स च भवेत्, परमपवर्त्तनसंगुणः सन्नपवर्त्तितयोरपि गुणसिद्धिर्भवति चकारात् । अपि वा शब्दसाम-र्थ्यादध्याहारेण योजना । सा यथा—युतिभाज्ययोः समपवर्त्तितयोर्या लब्धिर्भवति, अपि वा युतिभाजकयोस्त्वपवर्त्तितयोर्या गुणो भवति सा लब्धिः न स च गुणो न भवेत् । युतिभाज्ययोः समपवर्त्तितयोर्ल-ब्धिरपवर्त्तनाङ्केन गुण्या । गुणकस्तु यथागत एव । युतिभाजकयो-स्त्वपवर्त्तितयोर्गुणोऽपवर्त्तनाङ्केन गुण्यः । लब्धिर्यथागता एवेत्यर्थः ।

प्रकारान्तर से गुणक लाने की विधि ।

भाषा—अपवर्त्तन दिये हुए भाज्यहारों पर से “मियो भजेतौ दृढभाज्यहारौ” इस कहें हुए कुट्टक विधि के अनुसार गुणक निकलता है और लब्धि अपवर्त्तनाङ्क से गुणी हुई वास्तव होती है । अथवा अपवर्त्तन के संभव होने पर भी अप-वर्त्तन न देकर उक्त कुट्टकविधि से गुण आता है परन्तु लब्धि गुणगुणित क्षेप

युक्त भाज्य में हार का भाग देने पर मिलेगी । अपवर्तन के संभव होने पर हार और क्षेप में अपवर्तन देकर उक्त विधि से गुण निकाला वह अपवर्तनाङ्क से गुणा हुआ वास्तव होगा और लब्धि जैसी आती है वही वास्तव है ।

अत्रोपपत्तिः—

कुट्टकविधिना—

$$\begin{aligned} & \text{गु} \cdot \text{भा} \pm \text{क्षे} = \text{हा} \cdot \text{ल} \\ \therefore \frac{\text{गु} \cdot \text{भा} \pm \text{क्षे}}{\text{क}} &= \frac{\text{हा} \cdot \text{ल}}{\text{क}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{अत्र भाज्यक्षेपयोरपवर्तनाङ्कः क,} \\ \text{कल्पितस्तेनपक्षौ विभक्तौ—} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{गु} \cdot \frac{\text{भा}}{\text{क}} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{क}} &= \text{हा} \cdot \frac{\text{ल}}{\text{क}} \\ \therefore \text{गु} \cdot \text{भा}' \pm \text{क्षे}' &= \text{हा} \cdot \text{ल}' \\ \therefore \frac{\text{गु} \cdot \text{भा}' \pm \text{क्षे}'}{\text{हा}} &= \text{ल}' = \frac{\text{ल}}{\text{क}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{अत्र हि } \frac{\text{भा}}{\text{क}} = \text{भा}', \frac{\text{क्षे}}{\text{क}} = \text{क्षे}', \\ \frac{\text{ल}}{\text{क}} = \text{ल}' \quad \text{इत्युत्थापनेन जालौ} \\ \text{पक्षौ} \end{array}$$

अत्रापवर्तितयोः क्षेपभाज्ययोर्वशेन यौ लब्धिगुणौ तत्र 'गु' गुणस्तु पूर्वव-
देवास्ति लब्धिः $= \frac{\text{ल}}{\text{क}}$ इयमपवर्तनसंगुणा सती वास्तवा लब्धिः स्यात् । अन्यैव
युक्त्या यदि कुट्टकविधिना समुपपन्ने समीकरणे—हारक्षेपयोरेवापवर्तनसम्भव-
स्तदाऽपवर्तितहारक्षेपयोर्वशेन यौ लब्धिगुणौ समायातौ तत्र तु लब्धिर्वास्तवैव तत्र
केवलं $\frac{\text{गु}}{\text{क}}$ अयं गुणोऽपवर्तनसङ्गुणः सन् वास्तवो गुणो भविष्यतीति ज्ञेयम् ।
अनेनेदमायातम् यत्क्षेपभाज्ययोर्वशेनापवर्तने कृते सति लब्धौ विकृतिः स्यात्
तदाऽपवर्तनसंगुणा लब्धिर्वास्तवा लब्धिः स्यात् । यदि च हारक्षेपयोर्वशेना-
पवर्तने कृते सति लब्धिगुणौ साध्येने तदा शुणे विकृतिः स्यात् तस्यामवस्थायामपवर्तन
संगुणः सन् स गुणः वास्तवो गुणः स्यात् । यदि च पूर्वभाज्यक्षेपावपवर्तितौ, ततो-
ऽपवर्तितक्षेपस्य हारस्य च पुनरपवर्तने कृते सति क्रिया विधीयते तदा लब्धौ-
शुणे चापि-विकृतिः स्यात् । अर्थादुभावपि विकृतिं गतौ भवतः तत्र “क्षेपस्योभया-
पवर्तनसंभवात्” तस्यामवस्थायामपवर्तनाङ्कद्वयं स्यादेकः भाज्यक्षेपसम्बन्धिरपरः
क्षेपहारसम्बन्धिस्तदाऽपवर्तनाङ्कद्वयेन संगुणौ क्रमशः लब्धिगुणौ वास्तविकौ लब्धि-
गुणौ स्याताम् इत्युपपन्नं भवति कुट्टकविधेरित्यादि ।

योगजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे ।

धनभाज्योद्भवे तद्वद् भवेतामृणभाज्यजे ॥

व्याख्या—अथ ऋणक्षेपे ऋणभाज्ये वा सति विशेषमनुष्ठुभाह—
योगजे इति । योगजे धनक्षेपजे ये गुणाप्ती ते स्वतक्षणाच्छुद्धे वियोगजे-
भवतः । गुणो दृढहराच्छुद्धः सन्, लब्धिर्दृढभाज्याच्छुद्धा सती ऋणक्षेपे
भवतीत्यर्थः । एवं धनभाज्योद्भवे गुणाप्ती तद्वत्स्वतक्षणाच्छुद्धे ऋण-
भाज्यजे भवतः ।

अत्रोत्तरार्धे—ऋणभाज्योद्भवे तद्वद्भवेतामृणभाज्यके, इत्यपि पाठः
कचिल्लभ्यते । अस्यायमर्थः योगजे गुणाप्ती स्वतक्षणाच्छुद्धे वियोगजे
भवतः । तद्वदृणभाज्योद्भवे भवतः । तद्वदृणभाजकेऽपि गुणाप्ती भवतः
क्षेपभाज्यहाराणामन्यतमे ऋणे सति पूर्वसिद्धे गुणाप्ती स्वतक्षणाच्छोध्ये
इति भावः एवं द्वौ चेदृणगतौ तदा पुनरपि स्वतक्षणाच्छोध्ये इत्यर्थः ।
एवं त्रयाणामप्युत्पत्तये त्रिवारं स्वतक्षणाच्छोध्ये इत्यर्थः ।

भाषा—धनक्षेप सम्बन्धी लब्धिगुण अपने अपने तक्षण में घटाने से ऋणक्षेप
में होते हैं अर्थात् दृढहार में शोधित हुआ गुण गुण, दृढ भाज्य में शोधित हुई
लब्धि लब्धि होती है । इसी प्रकार धनभाज्य सम्बन्धी लब्धिगुण अपने अपने
तक्षण में शोधित होकर ऋणभाज्य के होते हैं ।

अत्रोपपत्तिः ।

कुट्टकविधिना—

$$\left. \begin{aligned} \text{भा} \cdot \text{गु} + \text{क्षे} &= \text{हा} \cdot \text{ल} \\ \therefore \text{हा} \cdot \text{भा} - (\text{भा} \cdot \text{गु} + \text{क्षे}) &= \text{हा} \cdot \text{भा} - (\text{हा} \cdot \text{ल}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{एतौ पक्षौ हा} \cdot \text{भा} \\ &\text{अत्र विशोधितौ—} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{हा} \cdot \text{भा} - (\text{भा} \cdot \text{गु} + \text{क्षे}) &= \text{हा} \cdot \text{भा} - \text{हा} \cdot \text{ल} \\ \therefore \text{हा} \cdot \text{भा} - \text{भा} \cdot \text{गु} - \text{क्षे} &= \text{हा} (\text{भा} - \text{ल}) \\ \therefore \text{भा} (\text{हा} - \text{गु}) - \text{क्षे} &= \text{हा} (\text{भा} - \text{ल}) \end{aligned}$$

अत्र यदि (हा - गु) अयं गुणः कल्प्यते तदा 'भा - ल' इयं
लब्धिः स्यात् ।

परन्तु ल गु, एतौ लब्धिगुणौ पूर्वधनक्षेपे सिद्धौ ऋणक्षेपेऽत्र तावेव स्वस्व-
तक्षणाच्छुद्धौ दृढवेते ।

अतः "योगजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे" इति साधूपपन्नं जातम् ।

गुणलब्धयोः समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलम् ॥३२॥

व्याख्या—‘ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः फलं गुणः स्यादधरो हरेण’ इत्यत्र गुणलब्धिसम्बन्धिनी तक्षणे क्रियमाणे सत्युभयत्र तक्षणस्य फलं तुल्यमेव ग्राह्यम् । केन धीमता बुद्धिमता । हेतुगर्भमिदम् । तथाहि उभयत्र तक्षणे क्रियमाणे यत्राल्पं तक्षणफलं लभ्यते तत्तुल्यमेवान्यत्रापि ग्राह्यं न त्वधिकं प्राप्तमपि ।

भाषा—‘ऊर्ध्वो विभाज्येन दृढेन तष्टः फलं गुणः स्यादधरो हरेण’ इस प्रकार के अनुसार अपने-अपने तक्षण से जो लब्धि गुण तष्टित किये जाते हैं वहां पर समान फल लेना चाहिये अर्थात् दोनों स्थान में जहां अल्प तक्षण फल मिले उसी के तुल्य दूसरे स्थान में भी तक्षण फल लेना चाहिये न्यूनाधिक नहीं ।

अत्रोपपत्तिः ।

पूर्वकुट्टकविधिना समीकरणे कृते

भा • गु + क्षे = हा • ल

} पक्षाभ्यां इ • भा • हा
} इत्यस्य शोधने कृते

भा • गु + क्षे - इ • भा • हा = हा • ल - इ • भा • हा

∴ भा (गु - इहा) + क्षे = हा (ल - इ • भा)

अतो भाज्यस्य गुणः = गु - इहा • । लब्धिः = ल - इ • भा

अत्रेतस्य तक्षणफलस्योभयत्र तुल्यत्वमेव ग्राह्यम् । यतः पक्षौ समौ—

अतः “गुणलब्धयोः समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलम्” इत्युपपन्नं जातम् ।

हरतष्टे धनक्षेपे गुणलब्धी तु पूर्ववत् ।

क्षेपतक्षणलाभाढ्या लब्धिः शुद्धौ तु वर्जिता ॥३३॥

व्याख्या—यत्र क्षेपो हरादधिकस्तत्र हारेण क्षेपस्तक्ष्यस्तष्टितक्षेपमेव क्षेपं प्रकल्प्य पूर्ववत् गुणलब्धी साध्ये । तत्र गुणः यथागत एव, लब्धिस्तु क्षेपतक्षणलाभाढ्या कार्य्या । क्षेपस्य तक्षणमवशेषणं तत्र यो लाभः फलं तेनाढ्या युक्ता एवं धनक्षेपे, शुद्धौ ऋणक्षेपे तु हरतष्टे कृते सति पूर्ववत् ‘योगक्षेपे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे’ इत्युक्तप्रकारेण ये गुणाप्ती तत्र लब्धिः क्षेपतक्षणलाभेन वर्जिता कार्य्या ।

भाषा—जिस स्थान में क्षेप हारसे अधिक होता है वहां हार से तष्टित किये हुए क्षेप को क्षेप कल्पना करके पूर्वोक्त नियमसे गुण लब्धि सिद्ध करनी

चाहिये। वहां गुण जो आया है वही रहेगा और लब्धि क्षेप से तद्धित करने से जो फल आया है उससे योग की हुई वास्तव होगी। ऋण क्षेप में तो क्षेप को हर तद्धित करने के बाद “योगजे तक्षणाच्छुद्धे गुणाप्ती स्तो वियोगजे” इस नियम के अगुमार गुण लब्धि, सिद्ध करनी चाहिये। वहां गुण तो यही वास्तव होगा परन्तु लब्धि, क्षेप के तद्धित करने से जो फल आया है उससे ऊन हुई वास्तव होगी। जिस जगह क्षेप भाज्य से न्यून रहे और हार से भी न्यून रहे वहां गुण लब्धि के तद्धित करने में कहीं फल का वैषम्य होगा तो इस विधि की प्रवृत्ति न होगी ‘गुणलब्धयोः समं प्राप्तं धीमता तक्षणे फलम्’ इस सूत्र के अनुसार फल ग्रहण करना चाहिये।

अत्रोपपत्तिः ।

कुट्टकोक्तविधिना—

$$\text{गु०भा} \pm \text{क्षे} = \text{ल०हा} । \text{ अत्र यदि क्षे } \nearrow \text{हा० तदा } \frac{\text{क्षे}}{\text{हा०}} = \text{ल}^1 + \frac{\text{क्षे}}{\text{हा०}}$$

$$\therefore \text{क्षे} = \text{हा० ल}^1 + \text{क्षे}$$

$$\therefore \frac{\text{गु०भा} \pm \text{हा० ल}^1 \pm \text{क्षे}}{\text{हा०}} = \frac{\text{गु०भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हा}} \pm \text{ल}^1$$

वास्तवा लब्धिः—

$$\text{अतोऽत्र } \frac{\text{गु०भा} \pm \text{क्षे}}{\text{हा}}, \text{ या लब्धिः सा ल}^1$$

अनेन क्षेपतक्षणलाभेन संस्कृता सति वास्तवा लब्धिः स्यात् ।

अतः “क्षेपतक्षणलाभाद्या लब्धिः शुद्धौ तु वर्जिता” इत्युपपन्नम् ।

अथवा भागहारेण तष्टयोः क्षेपभाज्ययोः ।

गुणः प्राग्वत्ततो लब्धिर्भाज्याद्धतयुतोद्धृतात् ॥३४॥

व्याख्या—अथ भाज्येऽपि हरादधिकेऽनुष्टुभा विशेषमाह—यत्र भाज्यक्षेपौ हरादधिकौ तत्र पूर्ववद्वा क्षेपमात्रतक्षणेन वा गुणाप्ती साध्ये । अथवा भाज्यक्षेपौ द्वावपि हरेण तक्ष्यौ तष्टयोः क्षेपभाज्ययोः प्राग्वदेव गुणाप्ती साध्ये तत्र गुण एव प्राप्तो न लब्धिः । कथं तर्हि—लब्धिरवगन्तव्येति तदाह—भाज्याद्धतयुतोद्धृतादिति । हतश्चासौ युतश्च हतयुतः, हतयुतश्चासाबुद्धतश्चेति हतयुतोद्धृतस्तस्मात् । गुणेन गुणिताक्षेपेण युता-

झाजकेन भक्तादुद्दिष्टाद्भाज्ना लब्धिर्भवति सा ज्ञेयेत्यर्थः । अस्त्यत्र लब्धिज्ञाने प्रकारान्तरमपि ।

भाषा—जहां पर भाज्य और क्षेप, हार से अधिक हो, वहां पूर्वनियम से, अथवा क्षेपमात्र को तद्धित कर गुणलब्धि सिद्ध करनी चाहिये । अथवा भाज्य क्षेपों को हार से तद्धित करे और उन तद्धित भाज्य क्षेप पर से कही हुई रीति के अनुसार गुणलब्धि साधन करे तो गुण वास्तव होगा परन्तु लब्धि वहां वास्तव नहीं होगी, वहां पर गुण गुणित क्षेपयुक्त भाज्य में हार का भाग देने से जो लब्धि मिलेगी वही वास्तव लब्धि रहेगी ।

अत्रोपपत्तिः ।

कुट्टकोक्तविधिना—

भा • गु ± क्षे = हा • ल, पक्षद्वयेऽत्र यदि हारतुल्येनाङ्केन भाज्यक्षेपयोस्तक्षणं क्रियते हारस्य चापवर्त्तनं न विधीयते तदा पक्षयोः समत्वाभावाल्लब्धिर्न वास्तवा ।

उपर्युक्तसमीकरणे यदि हारेणापवर्त्तनं पक्षद्वयेऽपि क्रियते तदा लब्धिः वास्तवा यथाः—

भा • गु ± क्षे = हा • ल

∴ $\frac{\text{भा} \cdot \text{गु} \pm \text{क्षे}}{\text{हा}} = \text{ल}$ अतोऽत्र हारेण पक्षद्वये भक्ते सति यल्लब्धिज्ञानं कृतं

तद्वास्तवम् । अर्थादेवमागतेन गुणकेन भाज्याद्धतात् क्षेपेण युतोनितात् हरेणोद्धृतात् लब्धिः वास्तवाऽनायासेन चायाति इत्युपपन्नं जातम् ।

क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुष्येद्गरोद्धृतः ।

ज्ञेयः शून्यं गुणस्तत्र क्षेपो हारहृतः फलम् ॥३५॥

व्याख्या—अथ क्षेपाभावे एकादिगुणहरसमे वा क्षेपेऽनुष्ठुभा विशेषमाह । यत्रोदाहरणे क्षेपस्य अभावो राहित्यं स्यात् अथवा क्षेपः हरेण उद्धृतो भक्तः सन् शुष्येत् निःक्षेपतां गच्छेत् तत्र गुणः शून्यं हारहृतः क्षेपः फलं लब्धिरित्यर्थः ।

भाषा—जिस उदाहरण में क्षेप न होवे, अथवा हार के भाग देने से क्षेप निःशेष हो जाय वहां शून्य गुण होगा और क्षेप में हार का भाग देने से जो फल मिलेगा वही लब्धि होगी ।

अत्रोपपत्तिः ।

अत्रापि कुट्टकविधिना समीकरणे

गु० भा + ०

हा

= ल अत्रक्षेपस्याभावोऽस्ति । कुट्टकविधिना वलीसाधनादनु क्षेपस्थाने शून्यं निवेश्य “स्वोर्ध्वहतेऽन्त्येनयुते” इत्यादिना लब्धिगुणौ साध्यौ तदा शून्यावेवा-
यास्यतः । यत्र च हरोद्घृतः क्षेपः शुद्ध्यति । तत्र “हरतष्टे धनक्षेपे” इत्यादिना
क्षेपे हरेण तष्टे शून्यमेव शेषम् । ततः लब्धिगुणौ शून्यौ तत्र क्षेपतक्षणलामेन
लब्धिः फलं स्यात् इत्युपपन्नं सर्वम् ।

इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाप्ती ॥

व्याख्या—इष्टेति । स्वस्य स्वस्य हरः स्वस्वहरः, इष्टेन आहतः, इष्टाहतः,
इष्टाहतश्चासौ स्वस्वहरश्च इष्टाहतस्वस्वहरः, तेन इष्टाहतस्वस्वहरेण
युक्ते गुणाप्ती गुणलब्धी बहुधा भवेतां इष्टेन गुणितं हरं गुणे प्रक्षिपेत्,
तेनैवेष्टेन गुणितं भाज्यं लब्धौ च प्रक्षिपेत् । एवमेते गुणाप्ती, इष्टकल्प-
नावशादनेकधा भवत इति ।

भाषा—कुट्टक की विधिसे सिद्ध किये हुए जो गुण लब्धि हो उनको इष्ट
उ गुणा किये हुए अपने अपने हर में जोड़ देने से अनेक गुण लब्धि होंगी ।
अर्थात् इष्ट गुणित हरको गुणमें जोड़ देने से तथा उसी इष्ट से गुणे हुए भाज्य
को लब्धि में जोड़ देने से अनेक गुण लब्धि इस प्रकार बन सकती हैं ।

अत्रोपपत्तिः ।

पूर्वोक्तकुट्टकेनैव—

गु० भा ± क्षे = हा • ल

∴ गु० भा ± क्षे + इ० भा • हा = हा • ल + इ० भा • हा •

∴ भा (गु + इ० हा) ± क्षे = हा (ल + इ० भा)

∴ $\frac{\text{भा (गु + इ० हा) } \pm \text{क्षे}}{\text{हा}} = \text{ल + इ० भा}$

हा

यद्यत्र गुणः = गु + इ० हा,

तदा लब्धिः = ल + इ० भा

पक्षद्वये “इ० भा • हा”
इदं युक्तं कार्यम् ।

अंतः “इष्टाहारास्वस्वहरेण युक्ते ते वा भवेतां बहुधा गुणाती”

इत्युपपन्नं जातम् ।

उदाहरणम्

एकविंशतियुतं शतद्वयं

यद्गुणं गणक पञ्चषष्टियुक् ।

पञ्चवर्जितशतद्वयोद्धृतं—

शुद्धिमेति गुणकं वदाशु तम् ॥२२॥

व्याख्या—हे गणक ? तादृशः कः गुणकोऽस्ति येनैकविंशतियुतं शतद्वयं गुणं पञ्चषष्टियुक् युक्तं कार्यं पञ्चवर्जितशतद्वयेनोद्धृतं भक्तं कार्यं तदा शुद्धिमेति, तदा तं गुणकमाशु वद ।

न्यासः—भाज्यः २२१ । हा १९५ । क्षेपः ६५ अत्र परस्परं भाजितयोर्भाज्यभाजकयोः शेषः १३ । अनेन भाज्यहारक्षेपा अपवर्त्तिता जाता दृढाः भाज्यः १७ । हा १५ । क्षे ५ । अनयोर्दृढभाज्य-हारयोः परस्परं भक्तयोर्लब्धमधोऽधस्तदधः क्षेपस्तदधः शून्यं निवेश्य-

मिति न्यस्ते जाता वली ७ । उपान्तिमेन स्वोध्वे हते

५

०

इत्यादिकरणेन जातं राशिद्वयम्

४० एतौ दृढभाज्यहाराभ्यामाम्यां १७ तष्टौ शेषमितौ लब्धिगुणौ ६
३५ १५ ५

अनयोः स्वतक्षणमिष्टगुणं क्षेप इत्यथवा लब्धिगुणौ २३ वा ४०
२० वा ३५

इत्यादि ।

भाषा—न्यास भाज्य २२१ । हार १९५ क्षेप ६५

यहां सब से पहिले अपवर्त्तनाद् ज्ञानने के लिये भाज्य २२१ में हार १९५ का भाग देने से १६ शेष बचा, इसका १९५ हार में भाग दिया फिर १३ शेष

बचा । इसका पहिले हार २६ में भाग दिया अब शेष कुछ नहीं बचा, इसलिये १३ यही अपवर्त्तनाङ्क सिद्ध हुआ क्योंकि यह अन्त्य में शेष रहा है, इससे उक्त भुज्य हार क्षेत्र अपवर्त्तित हो जायेंगे अब इससे अपवर्त्तित हुए भाज्य हार क्षेत्र भाज्य १७ । हा १५ । क्षेत्र ५ । अब इन दृढसंज्ञक भाज्यहार क्षेत्रों में भाज्य-हारों के आपस में भाग देने से जो लब्धि मिली उन्हें एक के नीचे एक इस नियम से स्थापन करने से और उनके नीचे क्षेत्र, क्षेत्र के नीचे शून्य रखने से बली निष्पन्न हुई । इसलिये—

बली १			
७		४०	६ ल
५		३५	५ गु
०			

यहां उपान्तिम अङ्क ५ है, उसको उससे ऊपरवाले ७ से गुणने से ३५ हुए इसमें अन्त्य ० को जोड़ने से ३५ ही रहे फिर उपान्तिम ३५ से ऊपर के अङ्क १ को गुणा तो ३५ हुआ, इसमें अब अन्त्य ५ को जोड़ा तो ४० हुए । इस प्रकार ऊपर की तरफ क्रिया करते जाओ, इस प्रकार से जब बली के सब अङ्क समाप्त हो जायेंगे तो अन्त में दो राशि ही रहेगी । जैसे यहां पर १ से ऊपर कोई अङ्क नहीं है, इसलिये ४० । ये ही दो राशि रही, अब इन्हें दृढ भाज्यहार से

तष्टित करने से शेष रहे ६ ये भी क्रम से लब्धिगुण हुए । यहां “इष्टाहत-स्वस्वहरेण युक्ते” इत्यादि सूत्र के अनुसार इष्ट कल्पना करने से अपने अपने हर १७।१५ से गुणने पर १७।१५ ही हुए । इन्हें लब्धिगुण में जोड़ने से २३ ल ये दूसरे लब्धि गुण हुए । इसी प्रकार २ इष्ट मानने से ४० । और ३ इष्ट मानने से ५७ ल । इसी प्रकार इष्टकल्पना करने से बहुधा गुणलब्धि हो जाती है ।

आलाप—पहिले छोटे स्वरूप का ५ गुण है उससे २२१ को गुणा किया गुणनफल ११०५ हुआ, इसमें क्षेत्र ६५ जोड़ा ११७० योगफल हुआ, इसमें हार १९५ का भाग दिया तो निःशेषता हो जाती है । इसलिये यह प्रश्न शुद्ध है । और यही प्रश्न था । इसी प्रकार हरएक गुण पर से आलाप मिलाकर निःशेषता देख लेनी चाहिये । इसलिये यहां के प्रत्येक गुण से भी आलाप में निःशेषता इसी प्रकार रहेगी, यह स्पष्ट हुआ ।

उदाहरणम्—

शतं हतं येन युतं नवत्या

विवर्जितं वा विहृतं त्रिषष्ट्या ।

निरग्रकं स्याद्वद मे गुणं तं—

स्पष्टं पटीयान् यदि कुट्टकेऽसि ॥२३॥

व्याख्या—शतं येन गुणेन हतं नवत्या युतं त्रिषष्ट्या विहृतं निरग्रकं स्यात्तं गुणं वद, वियोगेऽप्युदाहरणं नवत्या विवर्जितं वेति, अर्थात् शतं येन हतं नवत्या विवर्जितं त्रिषष्ट्या विहृतं निरग्रकं स्यात्तं गुणं च वद । यदि त्वं कुट्टके कुट्टकविधौ पटीयान् अतिशयेन पटुरसि ।

न्यासः । भा १०० । हा ६३ । क्षे ९० ।

अत्र वल्ली	१		
	१		
	१	उपान्तिमेनेत्यादिना जातं राशिद्वयम्	
	२	२४३०	
	२	१५३० ।	
	१		
	९०	पूर्ववल्लब्धिगुणौ ३०	
	०	१८ । अथवा	
		भाज्यक्षेपौ दशभिरपवर्त्तितौ—	

भा १० । हा ६३ । क्षे ९ ।

एभ्योऽपि पूर्ववद्वल्ली	०	उपान्तिमेनेत्यादिना राशिद्वयम्	
	६	२७	
	३	१७१ ।	
	९		
	०	पूर्ववज्जातौ लब्धिगुणौ ७	
		४५ ।	

अत्र लब्धयो विषमा इति स्वतक्षणाभ्यामाभ्यां १० । शोधितौ ६३

जातौ लब्धिगुणौ ३
१८ । अत्र लब्धिर्न ग्राह्या गुणमभाज्ये क्षेपयुते
हरभक्ते लब्धिश्च ३० । अथवा भाज्यक्षेपापवर्त्तनेन १० पूर्वानीता-
लब्धिर्गुणिता जाता सैव लब्धिः ३० ।

अथवा हारक्षेपौ ननभिरपवर्त्तितौ

भा १०० । हार ७ । क्षे १०

पूर्ववद्वल्ली	१४	ततो जातं राशिद्वयं ४३० तक्षणे कृते ३०
	३	
	१०	
	०	
		जातं ३० २ हारक्षेपापवर्त्तनेन ९ गुणं

सगुण्य जातौ लब्धिगुणौ तावेव ३०
१८ ।

अथवा भाज्यक्षेपौ चाषवर्त्य, न्यासः—

भा १० । हा ७ क्षे १

अत्रजाता वल्ली	१	पूर्ववज्जातं राशिद्वयम् ३ तक्षणाज्जातं तदेव ३ । भाज्यक्षेपापवर्त्तनेन क्रमेण लब्धिगुणौ गुणितौ जातौ तावेव ३० गुणलब्ध्योः स्वहारौ
	२	
	१	
	०	

क्षेपावित्यथवा लब्धिगुणौ १३० । वा २३० इत्यादि । योगजे गुणासी
८१ १४४

१८ स्वतक्षणाभ्यामाभ्यां ६३ शुद्धे जाते नवतिशुद्धौ गुणासी
३० १००

४५ । वा १०८ वा १७१ इत्यादि ।
७० १७० २७०

भाषा—ऐसा कौन गुण है जिसे गुणा हुआ सौ नब्बे से युक्त हुआ और

तिरसठ से भाग दिया हुआ निःशेष हो जाय, अथवा ऐसा कौन सा गुण है कि जिससे गुणित नब्बे से हीन और तिरसठ से भाग दिया हुआ सौ निःशेष हो जाय ।

न्यासः—भाज्य १०० । हार ६३ । क्षेप ९० इसलिये यहां हार भाज्यों के परस्पर भाग देने से १ शेष रहा, इसलिये यही अपवर्तनाङ्क हुआ, उससे अपवर्तन न देकर उक्त प्रकार से बली साधन की ।

बली	१	२४३०	३० ल
	१	१५३०	१८ गु
सम है	१	यहां पर उपान्तिमेन, स्वीध्वं हतेऽन्त्येन युते तदन्त्यं	
	२	त्यजेन्मुहुः स्यादिति राशियुग्मम्” इस प्रकार के	
इसलिये धन-	२	अनुसार उपरोक्त दो राशि सिद्ध हुई इन्हें अपने अपने	
क्षेप में गुणलब्धि	१	हार से तष्टित करने से लब्धिगुण हुए ३० ल ये	
आई ।	९०	१८ गु	
	०	लब्धि गुण धनक्षेप में हुए क्योंकि समबली है । यहां उत्तर धनक्षेप में आया अपने	
		तक्षण में घटने पर लब्धिगुण ७० ल ऋण क्षेप की स्थिति के आए ।	
		४५ गु	

अथवा भाज्य क्षेप में १० का अपवर्तन देनेसे भाज्य १० हार ६३ ।
क्षेप = ९ यहां उक्त नियमानुसार बली

विषम	०	यहां भी पूर्वप्रकार से ही दो राशि हुए २७	
बली	६	१७१	
	३	तष्टित करने से ७ ये हुए । लब्धि विषम है इस-	
	५	लिये अपने अपने तक्षण १० में घटाने से तष्टित	
	०	१३	

होकर ३ यह लब्धिगुण आए । परन्तु ये वास्तव नहीं किन्तु भाज्य को गुण से गुण कर क्षेप जोड़ कर उसमें हार का भाग देने से वास्तव लब्धि ३० आई । अथवा पहिली ही लब्धि ३ को अपवर्तनाङ्क १० से गुणने पर ३० यही लब्धि वास्तव हुई इसीलिये ३० ल ये ही वास्तविक हुए । इससे यह स्पष्ट सिद्ध हुआ कि यदि भाज्य और क्षेपमें अपवर्तन दिया जाता है तो लब्धि में ही विकृति आती है इस अपवर्तनाङ्क से गुणी हुई यह लब्धि वास्तविक लब्धि होती है ।

अथवा हार क्षेप में नौ ९ का अपवर्तन देने से भाज्य १०० । हार ७ ।
क्षेप १० इससे गुण लब्धि साधन करते हैं ।

वल्ली	१४	४३०	उक्त नियम से दो राशि हुए । इन्हें
	३	३०	
	१०	तद्वित करने से ३० ल	लब्धि गुण हुए । अब यहां
	०	२ गु	
		गुण २ को अपवर्तनाङ्क ९ से गुणने से वास्तव गुण	

१८ हुआ इसलिये पहिले के लब्धि गुण $\frac{३०}{१८}$ ये हुए । इससे यहां स्पष्ट यह
आशय निकला कि यदि क्षेपक और हार में अपवर्तन दिया जाय तो गुण
में विकृति होती है इसलिये अपवर्तनाङ्कसे इस गुण को गुणने से वास्तव
गुण होता है ।

अथवा भाज्य क्षेप में दश से अपवर्तन देकर फिर हार क्षेप में नौ का अपवर्तन
देने से हुए भाज्य १० । ह ७ । क्षेप १ ।

वल्ली समा	१	३	यहां भी उपरोक्त नियम से दो राशि ३
	२	२	२
	१	हुए इसलिये यहां २ को हार क्षेप के अपवर्तनाङ्क ९	
	०	से गुणने से वास्तव गुण १८ हुआ । और लब्धि ३	

को भाज्य क्षेप के अपवर्तनाङ्क १० से गुणने पर ३० लब्धि हुई इसलिये यहां
भी पहिले वाले ही लब्धि गुणक $\frac{३०}{१८}$ हुए और एक १ इष्ट कल्पना करने से

$\frac{१३०}{८१}$ लब्धि गुण हुए । २ इष्ट कल्पना करने से $\frac{२३०}{१४४}$ लब्धि गुण हुए । अब

धनक्षेप सम्बन्धि ये लब्धि गुण अपने अपने तक्षण $\frac{१००}{६३}$ में घटाने से ऋणक्षेप

सम्बन्धी $\frac{५०}{४५}$ ये लब्धि गुण हुए इसी प्रकार इष्ट कल्पना से ऋणक्षेप सम्बन्धि
लब्धि गुण भी बहुधा होंगे ।

इसलिये दोनों में अपवर्तन देने पर दोनों के अपवर्तनाङ्कों से आगत लब्धि
गुण को गुणन करने से वास्तव गुण लब्धि होंगे ।

उदाहरणम्

यद्गुणा क्षयगषष्टिरन्विता

वर्जिता च यदि वा निभिस्ततः ।

स्यात्रयोदशहता निरग्रका-

तं गुणं गणक मे पृथग्वद ॥२४॥

रथोद्धतयाह । भो गणक ? क्षयगषष्टिर्यद्गुणा येन गुणिता, ततो यदि त्रिभिर्युक्ता अन्विता वा वर्जिता वियुक्ता, त्रयोदशहता त्रयोदशभिर्विभक्ता सती निरग्रका निःशेषा स्यात् तं गुणं मे पृथक् पृथक् वद ।

न्यासः । भाज्यः ६० । क्षेपः ३ । हारः १३ ।

प्राग्वज्जाते धनभाज्ये धनक्षेपे गुणासी ११ । एते स्वतक्षणा-

भ्यामाभ्यां १३ शुद्धे जाते ऋणभाज्ये धनक्षेपे २ । अत्र भाज्यभाज-
६० कयोर्विजातीययोर्भागहारेऽपि चैवं निरुक्तमित्युक्तत्वाल्लब्धेः ऋणत्वं
ज्ञेयम् २ । पुनरेते स्वतक्षणाभ्यामाभ्यां १३ शुद्धे जाते ऋणभाज्ये
६०

ऋणक्षेपे गुणासी ११ ।

ऋणभाज्ये ऋणक्षेपे धनभाज्यविधिर्भवेत् ।

तद्वत् क्षेपे ऋणगते व्यस्तं स्यादृणभाज्यके ॥

धनभाज्योद्भवे तद्वद् भवेतामृणभाज्यजे इति मन्दावबोधार्थं
मयोक्तम् । अन्यथा “योगजेतक्षणाच्छुद्ध” इत्यादिनैव सिद्धं यतः ऋणधन-
योगो वियोग एव । अतएव भाज्यभाजकक्षेपाणां धनत्वमेव प्रकल्प्य-
गुणासी साध्ये ते योगजे भवतः । ते स्वतक्षणाभ्यां शुद्धे वियोगजे
कार्ये । भाज्ये भाजके वा ऋणगते परस्परभजनाल्लब्धयः ऋणगताः
स्थाप्या इति किं तेन प्रयासेन तथाकृते सति भाज्यभाजकयोरेकस्मिन्
ऋणगते गुणासी “द्वौराशी क्षिपेत्तत्र-” इत्यादिना परोक्तसूत्रेण लब्धौ
व्यभिचारः स्यात् ।

भाषा—वह कौन सा गुण है जिससे ऋण साठ को गुण देते हैं और उधमें तीन जोड़ या घटा देते हैं तेरह का भाग देते हैं तो निःशेष होता है ।

न्यासः—भा ६० । हार १ ३ । क्षेप ३ । नियमानुसार वल्ली साधन की ।

विषमवल्ली	४	६९	अपने तक्षण ६० से तष्टित करने पर ९ ल
	१	१५	१३ २ गु
	१	हुए यहां लब्धि विषम है, इस कारण अपने-अपने	
	१	तक्षण ६० में शुद्ध करने पर ५१ ल	
	१	१३ ११ गु	हुए ये लब्धि
	३	गुण धनभाज्य धनक्षेप सम्बन्धी हैं । अब इन्हें फिर	

अपने अपने तक्षणों ६० में ही शुद्ध किया तो ९ ल २ गु ये ही लब्धिगुण ऋणभाज्य, धनक्षेप के हुए । यहां पर भाज्य भाजकों के विजातीय होने से “भागहारेऽपि चैवं निरुक्तम्” इस सूत्र के अनुसार लब्धि ९ ऋण माना । अब इन लब्धि गुण को ६० इन तक्षणों में शुद्ध करने से ऋण भाज्य ऋणक्षेप में लब्धि गुण ५१ ११ हुए यहां पर भी हार भाज्य के विजातीय होने से लब्धि को ५ ऋण ही माना ।

इसी प्रकार ऋणभाज्य में बिना प्रयास ही कुट्टक की सिद्धि होने पर भी पूर्वार्चचार्यों ने वृथा उद्योग किया है । जैसे—‘भाज्ये भाजके वा ऋणगते परस्परभजनाल्लब्धयः ऋणगताः स्थाप्याः इति कित्तेन प्रयासेन’ इस उक्ति का अर्थ भाज्य अथवा भाजक के ऋण होने पर उनके आपस में भाग देने से जो लब्धि आती है उन्हें ऋणगत स्थापित करो अर्थात् उन सब लब्धियों के उपर ऋण का विन्दु देकर वल्ली में लिखो, ऐसा प्रयास करने का क्या प्रयोजन है क्योंकि उक्त बात की सिद्धि चड़ी सुगमता से होती है । और प्रयासमात्र ही नहीं है किन्तु लब्धि में व्यभिचार भी आता है ।

जैसा प्रकृत उदाहरण में भाज्य ६० । क्षे ३ ।

हार १३

वल्ली
विषम हुई

४
१
१
१
१
३
०

६९ तष्टित करने पर ९ ल
१५ १३ २ गु लब्धिगुण
हुए ।

वाद में दो राशि $\frac{१}{१५}$ हुई तष्टित करने से $\frac{१}{२}$ हुई लब्धि के विषम होने से अपने अपने तक्षणों में शुद्ध करने से ऋणभाज्य धनक्षेप में लब्धिगुण हुए $\frac{५}{११}$ यह लब्धि व्यभिचरित होती है क्योंकि ११ से भाज्य ६० को गुणने से ६६० हुए इनमें क्षेप ३ जोड़ने से ६५७ हुए, अब इनमें हार १३ का भाग देने से ५० लब्धि आई और शेष ७ रहा, यहां शेष रहने से गुण भी व्यभिचरित होगा, लब्धि तो एक उपलक्षण है इसलिये गुण में भी व्यभिचार होता है। लब्धि में व्यभिचार का निश्चय होने से $\frac{१}{२}$ लब्धि लब्धिगुण आये थे उनको ज्यों का त्यों रक्खा। अब इसमें आलाप मिलाया, भाज्य ६० को २ से गुणा किया १२० हुआ इसमें ३ क्षेपक को जोड़ा ११७ हुए १३ हार का भाग दिया $\frac{१}{२}$ हुए यह लब्धि हुई। यहां आलाप तो ठीक मिल गया परन्तु “एवं तदैवात्र यदा समास्ताः स्युर्लब्धयश्चेद्विषमास्तदानीम्। यथागतौ लब्धिगुणौ विशोध्यौ स्वतक्षणाच्छेषमितौ तु तौ स्तः” इस सिद्धान्त से विरोध आता है। क्योंकि लब्धि विषम आई है। और ऐसा मानने से भाज्य, भाजक, क्षेप, इनके धन होने में और लब्धियों के विषम होने में व्यभिचार ज्यों का त्यों बना रहता है। इसी उदाहरण में उक्त रीति से लब्धिगुण $\frac{१}{२}$ सिद्ध हुए, अब आलाप में भाज्य ६० धन को २ से गुणा किया १२० हुआ इसमें क्षेपक ३ जोड़ने से १२३ हुए इसमें हार १३ का भाग देने से निःशेषता नहीं होती। यदि यह माना जाय कि धनात्मक विषम लब्धि में अपने अपने तक्षणों में शोधन करना आवश्यक है ऋणात्मक में नहीं, ऐसा कहना ठीक नहीं है क्योंकि उक्त दोष का परिहार नहीं होता, जैसा इसी उदाहरण में हारमात्र के ऋण कल्पना करने से लब्धिगुण हुए $\frac{१}{२}$ अब भाज्य ६० को गुण २ से गुणा किया १२० हुए इसमें क्षेपक ३ जोड़ा १२३ हुए १३ का भाग दिया निःशेषता नहीं होती।

और समलब्धि में भी व्यभिचार होता है जैसा वक्ष्यमाण उदाहरण के भा

१८, हार ११ और क्षेप १० हैं—

उक्त रीति के अनुसार ५० तद्धित करने से १४ लब्धि
३० गुण हुए।

वल्ली

अब यहां पर भी भाज्य १८ को ८ से गुणने से १४४

१० हुए इसमें क्षेप १० जोड़ने से १३४ हुए अब इसमें हार ११

० का भाग देने से १२ लब्धि हुई २ शेष बचे, इस प्रकार

सर्वत्र अनुक्त भी बुद्धिमान् लोग जानते हैं।

यहां पर हार के ऋण होने से समलब्धि में और भाज्य के ऋण होने से विषमलब्धि में प्राचीन रीति से लब्धि गुण व्यभिचरित होते हैं।

उदाहरणम्—

अष्टादश हताः केन दशाढ्या वा दशोनिताः।

शुद्धं भागं प्रयच्छन्ति क्षयगैकादशोद्धृताः ॥२५॥

स्पष्टार्थम्।

न्यासः। भा १८। क्षे १० हा ११।

अत्र भाजकस्य धनत्वं प्रकल्प्य साधितौ लब्धिगुणौ १४ एतावेव
ऋणभाजके किन्तु लब्धेः पूर्ववदणत्वं ज्ञेयम्। तथा कृते जातौ लब्धि-
गुणौ १४। ऋणक्षेपे तु 'योगजे तक्षणाच्छुद्धे.....' इत्यादिना लब्धि-

गुणौ ४। भाजकस्य धनत्वे ऋणत्वे वा लब्धिगुणावेतावेव, परन्तु भाजके
भाज्ये वा ऋणगते लब्धेः ऋणत्वं सर्वत्र ज्ञेयम्।

भाषा—वह कौन सा गुण है जिससे अठारह को गुणा करें दस जोड़ें वा घटा दें और ऋण ग्यारह का भाग देते हैं तो निःशेष हो जाता है अर्थात् कोई शेष नहीं बचता पूरी लब्धि हो जाती है।

न्यास—भाज्य १८। क्षेप १० हार १

समवल्लो	१	५० । १४	अब यहां नियमानुसार वल्ली का साधन
	१	३० । ८	किया तो वाद में दो राशि हुई ५० । तद्धित
	१		करने से १४ हुए भाज्य हार और क्षेप इन
	१०		तीनों के घन होने से १४ ये लब्धि गुण हुए,
	०		

और हारमात्र के ऋण होने से भी वही लब्धि गुण हुए परन्तु यहां लब्धि मात्र को ही ऋणत्व होगा ।

क्योंकि “भागहारेऽपि चैवं निरुक्तम्” यह नियम है इसलिये ऋण भाजक में लब्धि गुण $\frac{14}{8}$ हुए अब ऋण क्षेपमें “योगजे तक्षणाच्छुद्धे” इस प्रकारसे लब्धि गुण हुए $\frac{8}{3}$ यहां भाजक घन अथवा ऋण होनेपर लब्धि गुण वही होंगे और हार के ऋण होनेसे लब्धि ऋण होगी । यहां सर्वत्र ऋणत्व के निमित्त अपने अपने लक्षणों में से जो शोधन करना कहा है सो तभी जानना चाहिये यदि भाज्यक्षेपों में कोई एक ऋण हो । और लब्धि को ऋण तभी जानो यदि भाज्य भाजकों में से कोई ऋण हो । यहां तो केवल हार ही ऋण है इस लिये लब्धि गुण $\frac{14}{8}$ में यहां लब्धि १४ ऋण हुई ।

आलाप को दृष्टि से भी $१८ \times ८ = १४४ + १० = १५४ \div ११ = १४$ यहां १४ लब्धि ऋण हुई । क्योंकि भाजक और लब्धि दोनों के ऋण होने से ही गुणनफल भाज्य के तुल्य घनात्मक में होगा ।

उदाहरणम्—

येन संगुणिताः पञ्च त्रयोविंशतिसंयुताः ।

वर्जिता वा त्रिभिर्भक्ता निरग्राः स्युः स को गुणः ॥२६॥

अत्रोदाहरणमनुप्रभाह । पञ्च येन गुणेन संगुणिताः त्रयोविंशति संयुताः वा त्रयोविंशत्या वर्जिता हीनाः त्रिभिर्भक्ता हृता निरग्राः निःशेषाः स्युः स गुणः कः, इति वद ।

न्यासः—भा ५ । हा ३ । क्षे २३ ।

अत्र वली	१	पूर्ववज्जातं राशिद्वयम् ४६ । अत्र तक्ष-
	१	२३
	२३	णेऽधोराशौ सप्त लभ्यन्ते, ऊर्ध्वराशौ तु
	०	नव लभ्यन्ते ते नव न ग्राह्याः । “गुणलब्धयोः

समं ग्राह्यं धीमता तक्षणे फलम्” त्यतः सप्तैव ग्राह्या इति जातौ लब्धिगुणौ

११ योगजौ । एतौ स्वस्वतक्षणाभ्यां शोधितौ जातौ ऋणक्षेपे ६ ।
२ १

“इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते” इति द्विगुणितौ स्वस्वहारौ क्षेप्यौ यथा धन-

लब्धिः स्यादिति कृते जातौ लब्धिगुणौ ४ । एवं सर्वत्र ज्ञेयम् ।

अथवा “हरतष्टे धनक्षेपे” इति न्यासः । भा ५ । हा ३ । क्षे २ ।

पूर्ववज्जातौ लब्धिगुणौ योगजौ ४ । एतौ स्वतक्षणाभ्यां शुद्धौ

१ जातौ वियोगजौ । क्षेपतक्षणलाभाद्व्या लब्धिरिति क्षेपतक्षणलाभेन
१

७ योगजलब्धिर्युता ११ जाता योगजैवलब्धिः । “शुद्धौ तु वर्जिता”

इति तक्षणलाभेन ७ लब्धिरियं १ वर्जिता ६ । धनलब्ध्यर्थं द्विगुणे

हरे क्षिप्ते जातौ तावेव लब्धिगुणौ ४ ।

“अथवा भागहारेण तष्टयोः” इति न्यासः । भा २ । हा ३ । क्षे २ ।

अत्रापि जातं राशिद्वयम् २ । अत्रापि जातः पूव एव गुणः २ ।

लब्धिस्तु “भाज्याद्धतयुतोद्धृतात्” इति गुणः २ । गुणितो भाज्यः १० ।

क्षेप २३ युतो हरभक्तो लब्धिः सैव ११ ।

भाषा—बह कौनसा गुण है जिससे पाँच को गुंते हैं, और उस गुणनफल में
तेईस जोड़ देते हैं या घटा देते हैं, फिर तीनका भाग देते हैं तो निरप्र होता है ।

इस उदाहरण में “गुणलब्धयोः समं प्राप्यम्, ‘हरतष्टे धनक्षेपे, ‘अथवा भाग-
हारेण तष्टयोः क्षेपभाज्ययोः’ इन तीनों सूत्रों के लक्षण का समन्वय है ।

न्यास—भाज्य = ५ । हार = ३ क्षेप = २३

१	४६	११ ल	४६
१	२३	२ गु	२३
२३			
०			

उक्त नियमानुसार दो राशि ४६ हुई
यहां तक्षण करने में नीचे की राशि से ७ सात
मिलते हैं और ऊपर की राशि से ९ मिलते हैं ।

परन्तु यहां ९ नहीं लेना चाहिये क्योंकि “गुणलब्धयोः समं प्राप्यं धीमता तक्षणे
फलम्”, इस सूत्रके अनुसार ७ ही लेना उचित है । इसी नियमसे ११ लब्धि
गुण हुए । ये योगज लब्धिगुण हैं, इसलिये ये अपने अपने तक्षणों में शुद्ध करने
से वियोगज हुए ९ यहां यदि धन लब्धि लेनी हो तो “इष्टाद्वतस्वस्वहरेण युक्ते”

इस नियम के अनुसार २ इष्ट मानने से लब्धि गुण ४ हुए ये ऋणक्षेप में धन
गुण लब्धि हुई । इस प्रकार इष्ट कल्पनासे धन गुण लब्धि सिद्ध होती हैं ।

अथवा “हरतष्टे धनक्षेपे” इस सूत्र के अनुसार न्यास—

भा ५ ± क्षे २

हार ३

१	४	उक्त नियमानुसार वली से ४	ये दो राशि बनी ये
१	२	योगज लब्धि गुण हुए	अपने अपने तक्षणों में शोधन
२		करने से वियोगज हुए १	यहां “क्षेपतक्षणलाभादया
०			

लब्धिः” इस सूत्र के अनुसार क्षेपतक्षणफल ७ को योगजलब्धि ४ में
जोड़ा तो ११ हुए और ‘शुद्धौ तु वर्जिता’ इस उक्ति के अनुसार वियोगज-
लब्धि १ में क्षेप तक्षणफल ७ को घटा देने से ऋण ६ हुए इस प्रकार वही
लब्धि गुण हुए ११ । ६ इस प्रकार दोनों लब्धि गुण कम से हुए ।

“अथवा भागहारेण तष्टयोः क्षेपभाज्ययोः—”

इस सूत्र के अनुसार न्यास में भा ५ ± क्षे २३ हार ३ । इस उदाहरण में
हार ३ है इससे भाज्य ५ में और क्षेप २३ में भाग दिया क्षे ९, २ क्रमसे बचे
इस लिये न्यास—

भाज्य = २ । क्षेप = २

हार = ३

वल्ली	०	४ ल	नियमानुसार लब्धि गुण हुए अब यहां भाज्या-
	१	२ गु	द्वतयुतोद्धृतात्, इस नियम से गुण २ को
	२		भाज्य ५ से गुणा किया तो १० हुआ और
	०		

क्षे २३ जोड़ देने से ३३ हुए इनमें ३ का भाग देने से लब्धि ११ हुई और गुण वही २ रहा । इस लिये लब्धि गुण ११ हुए ।

उदाहरणम्

येन पञ्च गुणिताः खसंयुताः

पञ्चषष्टिसहिताश्च तेऽथवा ।

स्युखयोदशहृता निरग्रका-

स्तं गुणं गणक कीर्त्तयाशु मे ॥२६॥

व्याख्या—रथोद्धृतयाह येन पञ्चेति । भो गणक ? पञ्च येन गुणकेन गुणिताः, खसंयुताः शून्ययुताः त्रयोदशहृताः, अथवा ते पञ्च येन गुणिताः पञ्चषष्टिसहिताः, उभयत्रैव त्रयोदशभक्ताः, निरग्रकाः निःशेषाः स्युः, तं गुणं मे आशु शीघ्रं कीर्त्तय वद ।

न्यासः—भा ५ । हा १३ । क्षे० । क्षेपाभावे गुणासी० । एवं पञ्च-

षष्टिक्षेपे ५ वा १३ इत्यादि ।

भाषा—ऐसा कौन गुण है जिससे पञ्च को गुण कर उसमें शून्य अथवा पैंसठ जोड़ देते हैं और तेरह का भाग देते हैं तो निरग्र होता है ।

यह उदाहरण “क्षेपाभावोऽथवा यत्र क्षेपः शुष्येद्धरोद्धृतः” इन दोनों नियमों को दिखलाने के लिये है । इस लिये दोनों नियमों के लिये न्यास । भाज्य = ५ ।

क्षेप = ० । अथवा भा ५ । क्षेप ६५ हार १३ ।

वहाँ प्रथम नियम के उदाहरण में क्षेप का अभाव है और दूसरे में क्षेप ६५ है हार १३ का भाग देने से शुद्ध होते हैं इसलिये दोनों स्थानों में

अन्य ही गुण हुआ और क्षेप में हार का भाग देने से ० । ५ फल हुए इस प्रकार लब्धि गुण ० । ५ सिद्ध हुए, “इष्टाहतस्वस्वहरेण” इत्यादि से यहां १ इष्ट मानने से लब्धि गुण हुए ५ । १३ । १० इस प्रकार इष्ट कल्पना करने से अनन्त लब्धि गुण होंगे ।

अथ स्थिरकुट्टके सूत्रं वृत्तम्

क्षेपं विशुद्धिं परिकल्प्य रूपं

पृथक् तयोर्गुणकारलब्धी ॥ ३६ ॥

अभीप्सितक्षेपविशुद्धिनिष्पत्तौ

स्वहारतष्टे भवतस्तयोस्ते ।

व्याख्या—प्रहगणिते महदुपयोगिनं स्थिरकुट्टकमुपजात्युत्तरार्धेनान्योपजातिपूर्वाधेन चोपदिशति क्षेपमिति—रूपमेकमितं क्षेपं धनक्षेपं विशुद्धिं ऋणक्षेपं वा परिकल्प्य तयोः रूपमितधनक्षेपर्णक्षेपयोः पृथक् ये गुणकारलब्धी स्यातां ते अभीप्सितेन प्रभोद्दिष्टेन धनक्षेपेण ऋणक्षेपेण वा निष्पत्तौ गुणिते स्वहारतष्टे स्वहारेण शेषोक्ते च तयोः भाज्यहारयोः गुणकारलब्धी भवतः ।

प्रथमोदाहरणे दृढभाज्यहारयोः रूपक्षेपस्य च न्यासः । भा १७

हा १५ क्षे १ । अत्रोक्तवद्गुणासी ७ एते अभीष्टक्षेपपञ्चगुणे स्व-

हारतष्टे जाते ५ अथ रूपशुद्धौ गुणासी ८ । एते पञ्चगुणे स्व-

हारतष्टे जाते १० । ते एवं सर्वत्र ।

अत्रोपपत्तिः ।

कुट्टकविधौ हि संभवे सति भाज्यो हारः क्षेपकश्च पूर्वमपवर्तनाद्धेन केनचिदपवर्तनीयस्ततः कुट्टकविधिना समीकरणेन जातौ पक्षौ भा० गु० क्षे = हा० ल ।

अत्र यदि क्षेपसंख्यया केवलं क्षेपमेवापवर्त्य भाज्यद्वारावनपवर्त्य च रूपतुल्येन

धनक्षेपेण, ऋणक्षेपेण वा कुट्टकविधिना गुणलब्धी साध्येते तदा क्षेत्रतुल्येनापवर्त्त-
नाङ्केन गुणलब्धिरूपौ क्रमशो भाज्यहारयोः गुणौ अवश्यमेव गुण्यौ, यतः
पक्षौसमौ । अतः 'क्षेपं विशुद्धिं परिकल्प्य रूपं पृथक् तयोर्ये गुणकारलब्धी । अभी-
प्सितक्षेपविशुद्धिनिध्न्यौ स्वहारतष्टे भवतस्तयोस्ते ॥ इत्युपपन्नम्—

न्यास—अब प्रथम उदाहरण के दृढ़भाज्यहार और रूपक्षेप इन पर से
गणित दिखलाते हैं । भाज्य = १७ । क्षेत्र = १ । हार = १५ यहाँ उक्त नियम से
७ | ये गुणलब्धि हुई, इनको अपने अपने हार से तष्टित करने से वही पहिले
वाली गुणलब्धि हुई ५ और रूपशुद्धि में गुणलब्धि हुई ६ | इन्हें पांच से गुण
कर अपने अपने हार से तष्टित करने से पञ्च शुद्धि में गुणलब्धि हुई १० | इस
प्रकार सब जगह जानना चाहिये ।

अस्य गणितस्य ग्रहगणिते महानुपयोगः । तदर्थं किञ्चिदुच्यते—

कल्प्याथ शुद्धिर्विकलावशेषं

षष्टिश्च भाज्यः कुदिनानि हारः ॥३७॥

तज्जं फलं स्युर्विकलागुणस्तु

लिप्ताग्रमस्माच्च कलालवाग्रम् ।

एवं तद्धर्च च तथाधिमासा-

वमाग्रकाभ्यां दिवसा रवीन्द्रोः ॥३८॥

ग्रहस्यविकलावशेषात् ग्रहाहर्गणयोरानयनोपायं सार्धोपजातिकयाह ।
एतदाचार्यैः व्याख्यातम् । “ग्रहस्य विकलावशेषाद् ग्रहाहर्गणयोरान-
यनम् तद्यथा —षष्टिर्भाज्यः कुदिनानि हारः विकलावशेषं शुद्धिरिति
प्रकल्प्य साध्ये गुणासी । तत्र लब्धिर्विकलाः स्युर्गुणस्तु कलावशेषम् एवं
कलावशेषं शुद्धिः, षष्टिर्भाज्यः, कुदिनानि हारः, फलं कलाः, गुणोऽश-
शेषम् । एवमंशशेषं शुद्धिर्लिशद्भाज्यः कुदिनानि हारः फलं भागाः
गुणो राशिशेषम् ।

एवं राशिशेषं शुद्धिर्द्वादशभाज्यः, कुदिनानि हारः फलं गतराशयः गुणो भगणशेषम् ।

एवं कल्पभगणाः भाज्यः, कुदिनानि हारः भगणशेषं शुद्धिः फलं-गतभगणाः, गुणोऽहर्गणः स्यात् ।

अस्योदाहरणानि प्रश्नाध्याये ।

एवं कल्पाधिसा भाज्यः । रविदिनानि हारः । अधिसाशेषं शुद्धिः । लब्धिर्गताधिसाः । गुणो गतरविदिवसाः ।

एवं कल्पावमानि भाज्यः । चान्द्रदिवसा हारः । अवमशेषं शुद्धिः । फलं गतावमानि । गुणो गतचान्द्रदिवसा इति ।”

भाषा—अब यहां उदाहरण कल्पना से कल्पकुदिन १९ कल्पग्रह भगण ९ और अहर्गण १३ मानकर उक्त विषय का समन्वय करते हैं । अनुपात यह हुआ, कि कल्प के कुदिन में कल्प के ग्रहभगण पाते हैं तो इष्ट कुदिन में अर्थात् अहर्गण में क्या, इस अनुपात द्वारा “ध्युचरचक्रहतो दिनसंचयः क्वहहतो भगणादि फलं ग्रहः—” सिद्धान्तशिरोमणि के इस प्रकार से ग्रह सिद्ध किये जाते हैं । वास्तव में १३ अहर्गण को ९ भगण से गुणने से ११७ हुए इसमें कुदिन १९ का भाग देने से ग्रहभगण ६ लब्धि मिले ३ शेष रहे, इसको १२ से गुणने पर ३६ हुए इसमें कुदिन १९ का भाग देने से राशि १ लब्धि हुई राशि शेष १७ अवशिष्ट रहा, इसको ३० से गुणा तो ५१० हुए इसमें कुदिन १९ का फिर भाग दिया लब्धि २६ मिली अंश शेष १६ को फिर ६० से गुणा किया ९६० हुए इनमें कुदिन १९ का भाग दिया लब्धि ५० आई कलाशेष १० को फिर ६० से गुणा किया ६०० हुए इनमें १९ का भाग दिया विकला ३१ लब्धि मिली विकला शेष ११ हुए इससे आगे लब्धि अनावश्यक होने से छोड़ दिया ।

इस प्रकार भगणादिग्रह ६।१।२६।५०।३१ हुए, इस पर से विलोमविधि से ग्रह और अहर्गण का साधन करते हैं, वहां ‘कल्प्याथ शुद्धिर्विकलावशेषमिति’ इस नियम के अनुसार भाज्य, हार, और क्षेप इस प्रकार बने । भाज्य = ६० । क्षेप = १ । हार = १९ ।

कुट्टकविधि के अनुसार वल्ली सम हुई ।

२०९	हुए तष्टित करने से	३ । २०९ । २९ ल
६६		६ । ६६ । ८ गु
२९	योगजेतक्षणाच्छुद्धे—	९
८		०

इस नियम से ऋण क्षेप में लब्धि गुण $\frac{३१}{१०}$ हुए यहां पर लब्धि ३१ विकला है और गुण १० यह कला शेष है। अब इस कलाशेष १० को ऋणक्षेप मानकर कला के साधनार्थ कुट्टक करते हैं।

यहां भाज्य ६०। क्षेप १०। हार १९

उक्त नियम से बली सम हुई दो राशि।

१९० ३। १९०। १०। ५० ल
६० हुए तद्धित करने से योगज लब्धिगुण ६। ६०। ३। १६ गु
१८

ल १० हुए अपने अपने तक्षण में शुद्ध करने
गु ३

से ऋण क्षेप में लब्धिगुण हुए $\frac{५०}{१६}$ ल यहां लब्धि ५० कला है और गुण १६ अंश शेष है। अब अंश शेष १६ को ऋणक्षेप कल्पना करके अंश को जानने के लिये फिर कुट्टकविधि आवश्यक है।

भाज्य ३। क्षे १६। हार १९

नियमानुसारबली विषम हुई तद्धित करने १। १७६। २६ ल
पर २६ ल हुए। विषमबली होने से और १। ११२। १७ गु
१७ गु १
ऋणक्षेप के होने से दो बार शोधन से २
२६ ल १
१७ गु रहे। १६
०

लब्धि २६ अंश है और गुण १७ राशिशेष है। अब राशिशेष १७ को ऋणक्षेप मानकर राशि ज्ञान के लिये कुट्टक फिर करना है।

भाज्य = १२। क्षे = १७। हार = १९

कुट्टकविधि से बली विषम हुई दो राशि ० = ८५। १ ल
८५ १ = १३६। ३ गु
१३६ हुए तद्धित करने पर १ ल हुए विषम १
३ गु १
बली ऋणक्षेप होने पर दो बार शोधन करने १
से लब्धिगुण १ ही रहे। १७
०

यहां लब्धि १ राशि है और गुण ३ भगण शेष है। अब भगण शेष ३ को ऋणक्षेप कल्पना करके कुट्टकविधि से—

भाज्य = ९ । क्षेप = ३ । हार = १९ । उक्त नियम से वल्ली हुई सम
 ३ ल हुए शुद्ध ३ करने पर ६ ल लब्धि ० = ३ । ६
 ६ गु ० १३ गु २ = ६ । १३
 गुण हुए यहां लब्धि ६ गत भगण है और ३
 गुण १३ अहर्गण है, यही सिद्ध करना था । ०

कल्प्याऽथ शुद्धिरिति—

अस्योपपत्तिस्तथाऽस्योपयोगः ग्रहगणितेऽतस्तद्वशेनोपपत्तिः प्रदर्श्यते यदि
 कल्पकुदिनैः कल्पग्रहभगणास्तदाऽहर्गणेन किमिति—अनुपातेन-भगणादिका ग्रहा
 आयान्ति—

$$\frac{\text{कप्र} \cdot \text{भ} \cdot \times \text{अ}}{\text{ककु}} = \text{गतभगणाः} + \frac{\text{भगणशे}}{\text{ककु}}$$

$$\therefore \frac{\text{कप्र} \cdot \text{भ} \times \text{अ} \cdot - \text{भशे}}{\text{ककु}} = \text{गतभगणाः}$$

$$\therefore \frac{१२ \times \text{भ} \cdot \text{शे}}{\text{ककु}} = \text{गरा} \cdot + \frac{\text{रा} \cdot \text{शे}}{\text{ककु}}$$

$$\therefore \frac{१२ \times \text{भ} \cdot \text{शे} - \text{रा} \cdot \text{शे}}{\text{क} \cdot \text{कु}} = \text{गरा} \cdot$$

$$\text{एवं} \quad \frac{\text{रा} \cdot \text{शे} \times ३०}{\text{ककु}} = \text{गअं} \cdot + \frac{\text{अं} \cdot \text{शे}}{\text{ककु}}$$

$$\therefore \frac{\text{रा} \cdot \text{शे} \times ३० - \text{अं} \cdot \text{शे}}{\text{ककु}} = \text{गअं} \cdot$$

$$\therefore \frac{\text{रा} \cdot \text{शे} \times ३० - \text{अं} \cdot \text{शे}}{\text{ककु}} = \text{गअं} \cdot$$

$$\text{एवमेव} \quad \frac{\text{अं} \cdot \text{शे} \times ६०}{\text{ककु}} = \text{कला} + \frac{\text{कला शे}}{\text{ककु}}$$

$$\therefore \frac{\text{अं} \cdot \text{शे} \times ६० - \text{कलाशे}}{\text{ककु}} = \text{ग} \cdot \text{क} \cdot$$

$$\text{एवं} \cdot \quad \frac{\text{कशे} \cdot \times ६०}{\text{क} \cdot \text{कु}} = \text{विकला} + \frac{\text{वि} \cdot \text{शे}}{\text{ककु}}$$

$$\therefore \frac{\text{क} \cdot \text{शे} \times ६० - \text{वि} \cdot \text{शे}}{\text{क} \cdot \text{कु}} = \text{विक}$$

अतः कल्प्याऽथ शुद्धिर्विकलावशेषं षष्टिश्चभाज्यः कुदिनानिहार इत्युपपन्नम् ।

अथ संश्लिष्टकुट्टके करणसूत्रं वृत्तम्

एको हरश्चेद् गुणकौ विभिन्नौ

तदा गुणैक्यं परिकल्प्य भाज्यम् ।

अग्रैक्यमग्रं कृत उक्तवद्यः

संश्लिष्टसंज्ञः स्फुटकुट्टकोऽसौ ॥ २९ ॥

व्याख्या—एकस्मिन् गुणके कुट्टकविधानेन राशिज्ञानमभिधायेदानों बहुषु गुणेषु राशिज्ञानमुपजात्याह, एकोहरश्चेदिति । चेत् यदि एकः हरः, गुणकौ विभिन्नौ तदागुणैक्यं गुणयोर्गुणानां वा ऐक्यं योगं भाज्यं परिकल्प्य, अग्रैक्यं, अग्रयोः, अग्राणां वा ऐक्यं, अग्रं शेषं परिकल्प्य ऋणक्षेपमिति परिकल्प्य च उक्तवन्मिथो भजेत्तावित्यादिना कुट्टकविधिना यो गुणः कृतो निर्णतः, असौ संश्लिष्टसंज्ञः स्फुटकुट्टकः स्यात् संश्लिष्टानामेकीभूतानां बहूनामग्राणां विषयीभूतः कुट्टको जायत-इति संश्लिष्टसंज्ञः अन्वर्थनामायं कुट्टकः ।

भाषा—यदि हर एक हो और गुण अनेक हों तो उन गुणकों के ऐक्य को भाज्य और शेषों के ऐक्य को ऋणक्षेप कल्पना करके कहे हुए प्रकार के अनुसार जो कुट्टक होता है उसको संश्लिष्टकुट्टक कहते हैं ।

अत्रोपपत्तिः ।

एकोहरश्चेदिति—

कुट्टकविधिना—

भा • गु ± क्षे = हा • ल

भा • गु ± क्षे = हा • ल

पक्षयोर्योगेन = भा (गु + गु) ± (क्षे + क्षे) = हा • ल ± हा • ल

भा (गु + गु) ± (क्षे + क्षे) = हा (ल ± ल)

∴ भा (गु + गु) ± (क्षे + क्षे) = ल + ल

हा •

अत्र यदि गु + गु = गुणः, क्षे + क्षे = क्षेपः ।

तदा ल + ल = लब्धिः ।

अत उपपन्नम् । अत्र विषये पूज्यपादानां महामहोपाध्यायानां-पण्डितसुधाकर-द्विवेदिमहोदयानामुपपत्तिः महती समीचीना सा चोच्यते ।

गु० भा = हा० ल + शे, ततः गु० भा - शे = हा० ल.....(१)

गु० भा = हा० ल + शे, ततः गु० भा - शे = हा० ल.....(२)

अत्र “गु” अनेन पूर्वपक्षौ, (गु) अनेन परपक्षौ संगुण्य जातौ

गु० गु० भा - गु० शे = गु० हा० ल.....(१)

गु० गु० भा - गु शे = गु० हा० ल.....(२)

अनयोरन्तरेण—

गु० गु० भा - गु० शे $\propto$ (गु० गु० भा - गु $\times$ शे) = गु० हा० ल $\propto$ गु० हा० ल

गु० शे $\propto$ गु० शे = हा (गु० ल $\propto$ गु० ल)

$\therefore \frac{\text{गु० शे} \propto \text{गु० शे}}{\text{हा}} = \text{गु० ल} \propto \text{गु० ल}$

अतो मिथो गुणगुणितशेषयोरन्तरं हारहतं शुद्धिमेति तदा प्रश्नोऽखिलोऽन्यथा
नेति सुधीभिश्चित्यमित्युपपन्नं सर्वम् ।

उदाहरणम्—

कः पञ्चनिम्नो विहृतस्त्रिषष्ट्या—

सप्तावशेषोऽथ स एव राशिः ।

दशाहतः स्याद्विहृतस्त्रिषष्ट्या—

चतुर्दशाग्रो वद राशिमेनम् ॥ २७ ॥

व्याख्या—संश्लिष्टकुट्टकोदाहरणमुपजात्याह कः पञ्चेति । कः
राशिः पञ्चनिम्नः त्रिषष्ट्या विहृतः सप्तावशेषः स्यात् अथ स एव राशिः
दशाहतः त्रिषष्ट्या विहृतः चतुर्दशाग्रः चतुर्दशमितशेषः स्यात्,
एनं राशिं वद ।

न्यासः—अत्र गुणैक्यं भाज्यः अयमेवराशिः । अग्रेक्यं शुद्धि-
रिति—न्यासः ।

भा १५, हा ६३, क्षेपः २१ ।

पूर्ववज्जातो गुणः १४ लब्धिः ३ ।

इति श्रीभास्कराचार्यविरचिते बीजगणिते कुट्टकाध्यायः ।

भाषा—वह कौन सा राशि है, जिसको पांच से गुणकर तिरसठ का भाग देते हैं तो सात शेष रहता है और उसी राशि को दस से गुणकर तिरसठ का भाग देते हैं तो चौदह शेष रहता है ।

यहां अब उदाहरण का न्यास दिखलाते हैं । ५।१० इन गुणकों के ऐक्य १५ को भाज्य माना ७।१४ इन शेषों के ऐक्य २१ को ऋण क्षेप माना तब कुट्टक के लिये न्यास—

भाज्य = १५ । क्षेप = २१ । हार = ६३ इनमें ३ का अपवर्तन दिया तो क्रम से दृढ़ भाज्यहार, क्षेप, हुए भाज्य ५ । क्षे ७ हार २१ कुट्टकविधि से बली साधन की ।

समबली हुई दो राशि ७ हुए अपने ० = ७ । २ ल
२८ हुए अपने ४ = २८ । ७ गु
अपने हरो से तद्धित किया २ लब्धि गुण हुए ५

अब ऋणक्षेप होने से अपने अपने हरो में से घटाने पर ऋणक्षेप में लब्धि गुण ३ ल
१४ गु ।

अभ्यासार्थ उदाहरणमाला

(१) यत्र भाज्यः ५ क्षेपः ± ४ हारः ८
तत्र लब्धिगुणौ साध्यौ ।

(२) भाज्यः ६ क्षेपः ± ६ , हारः १२
तत्र लब्धिगुणौ कौ ।

(३) त्रिभिर्हृतो येन युतं द्विरपैः
विवर्जितं वा विहृतं चतुर्भिः ।

निरयकं स्याद्द्वद मे गुणं तं—

स्पष्टं पटीयान् यदि कुट्टकेऽसि ॥

(४) भा ७ $\pm$ क्षे २०
५

गुणलब्धी साधय ।

(५) पञ्चभिर्गुणितं येन नवभिश्च युतो नितम् ।

ऋतुभिश्च हरेद्भारं गुणाती तत्र साधय ॥

(६) यत्र भाज्यः = क्षेपः ± ६

हारः ३ तत्र गुणलब्धी के

(७) भाज्यः ११ ± ६ १२ हारः =

गुणलब्धी साध्ये

(८) भा ५ ± १८ ६

हा ६

गुणलब्धी के

इति कुट्टकाधिकारः ।

अथ वर्गप्रकृतिः

तत्र रूपक्षेपपदार्थं तावत्करणसूत्राणि—सार्धषड्वृत्तानि ।

इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः प्रकृत्या

क्षुण्णो युक्तो वर्जितो वा स येन ।

मूलं दद्यात्क्षेपकं तं धनर्णं

मूलं तच्च ज्येष्ठमूलं वदन्ति ॥४०॥

एवमनेकवर्णप्रक्रियोपयुक्तं कुट्टकमभिधायेदानीमनेकवर्णं मध्यमाहरणोपयुक्तां वर्गप्रकृतिं निरूपयति । तत्र प्रथमं स्वरूपं तस्य शालिन्याऽऽह—इष्टमिति ।

व्याख्या—अनेकवर्णमध्यमाहरणे पक्षयोः समीकरणानन्तरमेकपक्षस्य पदे गृहीते सति द्वितीयपक्षे यदि सरूपोऽव्यक्तवर्गः स्यात् । यथा—काव १२ रु १ । तत्र पूर्वपक्षतुल्यतया द्वितीयपक्षेणापि मूलदेन भाव्यम् । अस्ति चात्र कालकवर्गो द्वादशगुणः सरूपश्च । अतो यस्य वर्गो द्वादशगुणः सरूपः सन्वर्गो भवेत्तदेव कालकमानमित्यर्थास्तिद्वयति ।

यच्चात्र पदं तत्पूर्वपक्षपदसममुभयपक्षयोस्तुल्यत्वात् । वर्गः प्रकृतिर्यत्रेति वर्गप्रकृतिः । प्रथममिष्टं ह्रस्वपदं प्रकल्प्य तस्य वर्गः प्रकृत्या क्षुण्णोऽर्थाद्गुणितो येनाङ्केन सहितो रहितो वा मूलं दद्यात्तमङ्गं धनमृणं वा क्षेपकं वदन्त्याचार्याः । प्रथमतो यदिष्टं पदं प्रकल्पितं तच्च ह्रस्वमित्याचार्याः वदन्ति । यत्र तु क्षेपवियोगात्कुत्रचिज्ज्येष्ठपदं ह्रस्वपदादल्पं भवति तत्रापि भावनया ह्रस्वपदादधिकमेव भवति ।

भाषा—इस प्रकार अनेकवर्णसमीकरण की प्रक्रिया के उपयोगी कुट्टक को बतलाकर अब अनेक वर्ण मध्यमाहरण के उपयोगी वर्गप्रकृति के विषय को आचार्य बतलाते हैं। इसके स्वरूप के निरूपण में पहिले किसी एकराशि को इष्ट कल्पना करो फिर उसका वर्ग करो फिर उसे प्रकृति से गुणा करो। प्रकृति से गुणा हुआ वह जिस अङ्क से युक्त अथवा ऊन करने पर मूलप्रद हो जाय उस अङ्क को क्रम से धन और ऋण करो फिर मूल लो, उस अङ्क को धन और ऋण क्षेपक कहते हैं और मूल को ज्येष्टमूल कहते हैं। पहिले जिसराशि को इष्ट कल्पना किया है उसको ह्रस्व लघु तथा कनिष्ठ भी कहते हैं।

ह्रस्वज्येष्टक्षेपकान्यस्य तेषां

तानन्यान्वाऽधो निवेश्य क्रमेण ।

साध्यान्येभ्यो भावनाभिर्बहूनि—

मूलान्येषां भावना प्रोच्यतेऽतः ॥४१॥

वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोस्तदैक्यं—

ह्रस्वं लघ्वोराहतिश्च प्रकृत्या ।

क्षुण्णा ज्येष्टाभ्यासयुक् ज्येष्टमूलं

तत्राभ्यासः क्षेपयोः क्षेपकः स्यात् ॥४२॥

ह्रस्वं वज्राभ्यासयोरन्तरं वा

लघ्वोर्धातो यः प्रकृत्या विनिध्नः ।

धातो यश्च ज्येष्टयोस्तद्वियोगो

ज्येष्टं क्षेपोऽत्रापि च क्षेपघातः ॥४३॥

व्याख्या—एवमेकेषु ह्रस्वज्येष्टक्षेपकेषु ज्ञातेष्वनेकत्वार्थमुपायं शास्त्रिनीत्रयेणाह ह्रस्वेति । प्रथमसिद्धान् ह्रस्वज्येष्टक्षेपकान् पङ्क्तौ विन्यस्य तेषामधस्तानन्यान्वा ह्रस्वज्येष्टक्षेपकान् क्रमेण निवेशयैतेभ्यः पङ्क्तिद्वयस्थापितेभ्यो ह्रस्वज्येष्टक्षेपकेभ्यो यतो भावनाभिर्बहूनि मूलानि साध्यान्यत एषां भावना प्रोच्यते । तस्य मेव प्रकृताविति ज्ञेयम् । तत्र भावना द्विविधा । समासभावना, अन्तर भावना

चेति । तत्रपदयोर्महत्वेऽपेक्षिते समासभावनामाह वज्राभ्यासावि-
त्यादिना । ज्येष्ठलघ्वोर्यौ वज्राभ्यासौ तयो रैक्यं ह्रस्वं स्यात् ।
वज्राभ्यासो नाम तिर्यग्गुणनम् । यथा हि वज्रस्य तिर्यग् प्रहारो भवति
तथैवात्र गुणनकरणादस्य गुणनविशेषस्य वज्राभ्यास इति संज्ञा,
वज्रवदभ्यासो वज्राभ्यास इति समासः । तस्मादूर्ध्वकनिष्ठेनाधःस्थं
ज्येष्ठं गुणनीयमधःस्थकनिष्ठेनोर्ध्वस्थं ज्येष्ठं गुणनीयम् । तयोरैक्यं
ह्रस्वं स्यात् । लघ्वोराहतिः प्रकृत्या गुणिता ज्येष्ठयोर्वधेन युक्ता ज्येष्ठमूलं
स्यात् । क्षेपयोरभ्यासः क्षेपको भवति । अथ पदयोर्लघुत्वेऽभीप्सिते-
ऽन्तरभावनामाह । ह्रस्वं वज्राभ्यासयोरन्तरं वेति । वज्राभ्यासयोरन्तरं
वा ह्रस्वं स्यात् । ऐक्यापेक्षया विकल्पः । अत्र यः प्रकृत्यागुणितो लघ्वो-
र्घातः- यश्च केवलज्येष्ठयोर्घातस्तद्वियोगो ज्येष्ठं स्यात् । अत्रापि क्षेपयो-
र्घातः क्षेपकः स्यात् ।

भाषा—इस प्रकार ह्रस्व, ज्येष्ठ, क्षेप, जानकर उससे अनेक ह्रस्व, ज्येष्ठ, क्षेप,
जानने का प्रकार, पहिले सिद्ध किये हुए, ह्रस्व, ज्येष्ठ, क्षेपों को एक पंक्ति में
लिखकर उनके नीचे क्रम से उन्हीं पूर्वोत्पन्न ह्रस्व, ज्येष्ठ और क्षेपों को अथवा
और अन्य, ह्रस्व, ज्येष्ठ क्षेपों को लिखो इस प्रकार दो पंक्ति में लिखे हुए ह्रस्व,
ज्येष्ठ, क्षेप, पर से भावना के द्वारा अनन्त अनेक ह्रस्व, ज्येष्ठ, और क्षेप सिद्ध
होते हैं इक्षलिये अब भावना का निरूपण करते हैं यहाँ भावना दो प्रकार की
होती है, एक समास भावना और दूसरी अन्तर भावना, अब पहले पदों के
महत्त्व को जानने के लिये समास भावना को कहते हैं । ज्येष्ठ और लघु इनका जो
वज्राभ्यास अर्थात् तिर्यग्गुणन उनका योग ह्रस्व होता है । इसका यह अभिप्राय है
कि ऊपर की पंक्तिवाले कनिष्ठ से नीचे की पंक्तिवाले ज्येष्ठ को गुण दो और
नीचे की पंक्ति वाले कनिष्ठ से ऊपर की पंक्ति वाले ज्येष्ठ को गुण दो । बाद में
उन दोनों गुणनफलों का योग कर दो वह कनिष्ठ होगा । कनिष्ठों के घात को
प्रकृति से गुण दो और उसमें ज्येष्ठों के घातको जोड़ दो तो वह ज्येष्ठ मूल होगा ।
और क्षेपकों का घात क्षेप होगा ।

अब पदों के लघुत्व जानने के लिये अन्तर भावना को कहते हैं ।

ज्येष्ठ और कनिष्ठ इन के वज्राभ्यास का जो अन्तर वह कनिष्ठ होगा । कनिष्ठों
के घात को प्रकृति से गुण कर एक स्थान में रखो और केवल ज्येष्ठों का घात

करो बाद में उन दोनों घटों का अन्तर करो वह ज्येष्ठमूल होगा। और समास भावना के तुल्य क्षेपों का घात यहां भी क्षेप ही होता है।

इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेपः स्यादिष्टभाजिते ।

मूले ते स्तोऽथवा क्षेपः क्षुण्णः क्षुण्णो तदा पदे ॥ ४४ ॥

एवं भावनाभ्यामिष्टक्षेपजपदसिद्धौ तेभ्य एव क्षेपान्तरजपदान-यनमथ च यत्र कुत्रापि क्षेपे पदसिद्धौ स चेदिष्टवर्गेण गुणितो भक्तो वा उद्दिष्टक्षेपो भवेत्तदा तेभ्य एवोद्दिष्टक्षेपजपदानयनमनुष्ठुभाह— इष्टवर्गहृत इति। यत्र क्षेपे कनिष्ठज्येष्ठपदे सिद्धे स क्षेप इष्टस्य वर्गेण भक्तः सन् यदि क्षेपो भवेत् तदा ते पदे इष्टभक्ते सति पदे स्तः। यदि त्विष्ट-वर्गेण गुणितः सन् क्षेपो भवेत् तदा ते पदे इष्टगुणिते पदे स्तः। यस्य इष्टस्य वर्गेण क्षेपो गुणितस्तेन पदे गुणनीये इत्यर्थः।

विशेष—

जिस क्षेप में कनिष्ठ और ज्येष्ठपद सिद्ध हुए हैं सो क्षेप यदि इष्टवर्ग के भाग देने से अभीष्ट क्षेप हो जाय तो कनिष्ठ ज्येष्ठपद में इष्ट के भाग देने से अभीष्ट कनिष्ठ ज्येष्ठ पद होंगे। और यदि क्षेप इष्टवर्ग से गुणित क्षेप होवे तो कनिष्ठ ज्येष्ठपद इष्ट से गुण देने से कनिष्ठ ज्येष्ठ पद होंगे।

इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरं तेन वा भजेत् ।

द्विग्नमिष्टं कनिष्ठं तत्पदं स्यादेकसंयुतौ ॥ ४५ ॥

ततो ज्येष्ठमिहानन्त्यं भावनाभिस्तथेष्टतः ।

व्याख्या—अथ यत्र कुत्राप्युद्दिष्टक्षेपे रूपक्षेपजपदाभ्यां भावनया पदानेकत्वं भवतीति रूपक्षेपजपदसाधनं प्रकारान्तरेण सार्धानुष्ठुभाह— इष्टवर्गप्रकृत्योरिति। इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरं तेन द्विग्नमिष्टं भजेत् तदा एकसंयुतौ रूपक्षेपे कनिष्ठं स्यात्, ततः कनिष्ठाज्येष्ठं स्यात्, “इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः प्रकृत्या क्षुण्णः” इत्यादिना इह कनिष्ठज्येष्ठयोर्भावना-वशाच्चेष्टवशादानन्त्यमस्ति।

विशेष—

भाषा—इष्ट वर्ग और प्रकृति इनका अन्तर करो और उस अन्तर से दूने इष्ट में भाग दो तो रूपक्षेप में कनिष्ठ होगा। फिर उस कनिष्ठपर से “इष्टं ह्रस्वं तस्य

वर्गः प्रकृत्या क्षुण्णः” इस नियम के अनुसार ज्येष्ठ सिद्ध करो, इस प्रकार कनिष्ठ और ज्येष्ठ के भावनावश से तथा इष्ट के वश से अनेक कनिष्ठ और ज्येष्ठ होंगे ।

उदाहरणम्—

को वर्गोऽष्टहतः सैकः कृतिः स्याद्गणकोच्यताम् ।

एकादशगुणः को वा वर्गः सैकः कृतिर्भवेत् ॥ १८ ॥

प्रथमोदाहरणे न्यासः । प्र ८ । क्षे १ ।

अत्रैकमिष्टं ह्रस्वं प्रकल्प्य जाते मूले सक्षेपे क १ ज्ये ३ क्षे १ ।

एषां भावनार्थं न्यासः—

प्र ८ । क १ ज्ये ३ क्षे १

क १ ज्ये ३ क्षे १

“वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोः” इत्यादिना प्रथमकनिष्ठद्वितीयज्येष्ठ-मूलाभ्यासः ३ । द्वितीयकनिष्ठप्रथमज्येष्ठमूलाभ्यासः ३ । अनयोरेक्यं ६ कनिष्ठं पदं स्यात् । कनिष्ठयोराहतिः १ प्रकृतिगुणा ८ ज्येष्ठ-योरभ्यासेनानेन ९ युता १७ ज्येष्ठपदं स्यात् । क्षेपयोराहतिः क्षेपकः स्यात् १ ।

प्राङ्मूलक्षेपाणामेभिः सह भावनार्थं न्यासः—

प्र ८ । क १ ज्ये ३ क्षे १ ।

क ६ ज्ये १७ क्षे १ ।

भावनया लब्धे मूले क३५ ज्ये ९९ क्षे १ । एवं पदाना-मानन्त्यम् ।

द्वितीयोदाहरणे रूपमिष्टं कनिष्ठं प्रकल्प्य तद्वर्गात् प्रकृतिगुणात् ११ रूपद्वयमपास्य मूलं ज्येष्ठम् ३ । अत्र भावनार्थं न्यासः—

प्र ११ । क १ ज्ये ३ क्षे २

क १ ज्ये ३ क्षे २

प्राग्वलब्धे चतुःक्षेपमूले क ६ ज्ये २० क्षे ४; “इष्ट-
वर्गहतः क्षेपः”—इत्यादिना जाते रूपक्षेपमूले क ३ ज्ये १० क्षे १
अतस्तुल्यभावनया वा कनिष्ठज्येष्ठमूले जाते क ६० ज्ये १९९
क्षे १ । एवमनन्तमूलानि । अथवा रूपं कनिष्ठं प्रकल्प्य जाते पञ्चक्षेप-
पदे क १ ज्ये ४ क्षे ५ अतस्तुल्यभावनया मूले क ८ ज्ये २७
क्षे २५ । “इष्टवर्गहतः”—इत्यादिना पञ्चकमिष्टं प्रकल्प्य जाते
रूपक्षेपपदे । क ६ ज्ये ३६ क्षे १ ।

अनयोः पूर्वमूलाभ्यां सह भावनार्थं न्यासः—

प्र ११ । क ६ ज्ये ३६ क्षे १

क ३ ज्ये १० क्षे १

भावनया लब्धे मूले क १६१ । ज्ये ५३४ । क्षे १ ।

अथवा “ह्रस्वं वज्राभ्यासयोरन्तरं वा” इत्यादिना कृतया भावन-
या जाते मूले क ६ । ज्ये ६ । क्षे १ एवमनेकधा ।

“इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरं तेन वा भजेत्”—इत्यादिना पक्षान्तरेण
पदे रूपक्षेपे प्रतिपाद्यते । तत्र प्रथमोदाहरणे रूपत्रयमिष्टं प्रकल्पितम् ३ ।
अस्यवर्गः ९ । प्रकृतिः ८ अनयोरन्तरम् १ अनेन द्विग्नमिष्टं भक्तं ६ जातं
रूपक्षेपे कनिष्ठं पदम् । अतः पूर्ववज्ज्येष्ठम् १७ ।

एवं द्वितीयोदाहरणेऽपि रूपत्रयमिष्टं प्रकल्प्य जाते कनिष्ठ-
ज्येष्ठे ३।१० । एवमिष्टवशात्समासान्तरभावनार्थं च पदानामानन्त्यम् ।

इति वर्गप्रकृतिः ।

(१) उदाहरण—

भाषा—वह कौन सा वर्ग है जिसको आठ से गुणाकर एक जोड़ देते हैं तो
वर्ग हो जाता है ।

क्रिया—प्र० ८ क्षे १ ।

अब एक १ कनिष्ठ कल्पना किया, इसका वर्ग १ हुआ, इसको प्रकृति ८ से गुणा किया तो आठ हुए इसमें १ जोड़ा तो ९ हुए, इसका वर्गमूल ३ आया, अब भावना के लिये किया की।

प्र ८। क १ ज्ये ३ क्षे १
क १ ज्ये ३ क्षे १ } अब यहां पर “वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोस्तदै-
क्यमित्यादि” सूत्र के अनुसार पहिले कनिष्ठ १ और दूसरे ज्ये ३ इनका परस्पर घात ३ हुआ इसी भांति दूसरे कनिष्ठ १ और पहिले ज्येष्ठ ३ का परस्पर घात भी ३ ही आया अब इन दोनों घातों का योग ६ यह कनिष्ठपद हुआ। तथा दोनों कनिष्ठों, १।१ का घात १ हुआ फिर इसको प्रकृति ८ से गुणा किया तो ८ हुआ। इसमें दोनों ज्येष्ठों का ३।३ का घात ९ को जोड़ने से १७ हुए यह ज्येष्ठपद हुआ। और दोनों क्षेपों का १।१ का घात १ यह क्षेप ही हुआ। अब पहिले कनिष्ठ १ ज्येष्ठ ३ क्षेप १ इनको कनिष्ठ ६ ज्ये १७ और क्षेप १ इसके साथ भावना की।

क १ ज्ये ३ क्षे १ } अब यहांपर पहिले ऊपर के कनिष्ठ १ और नीचे
क ६ ज्ये १७ क्षे १ } के ज्ये १७ का घात १७ हुआ। इसी प्रकार दूसरे कनिष्ठ ६ तथा पहिले ज्येष्ठ ३ इनका घात १८ हुआ इन दोनों घातों का योग ३५ यह कनिष्ठ पद हुआ। दोनों कनिष्ठों १।६ का घात ६ इसको प्रकृति ८ से गुणा करो। तब गुणनफल ४८ आया इसमें ज्येष्ठों ३।१७ का घात ५१ जोड़ा तो ९९ यह ज्येष्ठपद हुआ। और क्षेपों का १।१ का घात १ यह क्षेप ही हुआ। इस प्रकार भावना के आधार पर अनेक कनिष्ठ, ज्येष्ठ और क्षेप होंगे।

(२) उदाहरण—

वह कौन सा वर्ग है जिसको ग्यारह से गुण देते हैं और उसमें एक जोड़ देते हैं तो वर्ग होता है।

क्रिया—प्र ११। क्षेप १।

अब यहां पर कनिष्ठ १ कल्पना किया फिर इसका वर्ग किया १ आया, इसको प्रकृति ११ से गुणा किया तो गुणनफल ११ ही आया इसमें २ घटाने से ९ शेष रहा, इसका मूल ज्येष्ठ ३ हुआ। अब यहां पर इसको तुल्य भावना के लिये न्यास किया।

प्र ११। क १ ज्ये ३ क्षे २
क १ ज्ये ३ क्षे २ } यहां कनिष्ठ और ज्येष्ठों के वज्राभ्यास

३।३ को जोड़ने से योगफल ६ हुआ यह कनिष्ठ हुआ। फिर कनिष्ठों १।१ का घात १ को प्रकृति ११ से गुणा किया तो ११ ही हुआ। इसमें ज्येष्ठाभ्यास ९ को जोड़ा तो २० आया यह ज्येष्ठपद हुआ। क्षेपों २।२ का घात ४ यहां भी क्षेप हुआ। इसलिये क्रम से क ६ ज्ये २० क्षे ४ ये कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप हुए। यहां “इष्टवर्गहतः क्षेपः क्षेपः स्यादिष्टभाजिते” इस सिद्धान्त के अनुसार क्रिया करने से इष्ट २ कल्पना किया, इसका वर्ग किया तो ४ आया, इसका क्षेप ४ में भाग दिया तो १ क्षेप आया। और इष्ट दो का कनिष्ठ ज्येष्ठ पदों में भाग देने से कनिष्ठ ज्येष्ठ क्रम से क ३ ज्ये १० हुए क्षे १ है। अब इसके साथ इसकी समान भावना की।

क ३ ज्ये १० क्षे १
क ३ ज्ये १० क्षे १ } यहां “वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोस्तदैक्यं ह्रस्वमित्यादि”

प्रमाण से कनिष्ठ ज्येष्ठों का वज्राभ्यास ३०।२० का योग ६० यह कनिष्ठ हुआ। और कनिष्ठों ३।३ का घात ९ को प्रकृति ११ से गुणा किया ९९ आया इसमें ज्येष्ठाभ्यास १०० में जोड़ा तो १९९ यह योगफल ज्येष्ठ हुआ। क्षेपों १।१ का घात यहां भी क्षेप १ ही हुआ। इसलिये इनका यथाक्रम न्यास। क ६० ज्ये १९९ क्षे १ यह हुआ। इस पर से भावना के आधार पर अनेक कनिष्ठ ज्येष्ठ पद हो सकते हैं। यह प्रकार “वर्जितो वा, स येन मूलं दद्यात्” अर्थात् कनिष्ठ के वर्ग को प्रकृति से गुणा करने पर जो कुछ संख्या घटाकर मूल लेने की स्थिति में भावना से अनेक कनिष्ठ ज्येष्ठ साधन का हुआ।

अब “गुक्तो वा येन स मूलं दद्यात्” अर्थात् कनिष्ठ के वर्ग को प्रकृति से गुणा करके कुछ संख्या जोड़कर वर्गमूल लेने की स्थिति में भावना से अनेक कनिष्ठ ज्येष्ठ साधन करने की विधि लिखते हैं। इसलिये यहां भी १ कनिष्ठ कल्पना किया। फिर इसका वर्ग किया १ हुआ प्रकृति ११ से गुणा किया तो ११ हुआ अब इसमें ५ संख्या जोड़ने से १६ हो जाता है जिसका वर्गमूल ४ पूरा मिल सकता है। इसलिये ४ ज्येष्ठपद हुआ। ५ संख्या यह क्षेपक हुआ। इसलिये इस पर से तुल्य भावना की।

क १ ज्ये ४ क्षे ५
क १ ज्ये ४ क्षे ५ } अब वज्राभ्यास ४।४ का योग ८ यह कनिष्ठपद

हुआ। और कनिष्ठों १।१ के घात १ को प्रकृति ११ से गुणा कर उसमें ज्येष्ठाभ्यास १६ को जोड़ने से २७ हुआ। क्षेपों ५।५ का घात २५ यहां क्षेप हुआ। अब “इष्टवर्गहतः क्षेपः क्षेपः स्यात्” इत्यादि सूत्र से इष्ट ५ के वर्ग २५ से क्षेप में

भाग देने से १। आया कनिष्ठ ज्येष्ठ में भाग देने से क्रम से क ६, ज्ये ३९ हुए १ क्षेप हुआ। इसलिये कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप ये हुए।

क ६ ज्ये ३९ क्षे १

क ३ ज्ये १० क्षे १ के साथ भावना दी। प्रकृति वही ११ है।

∴ क १६१ ज्ये ५३४ क्षे १

अथवा “हस्त्रं वज्राभ्यासयोरन्तरं वा” इस नियम के अनुसार वज्राभ्यासों ६९। ६९ का अन्तर ६ कनिष्ठ हुआ। और कनिष्ठों ६, ३ का घात ३९ प्रकृति ११ से गुणने से ३६४ हुआ। वज्राभ्यास = ३९ आया। इन दोनों का अन्तर किया ज्येष्ठ हुआ ६। क्षेपों ११ का घात १ हुआ, यह क्षेप हुआ। इसलिये क ६ ज्ये ६ क्षेप १ इसमें “इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरं तेन वा भजेत्” इस नियम के अनुसार रूप क्षेप में पद को लाते हैं। उदाहरण में इष्ट ३ कल्पना किया, इसका वर्ग किया ९ हुआ। अब ९ का तथा प्रकृति ८ का अन्तर १ हुआ इससे दुगुने इष्ट ६ में भाग दिया ६ लब्धि आई, यह रूपक्षेप में कनिष्ठ आया। इसका वर्ग ३६ हुआ प्रकृति ८ से गुणा किया २८८ हुआ, क्षेप १ जोड़ कर २८९ हुआ इसका वर्गमूल लिया १७ आया यह ज्येष्ठ हुआ, क्षेप १ है ही।

इसलिये क्रम से क ६ ज्ये १७ क्षे १ ये कनिष्ठ, ज्येष्ठ क्षेप हुए।

(२) द्वितीय उदाहरण में इष्ट ३ मानकर इसका वर्ग किया तो ९ हुआ फिर प्रकृति ११ का अन्तर किया तो २ हुआ इस २ अन्तर से द्विगुण इष्ट ६ में भाग दिया तो लब्धि ३ आई। इसके वर्ग ९ को प्रकृति ११ से गुणाकर ९९ गुणनफल आया। इसमें एक संख्या १ जोड़ने से योगफल १०० हुआ, वर्गमूल लिया १० आया, यह ज्येष्ठमूल हुआ। और क्षेपक १ है ही। इसलिये क्रम से क १ ज्येष्ठ १९ क्षे १ ये कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप हुए।

इसलिये इससे यह स्पष्ट हुआ कि इस प्रकार इष्ट की कल्पना करने से अनन्त पद निकलते हैं।

वर्गप्रकृति के विषय में “इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरं तेन वा भजेत्। द्विप्रमिष्टं कनिष्ठम्” इस सूत्रके सम्बन्धमें आचार्यप्रवर श्रीवापदेवजी शास्त्री के कुछ विशेष सूत्र लिखते हैं।

द्विप्रसङ्गलितेन स्यात्समाना प्रकृतिर्यद्वा।

तदा ह्रस्वपदं रूपद्वयं स्यादेकसंयुतौ ॥ १ ॥

सैक्या व्यैक्या वाऽपि कृत्या तुल्यो यदा गुणः।

तस्याः कृतेः पदं द्विप्रं ह्रस्वं स्यादेकसंयुतौ ॥ २ ॥

द्वयूनया द्वयाव्यया वाऽपि कृत्यास्यात्प्रकृतिर्यदा ।
 समा तदैकयोगे स्यात् ह्रस्वं तस्याः कृतेः पदम् ॥ ३ ॥
 क्षेपस्य वर्गरूपस्य मूलेनाख्याऽथवोनिता ।
 प्रकृतिश्चेत्कृतिस्तस्याः पदं द्विघ्नं भवेद्गु ॥ ४ ॥
 इष्टाहता ह्रस्वकृतिः पृथिव्या
 युतोनिता ज्येष्ठपदं द्विधा स्यात् ।
 विधूनिता ज्येष्ठकृतिः कनिष्ठ-
 वर्गेण भक्ता प्रकृतिर्भवेच्च ॥ ५ ॥
 यदा कनिष्ठस्य कृतिः समा भवेत्
 तदा कृतेः खण्डमभीष्टसंगुणम् ।
 भुवोनयुग् ज्येष्ठपदं भवेत् द्विधा
 ततो गुणो वेष्टवशादनेकधा ॥ ६ ॥
 अथ वर्गप्रकृतेरुपपत्तिः—

अत्र वर्गप्रकृतावपि कुट्टकवदालापानुसारेणोपपत्तिक्रमः—

अतः $k^2 \cdot प्र \pm क्षे = ज्ये^2$
 एवमेव $k^{12} \cdot प्र \pm क्षे = ज्ये^{12}$ } इति आलापानुसारेण स्वरूपद्वयम्

अतोऽत्र समीकरणे बीजक्रियया—

$$\pm क्षे = ज्ये^2 - k^2 \cdot प्र \dots\dots\dots (१)$$

$$\pm क्षे^1 = ज्ये^{12} - k^{12} \cdot प्र \dots\dots\dots (२)$$

अत्र (१) (२) अनयोः गुणनेन

$$(\pm क्षे)(\pm क्षे^1) = (ज्ये^2 - k^2 \cdot प्र)(ज्ये^{12} - k^{12} \cdot प्र)$$

$$\therefore \text{चे} \times \text{क्षे}^1 = ज्ये^2 \cdot ज्ये^{12} - ज्ये^2 \cdot k^{12} \cdot प्र - k^2 \cdot प्र \cdot ज्ये^{12} + प्र^2 \cdot k^2 \cdot k^{12}$$

अत्र द्वितीयपक्षे २ प्र० क० क¹ × ज्ये¹ · ज्ये¹ ·

एतद्योजनेन शोधनेन च न कोऽपि विकारः

$$\begin{aligned} \therefore \text{क्षे} \times \text{क्षे}^1 &= ज्ये^2 \times ज्ये^{12} \pm २ प्र \cdot क \cdot क^1 \times ज्ये \cdot ज्ये^1 + क^2 \cdot क^{12} \cdot प्र^2 \\ &\quad - ज्ये^2 \cdot क^{12} \cdot प्र \mp २ प्र \cdot क \cdot क^1 \cdot ज्ये \cdot ज्ये^1 - \\ &\quad प्र \cdot क^2 \cdot ज्ये^{12} \\ &= (ज्ये \cdot ज्ये^1 \pm प्र \cdot क \cdot क^1)^2 - प्र (ज्ये \cdot क^1 \pm क \times ज्ये^1)^2 \end{aligned}$$

अतोऽत्र ज्ये० क० $\pm$ ज्ये० क०, एतन्मिते कनिष्ठे (ज्ये० ज्ये० $\pm$ प्र० क० क०)
एतन्मिते ज्येष्ठे, क्षे $\times$ क्षे० एतत्समः क्षेपः सिद्धः । अतः “इष्टं ह्रस्वमित्याद्यारभ्य,
क्षेपोऽत्रापि च क्षेपघातः” इत्यन्तमुपपन्नं सर्वम् ।

वर्गप्रकृतिनियमादालापानुसारेण—

$$\text{प्र० क०}^2 \pm \text{क्षे} = \text{ज्ये}^2 \dots \dots (क)$$

$$\therefore \frac{\text{प्र० क०}^2 \pm \text{क्षे}}{\text{इ}^2} = \frac{\text{ज्ये}^2}{\text{इ}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{प्र० क०}^2}{\text{इ}^2} \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{इ}^2} = \frac{\text{ज्ये}^2}{\text{इ}^2}$$

$$\therefore \text{प्र} \left(\frac{\text{क}}{\text{इ}} \right)^2 \pm \frac{\text{क्षे}}{\text{इ}^2} = \left(\frac{\text{ज्ये}}{\text{इ}} \right)^2$$

अतः “इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेपः स्यादिष्टभाजिते” इत्युपपन्नं जातम् । पक्षद्वयेऽपि
(क) समीकरणे इ^2 अनेन गुणिते सति—

$$\text{प्र० इ}^2 \cdot \text{क०}^2 \pm \text{इ}^2 \times \text{क्षे} = \text{इ}^2 \times \text{ज्ये}^2$$

$$\therefore \text{प्र०} \cdot (\text{इ० क०})^2 \pm \text{इ}^2 \cdot \text{क्षे} = (\text{इ० ज्ये})^2$$

अतोऽत्र इ० क० = कनिष्ठम्, इ० ज्ये = ज्येष्ठम्, इति कल्पिते $\text{इ}^2 \cdot \text{क्षे} = \text{क्षेपः}$
तेन “क्षुण्णः क्षुण्णे तदा पदे” इत्युपपन्नम्

इष्टवर्गप्रकृत्योरिति—

अत्र क = कनिष्ठम्, ज्ये = ज्येष्ठम्, क्षे = क्षेपः । अत्र यदि कनिष्ठम् =
२ इ, अस्य वर्गः प्रकृतिगुणः प्र० $\cdot ४ \text{इ}^2$ अयमिष्टवर्गप्रकृत्योश्चतुर्घातोऽस्ति परन्तु
“चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्य चान्तरं राश्यन्तरकृतेस्तुल्यमि”त्यनेन नियमेन
राश्यन्तरकृतिः =

$$\text{अ}^2 = (\text{युति}^2 - ४ \text{घा})$$

$$\therefore (\text{प्र} + \text{इ}^2)^2 - \text{प्र० इ}^2 \cdot ४ = (\text{प्र} - \text{इ}^2)^2$$

$$\therefore (\text{प्र} + \text{इ}^2)^2 = ४ \text{प्र० इ}^2 + (\text{प्र} - \text{इ}^2)^2$$

वर्गप्रकृतिलक्षणेन—

$$\text{ज्ये} = \text{प्र} + \text{इ}^2, \text{क} = २ \text{इ}, \text{क्षे} = (\text{प्र} - \text{इ}^2)^2 \text{ तत इष्टम्} = \text{प्र} - \text{इ}^2$$

प्रकल्प्य इष्टवर्गहृतः क्षेपः इत्यनेन नूतनकनिष्ठज्येष्ठक्षेपाः—

क

$$\text{क} = \frac{२ \text{इ}}{\text{प्र} - \text{इ}^2}, \text{ज्ये} = \frac{\text{प्र} + \text{इ}^2}{\text{प्र} - \text{इ}^2}, \text{क्षे} = १$$

अतएव 'इष्टवर्गप्रकृत्योर्यद्विवरं तेन वा भजेत् ।

द्विघ्नमिष्टं कनिष्ठं तत् पदं स्यादेकसंयुतौ ॥

इति सर्वमुपपन्नं जातम् ।

अत्रोपपत्तिविषये महामहोपाध्यायानां श्रीवापूदेवशास्त्रिमहोदयानां मतमपि प्रदर्श्यते ।

कनिष्ठम् = या ततो रूपक्षेपे ज्येष्ठम् =

$$= \sqrt{\text{या}^2 \cdot \text{प्र} + १}$$

तथा कल्पितं ज्येष्ठम् = या • इ + १

अतः ज्येष्ठद्वयमपि सममेव—

तेन या • इ + १ = $\sqrt{\text{या}^2 \cdot \text{प्र} + १}$

$$\therefore \text{या}^2 \cdot \text{इ}^2 + २ \text{ या} \cdot \text{इ} + १ = \text{या}^2 \cdot \text{प्र} + १$$

$$\therefore २ \text{ या} \cdot \text{इ} = \text{या}^2 \cdot \text{प्र} - \text{या}^2 \cdot \text{इ}^2$$

$$\therefore २ \text{ या} \cdot \text{इ} = \text{या}^2 (\text{प्र} - \text{इ}^2)$$

$$\therefore \frac{२ \text{ इ}}{(\text{प्र} - \text{इ}^2)} = \text{या} । \text{इत्युपपन्नम्} ।$$

अभ्यासार्थमुदाहरणमाला

(१) को वर्गो विंशतिक्षुण्णो रूपयुक्तः कृतिर्भवेत् ।

पञ्चाशद्गुणितो वापि रूपयुक्तश्च को भवेत् ॥ १ ॥

(२) यत्रैकविंशतिसमं प्रकृतेर्हि मानं

यत्रास्ति विंशतिसमां प्रकृतिश्च धीमन् ॥

क्षेपस्तयोरपि च पञ्च करैः समानः

राशी तदा कथय कोविद ? सत्वरं तौ ॥ २ ॥

(३) अष्टाङ्कसंख्यकसमा प्रकृतिस्तथा च,

नेत्रेन्दुतुल्यमपरा प्रकृतिश्च विद्वन् ।

क्षेपो द्वयोरपि च रूपसमो यदि स्यात्

राशी तदा वद सखे ! गणिताद् हृतं मे ॥ ३ ॥

$$(४) (क) २४ \text{ या}^2 + १ = \text{का}^2$$

$$(ख) २० \text{ या}^2 + २५ = \text{का}^2$$

खत्र या, का माने के ?

$$(५) (क) \sqrt{१२ या^२ + १} = का$$

$$(ख) \sqrt{८ या^२ + १} = का$$

अत्रापि या, का माने के ?

नोट—वार्षिक परीक्षा में वर्गप्रकृति के सम्बन्ध के प्रश्नों को परीक्षक लोग उपरोक्त क्रम से पूछ देते हैं। इसलिये बाह्य प्रश्नों की उदाहरणमाला अभ्यासार्थ हमने यह लिख दी है। अर्थ इन प्रश्नों का स्पष्ट ही है। हमें इस उदाहरणमाला से वर्गप्रकृति सम्बन्धि प्रश्नों को किस प्रकार पूछा जा सकता है यही दिखाना था। इन उपरोक्त प्रश्नों में चतुर्थ प्रश्न के पहिले (क) भाग का उत्तर निकाल कर मैं लिखता हूँ बाधा है छात्रगण उपरोक्त ढङ्ग के प्रश्नों को वर्ग प्रकृति के विषय पर ध्यान देकर परीक्षा में लिखने की शैली पर भी ध्यान देंगे। ये प्रश्न वक्ष्यमाण “अनेकवर्णमध्यमाहरण” प्रकरण से भी सम्बन्ध रखने वाले हैं।

प्रश्न नं० (४) (क)

$$\text{किया—} २४ या^२ + १ = का^२$$

$$\therefore \sqrt{२४ या^२ + १} = का$$

$$\therefore \sqrt{२४ या^२ + १} = \text{इसका वर्गमूल लेने के लिये वर्ग प्रकृति से किया हुई।}$$

“इष्टं हस्त्वं तस्य वर्गः” इत्यादि प्रमाण से—

$$क १ ज्ये ५ क्षे १$$

$$क १ ज्ये ५ क्षे १$$

$$\therefore क १० ज्ये ४९ क्षे १$$

वर्ग प्रकृति से कनिष्ठ ज्येष्ठ आये। अब कौन यावत् का मान हुआ, कौन का का मान हुआ यह जानने के लिये “ज्येष्ठं तयोः प्रथमपक्षपदेन तुल्यं कृत्वोक्तवत्प्रथमवर्णमितिस्तु साध्या। हस्त्वं भवेत्प्रकृतिवर्णमितिः सुधोमिरेवं कृतिप्रकृतिरत्र नियोजनीया” इस प्रमाण से कनिष्ठ प्रकृति का मान हुआ ज्येष्ठ प्रथम पक्षका मान हुआ अर्थात् प्रकृति यावत् है प्रथम पक्षसे का ग्रहण है। इसलिये या = १ अथवा १०, तथा का = ५ तथा ४९ यह उत्तर हुआ। इस प्रकार भावना से बहुत से मान या, का के हो सकते हैं। इस प्रकार छात्रों को सब जगह समझना चाहिये।

चक्रवालम्

अथ चक्रवाले करणसूत्रं वृत्तचतुष्टयम्—

ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपान् भाज्यप्रक्षेपभाजकान् ।
 कृत्वा कल्प्यो गुणस्तत्र तथा प्रकृतितश्च्युते ॥ १ ॥
 गुणवर्गे प्रकृत्योनेऽथवाल्पं शेषकं यथा ।
 तच्च क्षेपहतं क्षेपो व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते ॥ २ ॥
 गुणलब्धिः पदं ह्रस्वं ततो ज्येष्ठमतोऽसकृत् ।
 त्यक्त्वा पूर्वपदक्षेपांश्चक्रवालमिदं जगुः ॥ ३ ॥
 चतुर्द्व्येकयुतावेवमभिने भवतः पदे ।
 चतुर्द्विक्षेपमूलाभ्यां रूपक्षेपार्थभावना ॥ ४ ॥

(१) चक्रवाले विशेषः श्रीवापदेवशास्त्रिपादोक्तः—

निरग्रमूलं प्रकृतेर्हि लब्धिस्तावच्च शेषं च हरस्तदग्रम् ।
 मूलान्वशेषं हि निरग्रमानं हरेण मूलं फलमेतयोः स्तः ॥
 छिच्छ्रेषहीनो नवशेषकं स्यात्तद्वर्गाहीना प्रकृतिर्हरात् ।
 नवो हरः स्यादसकृद्विधेयमित्थं यदा रूपमितो हरः स्यात् ॥
 तदा लब्धितः क्षेपके रूपतुल्ये गुणाप्तौ प्रसाध्ये विदा कुट्टकेन ।
 गुणः स्यात्कनिष्ठं तथा ज्येष्ठमाप्तिर्भवेत्क्षेपके रूपतुल्ये तदैव ॥
 यदा लब्धयः स्युः समाश्चेन्न चैवं तदा रूपशुद्धौ गुणो लब्धिरत्र ।
 अनेन प्रकारेण मूले ह्यभिने भवेतामिति प्रोक्तवान् वापदेवः ॥
 अत्रेष्टहारावभिलम्बितश्चेत्सीसाधिते रूपयुतौ गुणाप्तौ ।
 ते स्तस्तदामीष्टहाराकृतुल्यक्षेपे लघुज्येष्ठपदे तदैव ॥
 यदा समास्ताः खलु लब्धयः स्युर्यदा तु ताः स्युर्विपमास्तदानीम् ।
 अभीष्टहाराकृतमानशुद्धौ ज्ञेये सुदर्माग्रधिषा पदे ते ॥
 अत्रेष्टच्छिद्द्वितुल्यश्चेत्तदा तस्तिष्ठमूलतः ।
 रूपक्षेपपदार्थं वा विधेया तुल्यभावना ॥

“का सप्तपष्टिगुणिता कृतिरेकयुक्ता” इति आचार्योक्त उशरण में प्रकृति = ६७,
 क्षेप = १ । सूत्रानुसार प्रकृति का निरग्र मूल = लब्धि, और लब्धि = शेष, तथा अग्र ३
 हर कल्पना किये । मूल = और लब्धि = का योग १६ में हर ३ का भाग देने से ५

निरग्र लब्धि मिथी, यह नवीन लब्धि हुई। इससे हर ३ को गुणने से १५ हुए। इनमें शेष ८ घटा देने से नवीन शेष ७ हुआ। इसके वर्ग ४९ को प्रकृति ६७ में घटा देने से १८ रहे। इनमें हर ३ का भाग देने से ६ नवीन हर सिद्ध हुआ। इस प्रकार जब तक रूप तुल्य हर न सिद्ध हो तब तक क्रिया करने से तीन पंक्ति हुई।

लब्धि = ८, ५, २, १, १, ७, १, १, २, ५

शेष = ८, ७, ५, २, ७, ७, २, ५, ७, ८

हर = ३, ६, ७, ६, २, ६, ७, ६, ३, १

और लब्धियों से रूपक्षेप में बली हुई—

बली = ८, ५, २, १, १, ७, १, १, २, ५, १, ०

इस बली पर कुट्टक द्वारा गुण ५६६७ लब्धि ४८८४२ हुई, लब्धियों के सम होने के कारण यही रूपक्षेप में कनिष्ठ ज्येष्ठपद हुए। और यही कनिष्ठ ज्येष्ठ “ह्रस्वज्येष्ठपद क्षेपान्” इत्यादि प्रकार से सिद्ध किये गये हैं।

लब्धि के चार अङ्क लेने से रूपक्षेप में बली

८

५

२

१

१

०

इस पर से कुट्टक द्वारा गुण = १६ लब्धि = १३१। यही श्रेष्ठ हराङ्क ६ धनक्षेप में कनिष्ठ और ज्येष्ठ हुए। लब्धि के तीन अङ्क लेने से रूपक्षेप में बली।

८

५

२

१

०

इस पर से कुट्टक द्वारा गुण ११ लब्धि ६०। यही श्रेष्ठ हराङ्क ७ ऋणक्षेप में कनिष्ठ और ज्येष्ठ हुए। इत्यादि।

व्याख्या—ह्रस्वेति-प्रथमतः “इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः” इत्यादिना नियमेन ह्रस्व-ज्येष्ठ-क्षेपकान् कृत्वा कुट्टकेन तथा गुणः साधनीयः यथा गुणस्य वर्गे प्रकृतितश्च्युते प्रकृत्या ऊने वा शेषमल्पकं स्यात्। तत्तु शेषं पूर्वक्षेपहृतं सत् क्षेपः स्यात्। गुणवर्गे प्रकृतितश्च्युते सति अयं

क्षेपः व्यस्तः स्यात् । अस्यायमाशयो यत् क्षेपः यदि धनं स्यात्तदा तु ऋणं भवेत् यदि चेदृणं स्यात्तर्हि धनं भवेत् । यस्य गुणस्य वर्गेण प्रकृत्या सहान्तरं कृतं तस्य गुणस्य या लब्धिस्तत्कनिष्ठपदं स्यात् । ततः कनिष्ठा-ज्येष्ठं पूर्ववत्स्यात् । अथ प्रथमकनिष्ठज्येष्ठक्षेपेभ्यः पुनः कुट्टकेन गुणाप्ती आनीय उक्तवत्कनिष्ठज्येष्ठक्षेपाः साध्याः । एवमसकृत् । आचार्या एतद्गणितं चक्रवालमिति जगुः । एवं चक्रवालेन चतुर्द्व्येक-युतौ चतुःक्षेपे द्विक्षेपे एकक्षेपे चाभिन्ने पदे भवतः । इदमुपलक्षणम् । यत्र कुत्रापि क्षेपे अभिन्ने पदे भवतः । युतौ, इत्युपलक्षणम् । तेन शुद्धावपीति ज्ञेयम् । अथ रूपक्षेपपदानयने प्रकारान्तरमस्तीत्याह-चतु-रिति । चतुःक्षेपमूलाभ्यां द्विक्षेपमूलाभ्याञ्च रूपक्षेपार्थं भावना-“कार्या” इति शेषः चतुःक्षेपे “इष्टवर्गहृतः” इत्यादिना । द्विक्षेपे तुल्य-भावनया चतुःक्षेपपदे प्रसाध्य पश्चात्—“इष्टवर्गहृत”—इत्यादिना रूपक्षेपजे पदे वा भवतः ।

भाषा—अब यहां पर कनिष्ठ तथा ज्येष्ठ के अभिन्न मान लाने के लिये चक्रवाल नामक वर्गप्रकृति का निरूपण करते हैं ।

यहां पहले “इष्टं हस्वं तस्य वर्गः” इस सूत्र के अनुसार कनिष्ठ, ज्येष्ठ और क्षेप सिद्ध करके बाद में उनको भाज्य, क्षेप और भाजक कल्पना करके कुट्टक विधि से गुण सिद्ध करो पर वह गुण ऐसा होना चाहिये कि जिसके वर्ग को प्रकृति में घटा दिया जावे अथवा प्रकृति को ही उसमें घटा देने से शेष कम बचे । उस शेष में पहिले क्षेप का भाग देने से क्षेप होगा । परन्तु इतना वहां पर विशेष रहेगा कि जिस अवस्था में गुणवर्ग प्रकृति में घटेगा तो यह क्षेप व्यस्त होगा । अर्थात् धन होगा तो ऋण और यदि ऋण होगा तो धन माना जायेगा । और जिस गुण का प्रकृति के साथ अन्तर किया है, उस गुण को लब्धि कनिष्ठ होगा बाद में पूर्वोक्त नियम से कनिष्ठ पर से ज्येष्ठ सिद्ध करना चाहिये । फिर पहले सिद्ध किये हुए कनिष्ठ, ज्येष्ठ और क्षेप को बिगाड़ कर इन नये कनिष्ठ और ज्येष्ठ तथा क्षेप पर से कुट्टक के द्वारा गुण लब्धि सिद्ध करो और फिर उन पर से कनिष्ठ और ज्येष्ठ तथा क्षेप सिद्ध करो । इस प्रकार असकृत् अर्थात् बार बार किया करनी चाहिये । इस प्रकार चार, दो और एक धनक्षेप में अभिन्न कनिष्ठ ज्येष्ठ होंगे । यहां पर उद्दिष्ट ४ आदि संख्या और धनक्षेप उपलक्षण हैं । इस

कारण इष्ट संख्यावाले धनक्षेप अथवा ऋणक्षेपमें अभिन्न पद हों। और ४२ क्षेपोंसे रूप क्षेप होनेके लिये भावना करनी चाहिये सो वहां पर जैसे यदि ४ क्षेप हैं और रूप क्षेप में उत्तर अपेक्षित है तो “इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेपः स्यात्,” इत्यादि नियमसे रूपक्षेप सिद्ध हो जायेगा और जहां पर २ क्षेप हो वहां पर तुल्य भावना से ४ क्षेप बन सकता है। बाद में “इष्टवर्गहृतः क्षेपः” इस नियम से रूपक्षेप आजायेगा।

चक्रवालोपपत्तिः—

चक्रवालं हि चक्रप्रमणवद्वलति गच्छतीति चक्रवालम्। अर्थाद्वर्गप्रकृतेः कुट्टक कुट्टकाद्वर्गप्रकृतिः पुनरपि तथैव कार्यम्। अनेनेदमायाति यद्वर्गप्रकृत्या कुट्टकेन चासकृत् क्रिया कार्या यावद् कनिष्ठज्येष्ठेऽभिन्ने भवतः। अभिन्नाङ्कात्मकयोः कनिष्ठज्येष्ठयोरानयनार्थमेव चक्रवालप्रयोजनम्। तत्र ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपानिति प्रदर्श्यते—

कल्पयतां कनिष्ठम् = १, क्षेपः = $इ^१ - प्र$ । तर्हि $क^१ \cdot प्र = १$ $प्र = प्र$ । $क^१ \cdot प्र + क्षे = ज्ये^२ = प्र + इ^२ - प्र = इ^२$ $\therefore$ ज्ये = इ, अतः पूर्वकनिष्ठज्येष्ठक्षेपैः सह भावना।

क ज्ये क्षे
१ इ $इ^२ - प्र$

समासभावनया $क^१ = क \cdot इ + ज्ये$ । $ज्ये^१ = क \cdot प्र + ज्ये \cdot इ$ । $क्षे^१ पः = क्षे (इ^२ - प्र)$ ततः इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेपः स्यादित्यादिना इष्टवर्गसमे क्षेपे कल्पिते नूतनं कनिष्ठम् = $\frac{क \cdot इ + ज्ये}{क्षे}$, ज्येष्ठं नूतनं = $\frac{क \cdot प्र + ज्ये \cdot इ}{क्षे}$, नूतनः क्षेपः = $\frac{इ^२ - प्र}{क्षे}$, नू $\cdot क = \frac{क \cdot इ + ज्ये}{क्षे}$ इदं येनाभिन्नं भवेत्तदर्थं कुट्टकेन गुणः ‘इ’ मानं लब्धिः नूतनकनिष्ठमानं।

अतः “ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपान् भाज्यप्रक्षेपभाजकानिति” उपपन्नम्।

इष्टवर्गात् “प्र” इत्यस्याधिकत्वे ऋणफलस्याधिकत्वाच्छेषं ऋणं भवेत्। तत्र धनक्षेपेण भक्ते लब्धो नूतनः क्षेपः ऋणं स्यात्। ऋणक्षेपे तु स एव क्षेपो धनं भवेत्।

अत एव व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते, इत्युक्तम्।

अथाधुना “पूर्वज्येष्ठहृतं नूतनकनिष्ठं रूपहीनितम्। पूर्वह्रस्वहृतं लब्धं नवीनज्येष्ठसंमितिः॥ विशेषोक्तस्यैतत्सूत्रस्योपपत्तिश्च्युते।

तत्र नूतनकनिष्ठमभिन्नम् = $\frac{इ \cdot क + ज्ये}{क्षे}$ अस्माद्विलोमविधिना इष्टमानम् =

$\frac{नूक \cdot क्षे - ज्ये}{क}$, अनेन नूतनज्येष्ठस्य = $\frac{प्र \cdot क + इ \cdot ज्ये}{क्षे}$ अस्यांशमाने-

ह्युत्थापने कृते जातमंशमानम् = $\frac{ज्ये \cdot नूक \cdot क्षे - ज्ये^2 + प्र \cdot क^2}{क}$

= $\frac{ज्ये \cdot नूक \cdot क्षे - क्षे}{क} = \frac{क्षे (ज्ये \cdot नूक - १)}{क}$ अथेदमंशमानमभिन्नं

क्षेपकनिष्ठे च मिथो दृढे तेन कनिष्ठभक्तम् (ज्ये $\cdot$ नूक - १) इदं पूर्वयुक्त्या शुद्धेदेव । ततो जातमंशमानं नूतनज्येष्ठस्य = क्षे $\times$ ल ।

अत्र ल = $\frac{ज्ये \cdot नूक - १}{क}$ अभिन्नसंख्यासमा ।

अथ नूतनज्येष्ठांशमानं हरेण क्षेपसमेन भक्तं जातमभिन्नं नूतनज्येष्ठमानम् = ल, ततः कनिष्ठज्येष्ठयोरभिन्नत्वान्नूतनक्षेपोऽप्यभिन्न एवेत्यर्थत एव सिद्ध्यति ।

इति सर्वमुपपन्नम् ।

उदाहरणम्—

का सप्तषष्टिगुणिता कृतिरेकयुक्ता ।

का चैकषष्टिगुणिता च सखे सरूपा ॥

स्यान्मूलदा यदि कृतिप्रकृतिर्नितान्तं

त्वच्चेतसि प्रवद तात तता लतावत् ॥१॥

प्रथमोदाहरणे रूपं कनिष्ठं त्रयमृणक्षेपं च प्रकल्प्य न्यासः—

प्र ६७ । क्षे १ ।

क १ ज्ये ८ क्षे ३ । ह्रस्वं भाज्यं, ज्येष्ठं प्रक्षेपं, क्षेपं भाजकं च प्रकल्प्य कुट्टकार्थं न्यासः । भा १ । हार ३ । क्षे ८

अत्र “हरतष्टे धनक्षेपे” इत्यादिना कृते जाता वल्ली २

लब्धिगुणौ २, ऊर्ध्वो विभाज्येन अधरो हरेणेति ताष्टिकरणे

स्वस्वतष्टौ लब्धिवैधम्यात्स्वतक्षणाभ्यां १ शुद्धौ १ क्षेपतक्षण-
 ३ लभाढ्या लब्धिरिति लब्धिगुणौ ३ । हरस्य च ऋणत्वा-
 १
 लब्धेः ऋणत्वे कृते जातौ लब्धिगुणौ ३ गुणस्य वर्गे १
 प्रकृतेः शोधिते शेषम् ६६ अल्पकं न जातमतो रूपद्वयमृणमिष्टं
 प्रकल्प्य “इष्टाहतस्वस्वहरेण” इत्यादिना जातौ लब्धिगुणौ
 ५ अत्र गुणवर्गे ४९ प्रकृतेर्विशोधिते शेषं १८ क्षेपेण ३ हृतं लब्धं
 ७
 ६ अयं क्षेपः । गुणवर्गे प्रकृतेर्विशोधिते व्यस्तः स्यादिति धनम् ६ ।
 लब्धिः कनिष्ठपदं ५ अस्य ऋणत्वे धनत्वे च उत्तरे कर्मणि न
 विशेषोऽस्तीति जातं धनम् ५ अस्य वर्गे प्रकृतिगुणे षट्युते जातं मूलं
 ज्येष्ठम् ४१ पुनरेषां कुट्टकार्थं न्यासः । भा ५ । क्षे ४१ । हार० ६ ।

वल्ली

०

१

४१

०

अतो लब्धिगुणौ ११ । गुणवर्गे २५ प्रकृतेश्च्युते शेषे ४२
 ५
 क्षेपेण ६ हृते “व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते” इति जातः क्षेपः ७ । लब्धिः
 कनिष्ठम् ११ । अतो ज्येष्ठम् ९० । पुनरेषां कुट्टकार्थं न्यासः—
 भा ११ । क्षे ९० । हार ७ ।

अत्र “हरतष्टे धनक्षेपे—” इति कृते जातो गुणः ५ लब्धयो
 विषमा इति तक्षणशुद्धौ जातो गुणः २ । अस्य क्षेपः ७ ऋणरूपेण १
 गुणितं क्षेपं ७ गुणे प्रक्षिप्य जातो गुणः ९ । अस्य वर्गे प्रकृत्योने शेषं
 १४ क्षेपेण ७ हत्वा जातः क्षेपः २ । लब्धिः कनिष्ठम् २७ । अतो
 ज्येष्ठम् २२१ । आभ्यां तुल्यभावनार्थं न्यासः—

क २७ ज्ये २२१ क्षे २

क २७ ज्ये २२१ क्षे २

उक्तवन्मूले क ११९३४ । ज्ये ९७६८४ । क्षे ४ । चतुःक्षेप-
पदे २ अनेन भक्ते जाते रूपक्षेपमूले क ५९६७ । ज्ये ४८८४२ । क्षे १ ।

द्वितीयोदाहरणे न्यासः प्र ६१ क १ ज्ये ८ क्षे ३ ।

कुट्टकार्थं न्यासः—भा १ हार ३ क्षे ८ ।

‘हरतष्टे धनक्षेपे’ इति लब्धिगुणौ ^३_१ “इष्टाहत” इति

द्वाभ्यामुत्थाप्य जातौ लब्धिगुणौ ^५_७ । गुणवर्गे ४९ प्रकृतेः शोधिते

१२ व्यस्त इति ऋणम् १२ इदं क्षेपहतं जातः क्षेपः ४ अतः
प्राग्वज्जाते चतुःक्षेपमूले क ५ ज्ये ३९ । “इष्टवर्गहतः क्षेपः
क्षेपः स्यात्—” इत्युपपन्नरूपशुद्धिमूलयोर्भावनार्थं न्यासः ।

क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १ ।

क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १ ।

अतो भावनया जाते रूपक्षेपमूले क ११५ ज्ये १५३३ अनयोः पुन
रूपशुद्धिपदाभ्यां भावनार्थं न्यासः ।

क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १

क ११५ ज्ये १५३३ क्षे १

अतो जाते रूपशुद्धौ मूले क ३८०५ ज्ये २९७१८

अनयोस्तुल्यभावनया जाते रूपक्षेपमूले

क २२६१५३९८० ज्ये १७६६३१९०४९

उदाहरण

प्राणा—(१) वह कौन सा वर्ग है जिसको सड़सठ से गुणकर एक जोड़
देते हैं तो वर्ग होता है ।

(२) वह कौन वर्ग है जिसे एकसठ से गुणकर एक जोड़ देते हैं तो वर्ग होता है ।

(१) उदाहरण में १ कनिष्ठ और ३ ऋणक्षेप कल्पना करके न्यास । प्र ६७ ।
क १ ज्ये ८ क्षे ३

अब कनिष्ठ को भाज्य, क्षेप को भाजक और ज्येष्ठ को क्षेप मानकर कुट्टक के लिये न्यास । भा १ । क्षे ८ । हा ३ ।

‘हरतष्टे धनक्षेपे’ इस सूत्र के अनुसार न्यास । भा १ । क्षे २ । हा ३ वली ०
२

वाद उक्थरीति से लब्धि गुण हुए 2° लब्धि के वैषम्य से अपने 2° तक्षणों से शुद्ध हुए 1° ‘क्षेपतक्षणलामाद्व्या लब्धिः—’ इस सूत्र के अनुसार लब्धि गुण हुए 1° हर के ऋण होने से लब्धि ऋण हुई क्योंकि भाज्य १ को गुण १ से गुणकर १ हुआ उसमें क्षेप ८ जोड़कर ९ ऋणहार ३ का भाग देने से लब्धि ३ का ऋणत्व सिद्ध होता है । यहाँ गुण १ के वर्ग १ को प्रकृति ६७ में घटा देने से शेष ६६ अल्प नहीं बचता इस कारण रूप द्वो २ ऋण इष्ट मानकर ‘इष्टाहत-स्वस्वहरेण’ इस रीति के अनुसार लब्धिगुण हुए 1° । गुण ७ के वर्ग ४९ को प्रकृति ६७ में घटा देने से शेष १८ रहा, इसमें पहिले क्षेप ३ का भाग देने से लब्धि ऋण मिली । यह क्षेप गुणवर्ग को प्रकृति में घटा देने से व्यस्त हुआ अर्थात् यहाँ धनक्षेप ६ हुआ । और लब्धि कनिष्ठपद 1° हुई, इसके ऋण अथवा धन होने से ‘इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः—’ इत्यादि अगिली क्रिया में कुछ विशेष नहीं होता, इसलिए कनिष्ठ ५ धन हुआ, अब उस ५ के वर्ग २५ को प्रकृति ६७ से गुणकर १६७५ उसमें क्षेप ६ जोड़ देने से १६८१, येष्ट मूल ४१ आया ।

अथवा ‘पूर्व ज्येष्ठं गुणाभ्यस्तं प्रकृतिमकनिष्ठयुक् ।

क्षेपोद्धृतं चक्रवाले ज्येष्ठं वा प्रकृतं भवेत् ॥

इस उक्त वासना सिद्ध सूत्र के अनुसार पहिले ज्येष्ठ ८ को गुण ७ से गुणकर ५६ उसमें प्रकृति ६७ से गुणे हुए कनिष्ठ ६७ × १ = ६७ को जोड़कर १२३ और क्षेप ३ का भाग देने से ४ ज्येष्ठपद सिद्ध हुआ, अब इसे भी कनिष्ठ के भांति धन मानने से वही ज्येष्ठ हुआ ४१ । इस प्रकार सर्वत्र जानी । अब इसका फिर कुट्टक के लिये न्यास । भा ० ५ । क्षे ० ४१ । हा ० ६ ।

‘हरतष्टे धनक्षेपे—’ इसके अनुसार न्यास ।

भा ० ५ । क्षे ० ५ । हा ० ६ । वल्ली ०

१

५

०

उक्त रीति से लब्धि गुण हुए $\frac{५}{५}$ तक्षणलाभ ६ से युक्त लब्धि वास्तव लब्धि होती

है तो इस प्रकार लब्धि गुण हुए $\frac{११}{५}$ गुण ५ के वर्ग २५ को प्रकृति ६७ में घटा

देने से शेष ४२ रहा इसमें क्षेप ६ का भाग देने से ७ लब्धि आई, और ‘व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते’ इसके अनुसार क्षेप ७ हुआ । और लब्धि ११ कनिष्ठ है, इस ११ के वर्ग १२१ को प्रकृति ६७ से गुण कर ८१०७ और क्षेप ७ से घटा कर ८१०० मूल ज्येष्ठ ९० आया । अथवा ‘पूर्व ज्येष्ठं गुणाभ्यस्तं’ इस सूत्र के अनुसार ज्येष्ठ ४१ को गुण ५ से गुण कर २०५ उसमें प्रकृति ६७ से गुणे हुए कनिष्ठ ६७ $\times ५ = ३३५$ को जोड़कर ५४० उसमें क्षेप ६ का भाग देने से ज्येष्ठ ९० हुआ इस भांति कनिष्ठ, ज्येष्ठ और क्षेप हुए ।

क ११ ज्ये ९० क्षे ७ हरतष्टे धनक्षेपे’ इस सूत्र के अनुसार वल्ली १

इनका कुट्टक के लिए न्यास ।

१

भा ११ । क्षे ९० ।

१

हा ७

६

०

बाद दो राशि हुए $\frac{१८}{१२}$ तक्षणों से तष्टित करने से हुए $\frac{५}{५}$ लब्धि विषम रही

इस कारण ११ । ७ इनको अपने अपने तक्षणों में शुद्ध करने से लब्धि गुण हुए

४ क्षेप्रतक्षणलाभ १२ से युक्त कर इस प्रकार सक्षेप लब्धि गुण हुए

क्षे ११ ल १६

क्षे ७ गु २

गुण २ के वर्ग ४ को प्रकृति ६७ में घटा देने से शेष ६३ अल्प नहीं रहता इस कारण ऋणरूप १ इष्ट मान कर उससे हार ७ को गुणने से धन ७ हुए इस ७ को गुण २ में जोड़ने पर गुण ९ हुआ ।

इसी भांति इष्ट १ से भाज्य ११ को गुण कर लब्धि १६ में जोड़ देने से लब्धि २७ हुई यह कनिष्ठपद है । इसे पूर्व रीति से धन कल्पना कर लिया अब

कनिष्ठ २७ के वर्ग ७२९ को प्रकृति ६७ से गुणने से ४८८४३ हुआ इसमें क्षेप २ घटा देने से ४८८४१ शेष रहा इसका मूल २२१ ज्येष्ठ हुआ और गुण ९ के वर्ग ८१ में प्रकृति ६७ को घटा देने से १४ शेष बचा इसमें ऋणक्षेप ७ का भाग देने से ऋणक्षेप २ लब्ध हुआ। इस प्रकार कनिष्ठ ज्येष्ठ और क्षेप हुए। क २७ ज्येष्ठ २२१ क्षेप २ इनका तुल्यभावना के लिये न्यास।

क २७ ज्ये २२१ क्षेप २

क २७ ज्ये २११ क्षेप २

यहां कनिष्ठ ज्येष्ठों के वज्राभ्यासों ५९६७।५९६७ का ऐक्य ११९३४ कनिष्ठ हुआ कनिष्ठों के घात ७२९ को प्रकृति ६७ से गुणने से ४८८४३ हुआ इसमें ज्येष्ठाभ्यास ४८८४१ को जोड़ने से ९७६८४ ज्येष्ठ हुआ। और क्षेपों शं२ का घात ४ क्षेप हुआ इनका यथाक्रम न्यास

क ११९३४ ज्ये ९७६८४ क्षे ४

यहां इष्ट २ कल्पना करके 'इष्टवर्गहतः क्षेपः—' इस सूत्र के अनुसार रूप-क्षेप में कनिष्ठ, ज्येष्ठ और क्षेप सिद्ध हुए

क ५९६७ ज्ये ४८८४२ क्षे १

(२) उदाहरण में इष्ट १ को कनिष्ठ और ३ को क्षेप मानकर न्यास।

प्र ६१। क १ ज्ये ८ क्षे ३ अब इनका कुट्टक के लिए न्यास।

भा १ क्षे २ हा ३। वल्ली

०

२

०

रक्त रीति से दो राशि हुए २ लब्धि के वैषम्य से अपने अपने तक्षणों में शब्द हुए १ बाद क्षेपतक्षणलब्धि २ से जुड़ी हुई लब्धि वास्तव हुई ३ इस प्रकार लब्धि गुण सिद्ध हुए ३ 'इष्टाहतस्वस्वहरेण—' इसके अनुसार २ इष्ट

कल्पना करने से लब्धि गुण हुए ५ यहाँ गुण ७ के वर्ग ४९ को प्रकृति ६१ में घटा देने से शेष १२ बचा, इसमें क्षेप ३ का भाग देने से क्षेप ४ आया। यह 'व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते' इसके अनुसार ऋण हुआ ४। और गुण ७ की लब्धि ५ कनिष्ठ है, इसका वर्ग २५ को प्रकृति ६१ से गुणने से १५२५ हुआ, इसमें क्षेप ४ घटा देने से १४२१ शेष रहा, इसका मूल ३९ ज्येष्ठ हुआ। इनका यथाक्रम न्यास।

क ५ ज्ये ३९ क्षे ४

अब 'इष्टवर्गहृतः—' इसके अनुसार इष्ट १ कल्पना करने से रूपशुद्धि में कनिष्ठ ज्येष्ठ और क्षेप हुए । क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १°

इनका भावना के लिये न्यास । क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १°

क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १°

अब 'वज्राभ्यासौ ज्येष्ठलघ्वोः—' इसके अनुसार रूपक्षेप में कनिष्ठ, ज्येष्ठ और क्षेप हुए । क $\frac{१३५}{२}$ ज्ये $\frac{१५२३}{२}$ क्षे १

इनका रूपशुद्धि पदों के साथ भावना के लिए न्यास

क $\frac{१३५}{२}$ ज्ये $\frac{१५२३}{२}$ क्षे १

क $\frac{५}{२}$ ज्ये $\frac{३९}{२}$ क्षे १°

यहाँ वज्राभ्यासों ७६०५।७६१५ का ऐक्य १५२२० हुआ इसमें हरों २।२ के घात ४ का भाग देने से कनिष्ठ हुआ ३८०५ । कनिष्ठों के घात ९७५ को प्रकृति ६१ से गुणने से ५९४७५ हुआ, इसमें ज्येष्ठाभ्यास ५९३९७ को जोड़ने से ११८८७२ हुआ, इसमें हरों के घात ४ का भाग देने से ज्येष्ठ आया २९७१८ । क्षेपों १ । १ का घात क्षेप हुआ १° । इनका यथाक्रम न्यास ।

क ३८०५ ज्ये २९७१८ क्षे १° इनका तुल्य भावना के लिए न्यास ।

क ३८०५ ज्ये २९७१८ क्षे १°

क ३८०५ ज्ये २९७१८ क्षे १°

यहाँ वज्राभ्यासों ११३०७६९९० । ११३०७६९९० का योग २२६१५३९८० कनिष्ठ हुआ । कनिष्ठों के घात १४४७८०२५ को प्रकृति ६१ से गुण देने से ८८३१५९५२५ हुआ, इसमें वज्राभ्यास ८८३१५९५२५ को जोड़ देने से ज्येष्ठपद १७६६३११९०४९ हुआ । और क्षेपों ११ का घात क्षेप १ हुआ । इनका यथाक्रम न्यास ।

क २२६१५३९८० ज्ये १७६६३११९०४९ क्षे १

इस प्रकार भावना वश से अनेक कनिष्ठ, ज्येष्ठ और क्षेप सिद्ध होंगे ।

अथ रूपशुद्धौ खिलत्वज्ञानप्रकारान्तरितपदानयनयोः करणसूत्रं वृत्तद्वयम्—

रूपशुद्धौ खिलोद्दिष्टं वर्गयोगो गुणो न चेत् ॥ ५० ॥

अखिले कृतिमूलाभ्यां द्विधा रूपं विभाजितम् ।

द्विधा ह्रस्वपदं ज्येष्ठं ततो रूपविशोधने ॥ ५१ ॥

पूर्ववद्वा प्रसाध्येते पदे रूपविशोधने ।

व्याख्या—अथ रूपशुद्धौ खिलत्वेऽखिलत्वे चावधारिते तत्र प्रकारान्तरेण पदानयनं श्लोकाभ्यामाह—रूपशुद्धाविति । यदि प्रकृतिवर्ग-योगरूपा न भवेत्तर्हि रूपशुद्धावुद्दिष्टं खिलं ज्ञेयम् । कस्यापि वर्गस्तथा प्रकृत्या गुणितो रूपोनः सन् मूलदो नैव भवेदित्यर्थः । अथाखिलत्वे पदानयनमाह—अखिले इति । अखिले सति ययोर्वर्गयोर्योगः प्रकृतिरस्ति तयोर्मूलाभ्यां द्विधा रूपं विभाजितं सद्रूपशुद्धौ द्विधा ह्रस्वपदं भवति । ततस्ताभ्यां कनिष्ठाभ्यां तस्य वर्गः प्रकृत्या क्षुण्ण इत्यादिना ज्येष्ठपद-मपि द्विधा भवति अथवा, अखिलत्वे सति पूर्ववत् ‘इष्टं ह्रस्वं’ इत्यादिना ऋणे चतुरादिक्षेपे पदे प्रसाध्य ‘इष्टवर्गहृतः क्षेपः’ इत्यादिना रूपशुद्धौ-पदे प्रसाध्ये ।

भाषा—रूपशुद्धि में दुष्ट उदाहरण का ज्ञान और सुष्ठु उदाहरण होनेपर प्रकारान्तर से पदानयन का प्रकार—

रूपशुद्धि अर्थात् १ ऋणक्षेप में यदि गुण (प्रकृति) वर्गों का योग न होवे तो उस उद्दिष्ट को खिल अर्थात् दुष्ट जानो, तात्पर्य यह है कि किसी का वर्ग उस प्रकृति से गुणा और रूपोन मूलप्रद न होगा । इस भांति यदि उद्दिष्ट दुष्ट न होवे तो जिन वर्गों का योग प्रकृति है तिनके मूलों का अलग-अलग रूप में भाग देने से दो प्रकार के कनिष्ठ रूपशुद्धि में होंगे और उन कनिष्ठोंपर से—तस्य वर्गः प्रकृत्या क्षुण्णः—इस सूत्र के अनुसार ज्येष्ठ भी दो प्रकार के होंगे । अथवा उदाहरण के शुद्ध होने पर ‘इष्टं ह्रस्वं’—इस रीति के अनुसार चार आदि क्षेप में पदानयन करने के बाद ‘इष्टवर्गहृतः क्षेपः क्षेपः स्यात्’ इस सूत्र से रूपशुद्धि में पदों का आनयन करो ।

अत्रोपपत्तिः ।

$$क^2 प्र - १ = ज्ये^2$$

$$क^2 प्र = ज्ये^2 + १ \dots \dots \dots (१)$$

$$\therefore प्र = \frac{ज्ये^2}{क^2} + \frac{१}{क^2} = \left(\frac{ज्ये}{क} \right)^2 + \left(\frac{१}{क} \right)^2$$

अतोऽत्र रूपशुद्धौ खिलोद्दिष्टं वर्गयोगो गुणो न चेत् इत्युपपन्नम् ।

अथ अखिले कल्प्यते—

प्रकृतिः = $इ^२ + इ'^२$

ततः क = १ प्रकल्प्य क्षेपः = $इ^२$, वा $इ'^२$ प्रकल्प्य द्विधा कनिष्ठज्येष्ठक्षेपाः—

क	ज्ये	क्षे	क	ज्ये	क्षे
१	इ	$-इ'^२$	वा	१	$इ'$ $इ^२$,

उभयत्र $इ_१$ वा $इ'$ इष्टं प्रकल्प्य 'इष्टवर्गहतः' क्षेपः क्षेपः स्यादिष्टभाजिते,
इत्यादिना

क	ज्ये	क्षे
$\frac{१}{इ_१}$, $\frac{इ}{इ_१}$, -१		
क	ज्ये	क्षे
$\frac{१}{इ}$, $\frac{इ'}{इ}$, $--१$		

इत्युपपन्नम्

उदाहरणम्—

त्रयोदशगुणो वर्गो निरेकः कः कृतिर्भवेत् ।

को वाष्टगुणितो वर्गो निरेको मूलदो वद ॥३०॥

अत्र प्रकृतिद्विकत्रिकयोर्वर्गयोर्योगः १३ । अतो द्विकेन रूपं हतं
रूपशुद्धौ कनिष्ठं पदं स्यात् $\frac{१}{२}$ । अस्य वर्गात् प्रकृतिगुणादेकोनान्मूलं
ज्येष्ठं पदम् $\frac{३}{२}$ । अथवा त्रिकेण रूपं हतं कनिष्ठं स्यात् $\frac{१}{३}$ अतो
ज्येष्ठम् $\frac{२}{३}$ । अथवा कनिष्ठम् १ अस्य वर्गात् प्रकृतिगुणाच्चतुर्नान्मूलं
ज्येष्ठम् ३ । क्रमेण न्यासः । क १ ज्ये ३ क्षे ४

'इष्टवर्गहतः क्षेप' इत्यादिना जाते रूपशुद्धौ पदे क $\frac{१}{२}$ ज्ये $\frac{३}{२}$

अथवा प्रकृतेर्नव स्यक्त्वैवमेव जाते क $\frac{१}{२}$ ज्ये $\frac{३}{२}$ क्षे १ ।

चक्रवालेनाभिन्ने वा । एषां ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपाणां भिन्नानां 'ह्रस्वज्येष्ठ-
पदक्षेपान्'—इत्यादिना भाज्यप्रक्षेपभाजकान्प्रकल्प्य पूर्वपदयोर्न्यासः—

भा. $\frac{१}{२}$ । क्षे. $\frac{३}{२}$ । हा. $\frac{१}{१}$ ।

अत्र भाज्यभाजकक्षेपानर्धेनापवर्त्य जाताः भा १ । क्षे. ३ । हा. २ ।

हरतष्टे—इति कुट्टकेन गुणलब्धी $\frac{१}{२}$ अत्रेष्टमृणरूपं प्रकल्प्य जातो-

ऽन्यो गुणः ३ । गुणवर्गे इत्यादिना क्षेपः ४ लब्धिः ३ कनिष्ठम-
तो ज्येष्ठम् ११ । क्रमेण न्यासः । क ३ ज्ये ११ क्षे ४ ।

अतोऽपि पुनः 'भाज्यप्रक्षेपभाजकान्' इत्यादिना चक्रवालेन
लब्धो गुणः ३ । गुणवर्गे इत्यादिना रूपशुद्धावभिन्ने पदे क ५ ज्ये १८ ।

इह सर्वत्र पदानां रूपक्षेपपदाभ्यां भावनयाऽऽनन्त्यम् । एवं
द्वितीयोदाहरणे प्रकृतिः ८ । प्राग्वज्जाते ह्रस्वज्येष्ठपदे क $\frac{१}{२}$ ज्ये १ ।

उदाहरण—

भाषा—(१) कौन ऐसा वर्ग है जिसको तेरह से गुणाकर एक घटा देने से वर्ग होता है ।

(२) वह कौनसा वर्ग है जिसको आठ से गुणाकर एक घटा देने पर वर्ग होता है ।

प्रथम उदाहरण की प्रकृति १३ है यह प्रकृति २, ३ संख्याओं के वर्गयोगों के समान है । इस लिए २ का १ में भाग देने पर कनिष्ठपद $\frac{१}{२}$ आया इसका वर्ग $\frac{१}{४}$ हुआ इसको प्रकृति १३ से गुणा तो $\frac{१३}{४}$ हुआ । यहां एक घटा देने से $\frac{११}{४}$ बचा मूल लिया $\frac{३}{४}$ हुआ यह ज्येष्ठ पद हुआ । इसी प्रकार ३ का एक में भाग देने से $\frac{३}{१}$ कनिष्ठ हुआ । इसके वर्ग $\frac{९}{१}$ को प्रकृति १३ से गुण कर उसमें एक घटाने से $\frac{१४}{१}$ आया मूल लिया $\frac{५}{१}$ हुआ । अथवा इष्ट १ को कनिष्ठ कल्पना किया इसके वर्ग १ को प्रकृति १३ से गुण कर ४ घटाने पर ९ शेष रहा इसका मूल ३ आया यह ज्येष्ठपद हुआ ।

इसलिये क्रम से—क १ ज्ये ३ क्षे ४

अब यहाँ पर “इष्टवर्गहतः क्षेपः क्षेपः स्यादिष्टभाजिते” इस सिद्धान्त के अनुसार २ इष्ट कल्पना करने पर रूपशुद्धि में पद हुए क ३ ज्ये ३

अथवा कनिष्ठ १ के वर्ग १ को प्रकृति १३ से गुणाकर उसमें ९ घटा देने पर ४ शेष रहा इसका मूल १ यह ज्येष्ठपद हुआ । अतः—क ३ ज्ये ३ क्षे १

अब इसका “ह्रस्वज्येष्ठपदक्षेपान्” इत्यादि नियम के अनुसार कुट्टक के लिए भाज्य भाजक और क्षेप में ३ का अपवर्तन देकर । न्यास—

भा १ क्षे ३ हा २ “हरतष्टे धनक्षेपे गुणलब्धो तु पूर्ववत्” इस रीति के अनुसार क्रिया की तो १ ये लब्धिगुण हुए वल्ली के विषम होने

पर इन्हें तक्षण में घटाया तो १ ये लब्धि गुण हुए, फिर “क्षेपतक्षण-लाभाख्या लब्धिः शुद्धौ तु वर्जिता” इस सिद्धान्त से १ लब्धि को जोड़ देने से २ ये लब्धि गुण हुए । अब गुण १ के वर्ग को प्रकृति १३ में घटाया तो १२

शेष रहा यह अल्प नहीं रहा किन्तु अधिक है इसलिये ऋण १ इष्ट मान कर “इष्टाहतस्वस्वहरेण युक्ते” इस नियम से तक्षणों १ । २ को ऋण १ से गुणा किया १ । २ ये हुए । लब्धि गुणों में २ । १ जोड़ने से ३ । ३ हुए ये ही लब्धि गुण हैं । अब गुण ३ के वर्ग ९ को प्रकृति १३ में घटा देने से शेष ४ रहा । इसमें ऋण क्षेप का भाग देने से ४ ऋण आया यह क्षेप है “व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते” इस नियम के अनुसार क्षेप धन हुआ ४ । लब्धि ३ कनिष्ठ है इसके वर्ग ९ को प्रकृति १३ से गुणा किया तो ११७ हुए । इसमें क्षेप ४ जोड़ा तो १२१ हुए । इतका वर्गमूल लिया ११ आया । यह ज्येष्ठ है । इसलिये

क ३ ज्ये ११ क्षे ४ ये कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप हुए अब इस पर से फिर कुट्टक किया । भा ३ । क्षे ११ । हार ४ ।

यहाँ पर भी “हरतष्टे धनक्षेपे इस नियम के अनुसार

भा ३ । क्षे ३ । हार ४

- ० वल्ली सम हुई इसलिये “उपान्तिमेन स्वोर्ध्वे हते
- १ अन्येन युते तदन्त्यं त्यजेत्” इस नियम से
- ३ ३ ये दो राशि हुए । क्षेपतक्षणलाभाख्या इस नियम
- ० ३

से २ को उस लब्धि में जोड़ा तो लब्धि गुण ५ हुए । अब यहाँ पर ३ के

वर्ग ९ को प्रकृति १३ में घटाया तो ४ वचे इसमें पूर्व क्षेप ४ का भाग दिया तो १ आया, “व्यस्तः प्रकृतितश्च्युते” इससे १ ऋण हुआ १ लब्धि ५ कनिष्ठ है। इसके वर्ग २५ को प्रकृति १३ से गुणा किया ३२५ गुणन फल आया इसमें क्षेप १ घटा देने से ३२४ शेष रहा इसका वर्गमूल १८ यह ज्येष्ठ आया। इनका क्रम से न्यास

क ५ ज्ये १८ क्षे १

यहां पर बराबर पदों का रूपक्षेप पदों के साथ भावना से अनन्त कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप होंगे।

(२) द्वितीय उदाहरण में प्रकृति ८ है यह २।२ इनके वर्गों के योग के बराबर है। इसलिये १ में २ का भाग देने से कनिष्ठपद $\frac{१}{२}$ हुआ।

इसके वर्ग $\frac{१}{४}$ को प्रकृति ८ से गुणा करने पर $\frac{८}{४}$ आया इसमें १ घटाने पर $\frac{७}{४} = १$ हुआ इसका वर्गमूल १ ज्येष्ठ हुआ।

इसलिये क्रम से—

क $\frac{१}{२}$ ज्ये १ क्षे १ ये कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप हुए।

उदाहरणम्—

को वर्गः षड्गुणस्त्याढ्यो द्वादशाढ्योऽथ वा कृतिः ।

युतो वा पञ्चसप्तत्या त्रिशत्या वा कृतिर्भवेत् ॥३१॥

अत्र रूपं ह्रस्वं कृत्वा न्यासः ।

प्र ६ क १ ज्ये ३ क्षे ३

अत्र ‘क्षेपः क्षुण्णः क्षुण्णे तदापदे’ इति द्विगुणिते जाते द्वादशक्षेपे २।६। पञ्चगुणे पञ्चसप्ततिमिते क्षेपे ५।१५। दशगुणे जाते त्रिशती-क्षेपे १०।३०।

उदाहरण—

भाषा—वह कौन वर्ग है जिसको छ से गुणकर उसमें तीन वा बारह वा पचहत्तर वा तीन सौ जोड़ देते हैं तो वर्ग हो जाता है। यहां इष्ट १ को कनिष्ठ कल्पना किया, उसके वर्ग १ को प्रकृति ६ से गुणकर ३ जोड़ दिया तो ९ हुआ, इसका मूल ३ ज्येष्ठ हुआ, अब इनका क्रम से न्यास।

प्र ६। क १ ज्ये ३ क्षे ३

यहाँ 'अथवा क्षेपः क्षुण्णः क्षुण्णे तदा पदे' इस सूत्र के अनुसार २ इष्ट कल्पना करने से बारह क्षेप में पद हुए ।

प्र ६ क २ ज्ये ६ क्षे १२

५ इष्ट कल्पना करने से पचहत्तर क्षेप में पद हुए

प्र ६ क ५ ज्ये १५ क्षे ७५

और १० इष्ट कल्पना करने से तीन सौ क्षेप में पद हुए

प्र ६ क १० ज्ये ३० क्षे ३००

अथेच्छयानीतपदयोः रूपक्षेपपदानयनदर्शने करणसूत्रं सार्धवृत्तम् ।

स्वबुद्ध्यैव पदे ज्ञेये बहुक्षेपविशोधने ॥ ५२ ॥

तयोर्भावनयाऽऽनन्त्यं रूपक्षेपपदोत्थया ।

वर्गच्छिन्ने गुणे ह्रस्वं तत्पदेन विभाजयेत् ॥ ५३ ॥

व्याख्याः—अथ येन केनाप्युपायेनोद्दिष्टक्षेपे पदे प्रसाध्य पश्चाद्रूप-क्षेपभावनया तयोरानन्त्यं भवतीति सार्धेनानुष्टुभाह—स्वेति । क्षेपाश्च विशोधनानि च क्षेपविशोधनानि, बहूनि च तानि क्षेपविशोधनानि च बहुक्षेपविशोधनानि, तेषां समाहारो बहुक्षेपविशोधनं तस्मिन् बहुक्षेप-विशोधने । यत्र कुत्रापि क्षेपे धने ऋणे वा पूर्वं स्वबुद्ध्यैव पदे ज्ञेये इत्यर्थः । पश्चाद्रूपक्षेपपदोत्थया भावनया तयोरानन्त्यं सुलभम् । यतः 'तत्राभ्यासः क्षेपयोः क्षेपकः स्यात्' इति रूपक्षेपेण गुणितो यः कश्चन धनमृणं वा क्षेपो यथास्थित एव स्यादिति ।

“स्वबुद्ध्यैव पदे ज्ञेये” इत्युक्तं तत्र प्रकारान्तरं दर्शयति वर्गेति । गुणे वर्गच्छिन्ने सति ह्रस्वं तत्पदेन विभाजयेत् । अस्यायमाशयः । प्रकृतिं केनचिद्वर्गेणापवर्त्य, अपवर्तितया प्रकृत्या कनिष्ठज्येष्ठपदे साध्ये ! तत्र येन वर्गेण प्रकृतेरपवर्त्तः कृतस्तस्य पदेन कनिष्ठं भाज्यं, ज्येष्ठं तु यथास्थितमेव । उद्दिष्टप्रकृतावेते पदे भवत इति भावः ।

अत्रोपपत्तिः

बहुक्षेपविशोधने अर्थात् यस्मिन् कस्मिन्नपि क्षेपधने ऋणे वा प्रथमतः स्वबुद्ध्यैव पदे ज्ञेये इति ।

पश्चाद्रूपक्षेपपदोत्थया भावनया तयोरानयनमानन्त्यं सुलभम् । यतस्तत्रा

भ्यासः क्षेपयोः क्षेपकः स्यादिति रूपक्षेपेण गुणितो यः कश्चिद्धनमृगं वा क्षेपो यथा-
स्थित एव ।

अतः “स्यबुद्धयैव पदे ज्ञेये बहुक्षेपविशोधने । तयोर्भावनयाऽनन्तरं रूपक्षेप-
पदोत्थया ।”

इत्युपपन्नम्

वर्गच्छिन्न इत्यत्रोपपत्तिः ।

आलापोक्त्या हि $\text{प्र} \cdot \text{क}^2 \pm \text{क्षे} = \text{ज्ये}^2 \dots\dots (१)$

अत्र यदि प्रकृतिः केनापि वर्गेण विभक्ता सती शुद्धयेत् । तदा—

$$\frac{\text{प्र}}{\text{व}^2} = \text{ल}^1 \therefore \text{प्र} = \text{व}^2 \cdot \text{ल}^1 \text{ अत उत्थापानेन जातौ पक्षौ—}$$

$$\text{ल}^1 \times \text{व}^2 \cdot \text{क}^2 \pm \text{क्षे} = \text{ज्ये}^2$$

$$\text{ल}^1 \times (\text{व} \cdot \text{क})^2 \pm \text{क्षे} = \text{ज्ये}^2$$

यद्यत्र “ल” इयं प्रकृतिः तदा “क०व” कनिष्ठं स्यात्तथाऽपि तस्मिन्नेव
क्षेपे तदेव ज्येष्ठं सिद्धयति । परन्तु कनिष्ठं (क०व) यदि ‘व’, अनेन विभज्यते
तदा प्रकृतौ “प्र” इत्यस्यां, “क” पूर्वसिद्धं वास्तवं कनिष्ठं स्यात् । अन्यथा ‘ल’
प्रकृतौ ‘क०व’ एतन्मितं कनिष्ठं तिष्ठेदिति—

अतः “वर्गच्छिन्ने गुणे ह्रस्वं तत्पदेन विभाजयेदित्युपपन्नं सर्वम् ।

भाषा—रूपक्षेप भावना के द्वारा किसी उद्दिष्ट क्षेप में पद लाकर उक्त पदों के
आनन्त्य की विधि लिखते हैं ।

जिस स्थान में अधिक धनक्षेप अथवा ऋणक्षेप होवे, उस जगह पहिले अपनी
बुद्धि के अनुसार पदों को सिद्ध करना चाहिये । बाद में कनिष्ठ ज्येष्ठ और रूपक्षेप
से उत्पन्न हुई भावना के द्वारा अनन्त कनिष्ठ ज्येष्ठ बन सकते हैं । आशय यह
है कि “तत्राभ्यासः क्षेपयोः क्षेपकः स्यात्” इस सूत्र के अनुसार रूपक्षेप से गुणा
किया हुआ क्षेप धन अथवा ऋण व्यो का त्यों रहेगा ।

उदाहरणम्—

द्वात्रिंशद्गुणितो वर्गः कः सैको मूलदो वद ।

न्यासः । प्र ३२ अतः प्राग्वज्जाते कनिष्ठज्येष्ठे ३ । ३ अथवा
“वर्गच्छिन्ने गुणे ह्रस्वं तत्पदेन विभाजयेत्” इति प्रकृतिः ३२ चतुश्छिन्ना
लब्धम् ८ अस्यां प्रकृतौ कनिष्ठज्येष्ठे १।३ येन वर्गेण प्रकृतिश्छिन्ना
तस्य पदेन २ कनिष्ठे भक्ते जाते ते एव पदे क ३ ज्ये ३ ।

उदाहरण—

भाषा—वह कौन सा वर्ग राशि है जिसको बत्तीस से गुणदेते हैं और उसमें एक जोड़ देते हैं तो मूलप्रद होता है ।

अब यहां पर $\frac{1}{2}$ इष्ट मानकर “इष्टं ह्रस्वं”—इस नियम से कनिष्ठ ज्येष्ठ और क्षेप इस प्रकार हुए । क $\frac{1}{2}$ ज्ये ३ क्षे १

अथवा “वर्गेच्छिजे गुणे ह्रस्वं” इस के अनुसार प्रकृति ३२ में ४ का अपवर्त्तन देने से ८ लब्धि आई अब प्रकृति ८ में उपरोक्त रीति से कनिष्ठ और ज्येष्ठ क्षेप हुए । क १ ज्ये ३ क्षे १

पुनः ४ के मूल दो का कनिष्ठ १ में भाग देने से ३२ प्रकृति में पद इस प्रकार हुए । क $\frac{1}{2}$ ज्ये ३ क्षे १

इसी प्रकार प्रकृति ३२ में १६ का अपवर्त्तन देने से २ लब्धि आये अब प्रकृति २ में कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप हुए । क २ ज्ये ३ क्षे १ ।

पुनः १६ के वर्गमूल ४ का कनिष्ठ २ में भाग देने से कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेप इस प्रकार हुए । क $\frac{1}{2}$ ज्ये ३ क्षे १ ।

अथ वर्गरूपायां प्रकृतौ भावनाव्यतिरेकेणानेकपदानयने

करणसूत्रं वृत्तम्—

इष्टभक्तो द्विधा क्षेप इष्टोनाढ्यो दलीकृतः ।

गुणमूलहतश्चाद्यो ह्रस्वज्येष्ठे क्रमात्पदे ॥

व्याख्या—इष्टभक्त इति—उद्दिष्ट क्षेप इष्टेन भक्तः सन् द्विधा स्थाप्यः स एकत्र इष्टेनोनः । अपरत्र इष्टेन सहितः । उभयत्रापि दलीकृतोऽर्धितः । गुणमूलहतः । प्रकृति आद्यः मूलहतः तदाक्रमात् ह्रस्वज्येष्ठे पदे भवतः ।

भाषा—वर्गरूपप्रकृति में पद लाने का प्रकार । उद्दिष्टक्षेप में इष्ट का भाग देकर उसे दो स्थानों में रखो और एक स्थान में उसमें इष्ट घटादो दूसरे स्थान में जोड़ दो बाद में आधा करो । पहिले स्थान में प्रकृति के मूल का भाग दो तो क्रम से कनिष्ठ ज्येष्ठ होंगे ।

अत्रोपपत्तिः ।

अथालोपोक्त्या—

∴ प्र० क^२ + क्षे = ज्ये^२

∴ क्षे = ज्ये^२ - प्र० क^२

क्षे = (ज्ये + $\sqrt{\text{प्र} \cdot \text{क}^2}$) (ज्ये - $\sqrt{\text{प्र} \cdot \text{क}^2}$) वर्गान्तरं हि योगा-
न्तरघातसमं भवतीति नियमात् ।

अत्र यदि ज्ये - $\sqrt{\text{प्र} \cdot \text{क}^2}$ = इष्टं कल्प्यते तदा

(ज्ये + $\sqrt{\text{प्र} \cdot \text{क}^2}$) इ = क्षे

$$\therefore \text{ज्ये} + \sqrt{\text{प्र} \cdot \text{क}^2} = \frac{\text{क्षे}}{\text{इ}}$$

अत्र द्वयोरन्तरतुल्यमिष्टं कल्पितं, तयोर्योगरूपाऽत्रलब्धिरागताऽतः परं संक्रमण-
विधिना राशी—

$$\text{अतः बृहदांशः} = \frac{१}{२} \left(\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}} + \text{इ} \right) = \text{ज्येष्ठम्}$$

$$\text{लघुरांशः} = \frac{१}{२} \left(\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}} - \text{इ} \right) = \text{क} \sqrt{\text{प}}$$

$$\text{अतः} \quad \frac{\frac{१}{२} \left(\frac{\text{क्षे}}{\text{इ}} - \text{इ} \right)}{\sqrt{\text{प}}} = \text{क}$$

इति सर्वमुपपन्नं जातम् ।

उदाहरणम्—

का कृतिर्नवभिः क्षुण्णा द्विपञ्चाशद्युता कृतिः ।

को वा चतुर्गुणो वर्गस्त्रयस्त्रिंशद्युता कृतिः ॥

अत्र प्रथमोदाहरणे क्षेपः ५२ । द्विकेनेष्टेन हतो द्विष्टः इष्टो-
न्नाद्धो दलीकृतो जातः १२।१४ । अनयोराद्यः प्रकृतिमूलेन भक्तो
जाते ह्रस्वज्येष्ठे ४,१४ । अथ वा क्षेपं ५२ चतुर्भिर्विभज्य एवं जाते
ह्रस्वज्येष्ठे ३ । १२ ।

द्वितीयोदाहरणे क्षेपं ३३ एकेनेष्टेन विभज्यैवं जाते ह्रस्व ज्येष्ठे
८।१७ त्रिभिर्जाते २।७ ।

उदाहरण

भाषा—(१) वह कौनसा वर्ग है जिसको नी से गुण कर बाबन जोड़ देते
हैं तो वर्ग हो जाता है ।

(२) ऐसा कौनसा वर्ग है जिसको चार से गुण कर तैंतीस जोड़ देते हैं तो वर्ग हो जाता है ।

(१) प्रथम उदाहरण में क्षेत्र ५२ है । इष्ट २ कल्पना किया इसका क्षेत्र ५२ में भाग दिया २६ लब्धि मिली फिर इसे दो स्थान में रक्खा २६।२६ इसमें इष्ट २ को जोड़ा तथा घटाया तो क्रम से २८।२४ हुए फिर आधा किया १४।१२ हुए । इनमें पहिले १२ में प्रकृति ९ के मूल ३ का भाग दिया तो ४ लब्धि आई ४ यह कनिष्ठ आया ज्येष्ठ १४ हुआ क्षेत्र ५२ है । अथवा क्षेत्र ५२ में ४ का भाग देकर पहिले नियम के अनुसार क ३ ज्ये १७ हुए ।

(२) उदाहरण में क्षेत्र ३३ है यहां इष्ट १ का क्षेत्र ३३ में भाग दिया ३३ ही लब्धि आई । इसको दो स्थानों में स्थापित किया । ३३।३३ बाद १ इष्ट को जोड़ा तथा घटाया तो ३४।३२ यह क्रम से हुए आधा किया तो १७।१६ यह हुए अब प्रकृति ४ के मूल दो का १६ में भाग दिया तो ८ आया यह कनिष्ठ हुआ १७ ज्येष्ठ आया । इसलिये क ८ ज्ये १७ क्षेत्र ३३ यह कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेत्र हुए । इसी प्रकार ३ इष्ट कल्पना करने से क २ ज्ये ७ क्षेत्र ३ आया ।

अथवा प्रकृतिसमक्षेपे उदाहरणम्

त्रयोदशगुणो वर्गस्त्रयोदशविजितः ।

त्रयोदशयुतो वा स्याद्वर्ग एव निगद्यताम् ॥

प्रथमोदाहरणे प्रकृतिः १३ । जाते कनिष्ठज्येष्ठे १।० अत्र, इष्ट-वर्गप्रकृत्योर्यद्विवरं, इत्यादिना रूपक्षेपमूले ३।११ आभ्यां भावनया त्रयोदशक्षेपमूले ११।३१ । वा एषामृणक्षेपपदानां रूपशुद्धि-पदाभ्यां ३।३ माभ्यां विश्लेष्यमाणभावनया त्रयोदशक्षेपमूले ३।१३ वा १८।६५ ।

प्रकृति समक्षेप में उदाहरण

आषा—वह कौनसा वर्ग है जिसको तेरह से गुण कर तेरह घटा देने से अथवा तेरह ही जोड़ देने से वर्ग ही रहता है ।

यहां पर प्रकृति १३ है, कनिष्ठ १ कल्पना किया इसके वर्ग १ को प्रकृति १३ से गुणा किया तो १३ ही हुआ १३ घटाया ० शून्य हुआ इसका वर्गमूल ० ही हुआ यह ज्येष्ठपद हुआ । इसलिये क १ ज्ये ० क्षेत्र १३ यह क्रम से कनिष्ठ ज्येष्ठ क्षेत्र हुए ।

योगभावना अर्थात् समासभावना से

क $\frac{1}{2}$ ज्ये $\frac{3}{2}$ क्षे १३

क $\frac{1}{2}$ ज्ये $\frac{3}{2}$ क्षे १

वज्राभ्यासों $\frac{3}{2} + \frac{3}{2}$ का योग $\frac{3}{2} = १८$ आया । प्रकृति १३ से गुणा किये हुए कनिष्ठों के घात $\frac{1}{2} \times ३$ में ज्येष्ठाभ्यास $\frac{1}{2} \times ७$ को जोड़ा तो $\frac{3}{2} = ६५$ आया यह ज्येष्ठमूल हुआ इस लिये क्रम से क १८ ज्ये ६५ क्षे १३ यह धनक्षेपमें हुआ—

उदाहरणम्—

ऋणैः पञ्चभिः क्षुण्णः को वर्गः सैकविंशतिः ।

वर्गः स्याद्वद चेद्वेत्ति क्षयगप्रकृतौ विधिम् ॥३४॥

न्यासः । प्र ५ । अत्र जाते मूले १।४ वा, २।१ रूपक्षेपभावनयाऽऽनन्त्यम् ।

उदाहरण—

भाषा—ऐसा कौन वर्ग है जिसको ऋण पांच से गुणकर उसमें इक्कीस जोड़ देते हैं तो वह वर्ग हो जाता है ।

न्यास । प्रकृति ५ यहाँ इष्ट १ को कनिष्ठ कल्पना किया आर इसके वर्ग को ऋण ५ से गुण दिया तो ५ हुआ इसमें क्षेप २१ जोड़ देने से १६ हुआ इसका मूल ४ ज्येष्ठ हुआ ।

इनका यथाक्रम न्यास ।

क १ ज्ये ४ क्षे २१

इसी भाँति २ इष्ट कल्पना करने से कनिष्ठ, ज्येष्ठ और क्षेप हुए ।

क २ ज्ये १ क्षे २१

यहाँ पर भी 'तयोर्भावनयानन्त्यं रूपक्षेपपदोत्थया' इसके अनुसार पदों का आनन्त्य होगा ।

उक्तं बीजोपयोगीदं संक्षिप्तं गणितं किल ।

अतो बीजं प्रवक्ष्यामि गणकानन्दकारकम् ॥५५॥

इति श्रीभास्करीये बीजगणिते चक्रवालं समाप्तम् ।

भाषा—हे गणक, बीजगणित के उपयोगी संक्षिप्त, धनर्णषड्विध से चक्रवाल तक इस गणित को मैंने कहा, अब गणकों को परम आनन्द देनेवाले बीजगणित को कहूँगा ।

* परिशिष्टम् *

सं

काशोविश्वेश्वरं नत्वा तथा गुरुरपदास्तुजम् ।
 श्रीभास्करीयबीजस्य करोमि विवृतिं सुदाम् ॥
 मूलरूपेण यद्वीजं गूढार्थाशयसंस्थितम् ।
 नवीनगणिताख्येन संयुतं सत्स्फुटं ध्रुवम् ॥
 अतस्तथात्र यतते येन स्यात्फलदायकम् ।
 बुभुत्सूनां सुबोधानां छात्राणां मनने सदा ॥
 अत्र किञ्चित्कृतित्वं हि मम नास्ति सुधीवराः ।
 विज्ञाय दोषाः शोधयन्तामागताश्चेत्प्रमादतः ॥
 मयैषा रच्यते भित्तिः प्राच्यपाश्चात्यविद्ययोः ।
 यत्रऽऽलेख्यं सपद्येव लिखन्तु सुधियो मुदा ॥

रूप्यकपञ्चकप्रकाशने रूप्यक ५ एवं लेखनमुचितं तत्र रूप्यक ५ इत्येव लिख्यते
 यतः रूप्यक इत्यस्य बोधः रूप्यकनेनैव भवति, एवं यावत्तावत् ५ इत्यत्र
 या ५ इत्येव लिख्यते यतः यावत्तावत् यत्यस्य बोधः या इत्येव कारयति इदमेवो-
 पलक्षणम् । नव्यैस्तु सांप्रतं रूप्यक ५ इत्यत्र ५ एतावन्मात्रमेव लिख्यते एवं या
 इत्यस्य स्थाने केवलं य मात्रं लिख्यते तथा गुणनरूपा संख्याऽव्यक्तस्य वामपार्श्वे
 स्थाप्यते न दक्षिणपार्श्वे यथा ३य अनेन त्रिगुणो यः, परन्तु प्राचीनास्तु या ३
 एवं लिखन्ति स्म ।

रूप्यक ५ रूप्यक ४ इत्यनेन धनपदार्थयोर्योगः प्राचीनानां मते सिद्धः ऋणत्वबोधाय
 लाघवार्थं ऋणपदार्थस्योपरि ऊर्ध्वविन्दुः स्थापितः अन्यथा ऋणपदार्थस्य बोधोऽति-
 दुर्घट आसीत् इदानीं धनर्णगुणकादि बोधकानि यानि चिह्नानि निवृद्धिः स्वीकृतानि
 तैर्विषयबोधे सुगमता भवति । नवीनचिह्नपरिचितेभ्यो गणकेभ्यः प्राचीना लेखनशैली
 कठिना प्रतिभाति अतः प्रथमं चिह्नस्यैव स्पष्टता क्रियते ।

+, -, ×, ÷, =, २, √, एभिः संकेतैर्धनर्णगुणनभजनतुल्यवर्गमूल-
 चिह्नानि प्रकाशयन्ते ॥ इदं चिह्नं लघुमहतोर्मध्ये यो लघुः स महति ऋणमिति
 प्रकाशयति, यद्यत्र य = ३, क = २ तदा या ५ क = १ इति प्रकाशितं भवति ।
 एवं यदि य = ४, क ६ तदा या ५ क = २ इति प्रकाशितो भवति ।

गुणनचिह्नं बहुधा गुण्यगुणकयामध्ये विन्दुदानेन द्योत्यते यथा अ० व इत्यनेन
अ × व इति प्रकाश्यते, बहुधा एतदपि न दीयते केवलमक्षराणां समापन्यासेनैव
तेषां गुणनं प्रकाश्यते यथा अव = अ × व, वा, अवक = अ × व × क.

द्वयोः संख्ययोर्युगलनमभीष्टं चेत्तदा गुणनचिह्नमवश्यं दीयते यथा ६ = २ × ३
= २०३, २३ इत्यनेन १० + ३ इति द्योत्यते न कदाचित् २ × ३ इति । विन्दुरूपं
गुणनचिह्नं किञ्चिदधस्तथा दशमलवबोधको विन्दुः किञ्चिदुपरि स्थाप्यते यथा २. ३ =
२ × ३, २.३ = $\frac{२३}{१०}$ इति । द्वयोर्वर्द्धनां वाऽव्यक्तानां गुणने फलं
गुणनफलमित्येव कथ्यते तेषां प्रत्येकगुणकः गुणावयवसंज्ञोदाह्रियते यथा ३अकव =
३ × अ × क × व = गुणनफलम् तथात्र ३, अ, क, व प्रत्येकं ३ अकव इत्यस्य
गुणावयवः ।

± इदं धनमृणं च प्रकाशयति

7 इदं वामाक्षस्थपदार्थस्याधिक्यं प्रकाशयति

∠ इदं दक्षिणपक्षस्थपदार्थस्य महत्त्वं प्रकाशयति

०० इदं यतः इति बोधयति

तथा ०० इदं अतः इति बोधयति

अव्यक्तानां योगान्तरस्य स्पष्टता यथा

+ अ - व, + क तथा - ड एषां योगे कर्त्तव्ये अ - व + क - ड एकं लिख्यते अतः
इदं स्वरूपं यदि इ इत्यत्र योज्यते तदा

$$इ + (अ - व + क - ड) = इ + (+अ) + (-व) + (+क) + (-ड) \\ = इ + अ - व + क - ड$$

अतः स्वरूपयोः स्वरूपाणां वा योगे कर्त्तव्ये योजके यानि खण्डानि
तेषां धनर्णाचिह्नं तथाविधमेव तिष्ठति तत्र न किमपि परिवर्त्तनं भवति ।

() इदं चिह्नं तु बन्धनीत्यनेन नाम्ना व्यवह्रियते
अस्या एव प्रकारान्तरस्वरूपाणि { } इदं ऊर्ध्वे रेखास्वरूपं तथा
[] एवं भवन्ति । एवं यदि कस्यचित् स्वरूपस्य कस्मिंश्चित् स्वरूपे
व्यवकल्पनं क्रियते तदा शोध्यस्वरूपे यानि खण्डानि तेषां धनश्रृण-
चिह्ने व्यत्ययो भवति धनचिह्नं श्रृणं भवति तथा श्रृणाचिह्नं
धनात्मकं भवति ।

$$यथा इ - (अ - व + क - ड) = इ - (+अ) - (-व) - (+क) - (-ड) \\ = इ - अ + व - क + ड$$

अत इदं सिद्धं यत् कस्याश्चिद्वन्धन्याः पूर्वं यदि + धनचिह्नं तदा बन्धनीमोक्षणे प्रत्येकस्य तदन्तर्गतखण्डस्य धनऋणचिह्ने तथैव स्थास्यतः एवं यदि बन्धन्याः पूर्वं ऋणचिह्नं तदा बन्धनीमोक्षणे तदन्तर्गतस्य सर्वस्य खण्डस्य धनऋणचिह्ने परिवर्तनं भवति ।

उ० १ स्पष्टीक्रियताम् $५ अ + (२ अ - व) - (अ + व)$ तदा $५ अ + २ अ - व - (अ + व) = ५ अ + २ अ - व - अ - व = ६ अ - २ व$

उ० २. $२ य - (-य + र) + ३ य + २ र - (७ य - र)$ स्पष्टीक्रियताम्

$$= २ य + य - र + ३ य + २ र - ७ य + र$$

$$= २ य + य - र + ३ य + २ र - ७ य + र = - य + २ र$$

उ० ३. $-३ य + (-र + २ य) - ८ य - ३ र + ज - (-९ य + र)$ स्पष्टीक्रियताम्

$$= -३ य = र + २ य - ८ य - ३ र + ज - ९ य + र$$

$$= -३ य - र + २ य - ८ य + ३ र - ज + ९ य - र = र - ज$$

उ० ४. $२ अ - [अ - \{अ - (य + अ - य)\}]$ स्पष्टीक्रियताम्

$$= २ अ - [अ - \{अ - (य + अ - य)\}]$$

$$= २ अ - [अ - \{अ - (+ अ)\}]$$

$$= २ अ - [अ - \{अ - अ\}] = २ अ - [अ] = २ अ - अ = अ$$

अथवान्यथैव बन्धनीविमोक्षणम् $= २ अ - अ + \{अ - (य + अ - य)\}$

$$= अ + अ - (य + अ - य) = २ अ - य - अ - य$$

$$= २ अ - य - अ + य = अ.$$

परन्तु बन्धनीविमोक्षणं प्रमथनोऽभ्यन्तरत एव सुखकरम् भवति ।

(उ. १) निम्नलिखितोदाहरणेषु बन्धनीमोक्षणं क्रियताम्

१. $य + (२ - ज) - (य - ज)$

२. $(२ अ - ३ य) + (-अ + २ य)$

३. $(अय + वर) - (वर - १)$

४. $(अ + व + क + फ) - (-अ + व - क + फ)$

५. $अ - (व - क + ड) = ६ - २ अ + व + (ड - क)$

६. $य + र + ज - (य + र - ज) = (-र - ज + य)$

७. $२ अ - ३ व = (अ + २ व) - (८ व - ६ अ)$

८. $३ अ - (व - ४ क) + २ ड + (अ - व) - २ क - ड$

९. $४ म - ३ म - ४ + प्र - ६ - (२ म - ८)$
१०. $(अय + वय) + (वर + कर) + (अय - वय) - (वर - कर)$
११. $(य^२ - २ यर + ३ र^२) - (य^२ + ३ यर - २ र^२) - (४ र^२ - ५ यर)$
१२. $३ अ - \{२ व - (अ - ४ व)\} - (अ + व)$
१३. $४ य - [२ - \{य + (२ - ३ अ)\}]$
१४. $(अ + य) - \{अ - य - [अ - २ य - (२ अ - व)]\}$
१५. $अ + य - [व + र - \{अ - य - व - २ र\}]$
१६. $१६ अ - [३ व + \{५ अ + २ व - (३ अ - २ अ - ४ व)\}]$
१७. $१७ अ - ४ व - [३ व + २ अ - \{५ व - ६ अ - (२ व - अ)\}]$
१८. $अव - \{(३ व क इ - २ अ व) - (५ व क इ - व इ फ) + (३ अ व - ३ व इ फ)\}$
१९. $१६ - य - [(-७ य) - \{८ - (+६ य) - (-६ य - (-३))\}]$
२०. $- \{अ - [-२ अ - (-३ अ - -४ अ - ५ व)] + (-५ अ - ३ व)\}$
२१. $- ५ अ - \{-४ व - [-८ क - (-४ व + -६ अ - ७ क)]\}$
२२. $- म - \{-३ म + २ न - (-५ म - ८ न) + (-३ म - २ न - ३ न + म)\}$
२३. यदि $अ = ८$, $व = ०$ तथा $क = ३$, तदा
 $२ अ - (३ व - क) - (८ क - अ) = \{४ क - (अ - व)\}$ वास्तव
मानं किम् ?
२४. $१७ य - (२ य - ३ र) - \{४ र + २ व - (य - २ र)\}$ अत्र किं मानं
यदि $य = ३$ तथा $र = १४$
समजातीयानां वर्गघनादिकानां घाते तस्य वर्गघनादिकानां
योगरूपघातो भवेत् ।
- यतः $अ^२ = अ \cdot अ$ तथा $अ^३ = अ \cdot अ \cdot अ$ अतः $अ^२ \times अ^३ = अ \cdot अ \times अ \cdot अ \cdot अ$
 $= अ^५ = अ^{३+२}$ एवमेव $अ^४ \times अ^५ = अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ \times अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ$
 $= अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ \cdot अ = अ^९ = अ^{४+५}$ ।
- एवम् $अ^म = अअअ...म$ संख्यापर्यन्तम्
तथा $अ^न = अअअ...न$ संख्यापर्यन्तम्
 $\therefore अ^म \times अ^न = (अअअ...म पर्यन्तं) \times (अअअ...न पर्यन्तं)$

$= अअअअ \dots (म + न)$ संख्या पर्यन्तम्,

$= अ^{म+n}$ अत्र म, न संख्ये धनात्मके पूर्णेऽत्र ज्ञेये ।

अतो घाताङ्कानां वधे घातयोगतुल्यः घाताङ्को भवतेति ।

अनेनैव नियमेन $अ^म \times अ^n \times अ^प = (अ^म \times अ^n) अ^प = अ^{म+n} \times अ^प$
 $= अ^{म+n+p}$ एवम् $(अ^म)^न = अ^म \times अ^म \times अ^म \times अ^म \dots न पर्यन्तम् ।$
 $= अ^{म+m+m+m \dots न पर्यन्तम्} = अ^{म \cdot न}$

अत्र गुणनविषयमधिकृत्य केचित्सिद्धान्ताः प्रदर्श्यन्ते इमे सर्वत्रो-
 पयोगिनः । एषामुपयोगेन सर्वत्र गणिते लाघवं सोष्ठवं च समुत्पद्यते
 विद्यार्थिभिर्यत्नतः प्रथममेवामभ्यासः करणीयः ।

सि १. $(अ + व)^२ = (अ + व)(अ + व) = अ(अ + व) + व(अ + व)$
 $= अ^२ + अव + अव + व^२ = अ^२ + २ अव + व^२$

००. $(अ + व)^२ - (अ^२ + व^२) = अ^२ + २अव + व^२ - अ^२ - व^२$

२ अव

अतएव एकवर्णमध्यमाहरणे भास्करः

वर्गयोगस्य यद्वाश्योर्युतिवर्गस्य चान्तरम् ।

द्विघ्नघातसमानं स्याद् द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥

सि २. $(अ - व)^२ = (अ - व)(अ - व) = अ(अ - व) - व(अ - व)$
 $= अ^२ - अव - अव + व^२ = अ^२ - २ अव + व^२$

अतः $(अ - व)^२ + २ अव = अ^२ - २ अव + व^२ + २ अव = अ^२ + व^२$

अतएव ग्रन्थकारः दोःकोऽन्यन्तरवर्गेण द्विघ्नो घातः समन्वितः ।

वर्गयोगसमः स स्याद् द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥

एवम् $(अ + व)^२ - ४ अव = अ^२ + २ अव + व^२ - ४ अव$
 $= अ^२ - २ अव + व^२ = (अ - व)^२$

अतएव ग्रन्थकारः चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्य चान्तरम् ।

राश्यन्तरकृतेस्तुल्यं द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥

एवम् $अ^२ - व^२ = अ^२ + अव - अव - व^२ = अ(अ + व) - व(अ + व)$
 $= (अ + व)(अ - व)$

०. $अ + व = \frac{अ^२ - व^२}{अ - व}$ अतएव भास्कराचार्यः

वर्गान्तरं राशिवियोगभक्तं योगः

$$\begin{aligned}
 \text{एवम् } अ^3 - व^3 &= अ^3 + अ^2व - अ^2व - व^3 \\
 &= अ^2 (अ - व) + व (अ^2 - व^2) \\
 &= अ^2 (अ - व) + व (अ - व) (अ + व) \\
 &= (अ - व) \{ अ^2 + व (अ + व) \} \\
 &= (अ - व) (अ^2 + अव + व^2)
 \end{aligned}$$

अतः राश्योर्द्वयोर्वर्गयोगस्तयोर्घातसमन्वितः ।

राश्यन्तरेण वै निम्नो घनान्तरमितिर्भवेत् ॥

$$\begin{aligned}
 \text{एवम् } अ^3 + व^3 &= अ^3 + अ^2व - अ^2व + व^3 = अ^2 (अ + व) - व (अ^2 - व^2) \\
 &= अ^2 (अ + व) - व (अ - व) (अ + व) \\
 &= (अ + व) \{ अ^2 - व (अ - व) \} \\
 &= (अ + व) (अ^2 - अव + व^2)
 \end{aligned}$$

अतः राश्योः कयोर्वर्गयोगस्तयोर्घातविहीनितः ।

राशियोगेन वै निम्नो घनयोगमितिर्भवेत् ॥

$$\begin{aligned}
 (अ + व)^3 &= (अ + व) (अ + व) (अ + व) = (अ + व) (अ + व)^2 \\
 &= (अ + व) (अ^2 + २ अव + व^2) \\
 &= अ (अ^2 + २ अव + व^2) + व (अ^2 + २ अव + व^2) \\
 &= अ^3 + २ अ^2व + अ व^2 + व अ^2 + २ अव^2 + व^3 \\
 &= अ^3 + ३ अ^2व + ३ अव^2 + व^3 \\
 &= अ^3 + व^3 + ३ अव (अ + व)
 \end{aligned}$$

अतएव भास्करः । समत्रिघातश्च घनः प्रदिष्टः स्थाप्यो घनोऽन्त्यस्य
ततोऽन्त्यवर्गः । आदित्रिनिघ्नस्तत आदिवर्गस्यन्त्याहतोऽथादिघनश्च सर्वे ।
स्थानान्तरत्वेन युता घनः स्यात् ।

खण्डाभ्यां वाहतो राशिस्त्रिघ्नः खण्डघनैक्ययुक् ।

$$\begin{aligned}
 \text{एवमेव } (अ - व)^3 &= (अ - व) (अ - व) (अ - व) \\
 &= (अ - व) (अ - व)^2 \\
 &= (अ - व) (अ^2 - २ अव + व^2) \\
 &= अ (अ^2 - २ अव + व^2) - व (अ^2 - २ अव + व^2) \\
 &= अ^3 - २ अ^2व + अव^2 - व अ^2 + २ अव^2 - व^3 \\
 &= अ^3 - ३ अ^2व + ३ अव^2 - व^3 \\
 &= अ^3 - व^3 - ३ अव (अ - व)
 \end{aligned}$$

गुणावयवनिर्धारणम्

गुणावयवनिर्धारणगणितं महदुपकारकम् गुणने, भजने, समीकरणे सर्वत्रानेन प्रकारेण लाघवं भवति । भारतीयगणके विषयस्यास्यज्ञान-मासीद्यतस्तैलिखितं यद्गणितं योगान्तरघातसमं भवति तथानेकत्र समीकरणे तुल्यगुणकाङ्काः पृथक् कृताः परञ्च नियमरूपेण तस्य प्रकारो न दत्तः न वा पृथग्रूपेण कुत्राप्यध्यायोऽस्य गणितस्य दृश्यते तेनास्मिन्नुपयोगिनि गणिते विषयस्यास्य सुलभज्ञानाय केचित्प्रकारा लिख्यन्तेः—

ये केचन राशयः सन्ति सर्वत्र गुणावयवो वरीवर्त्येव कल्प्यतां राशिः य तदात्रापि $y = 1$ य अत्र य इत्यस्य १, य द्वावयवौ ययोर्घातः राशिसमः य समो भवेत् एवं ३ य इत्यस्य ३, य अत्रेमावयवौ एवं ५ य^३ अत्र ५, य, य, य यद्वा ५ य^२, य एतेऽवयवाः, यदि कस्मिंश्चित्स्वरूपे एक एव राशिस्तदा तस्यावयवनिर्धारणं न कठिनं किन्तु यत्र बहवो राशयस्तत्र सर्वगतस्यैकावयवस्य निर्धारणं वस्तुतः कठिनं भाति यदि तत्र प्रत्यक्षतः कोऽपि तादृशो गुणको न दृश्यते यश्च सर्वत्र राशौ गुणकः स्यात् कल्प्यतां $अय^२ - अर^२$ अत्र अ, खण्डयोर्गुणकः तेन $अय^२ - अर^२ = अ (य^२ - र^२)$ इत्यत्र अ गुणावयवस्य ज्ञानं सुखेन भवति परञ्च $य^२ - र^२$ अत्रापि द्वौ गुणावयवौ वर्त्तन्ते ययोर्ज्ञानं प्रत्यक्षतो न समायाति तेनात्र तज्ज्ञानाय यत्नः क्रियते यथा $य^२ - र^२ = य^२ + यर - यर - र^२ = य (य + र) - र (य + र) = (य + र) (य - र)$ अतः यस्य कस्यापि स्वरूपस्य तावेव गुणावयवौ ते वा गुणावयवाः ययोर्घेषां वा घातो निर्दिष्टस्वरूपतुल्यो भवेत् ।

तेन $य^२ - र^२$ इत्यस्य $य + र$, $य - र$ इति द्वावयवौ अत इदं सिद्धं यत् वर्गान्तरं योगान्तरघातसमं भवति अतो यत्र कुत्रापि स्वरूपे वर्गान्तरं परिलक्षितं भवति तत्र सुखेन ज्ञेयं यदिदं तयोः राशयोर्योगान्तरघातसममतस्तत्र योगान्तररूपौ द्वौ गुणकस्यावयवौ ।

उ १. अ य - अ क^२ य + अ य^३ गुणावयवरूपे परिवर्त्यताम्

तदा अ य - अ क^२ य + अ य^३ = अ य (१ - क^२ + य^२)

उ २. ८ य^२ - १० व य^५ = २ य^२ (४ - ५ व य^३)

$$उ ३. ६ अ^३ य^२ - ९ अ^२ य^२ + १५ अ व य र$$

$$= ३ अ य (२ अ^२ य - ३ अ य + ५ व र)$$

$$\begin{aligned} उ० ४. (क + अ)^४ - (क - अ)^४ &= \{ (क + अ)^२ \}^२ - \{ (क - अ)^२ \}^२ \\ &= \{ (क + अ)^२ + (क - अ)^२ \} \{ (क + अ)^२ - (क - अ)^२ \} \\ &= (क^२ + २ क अ + अ^२ + क^२ - २ क अ + अ^२) \\ &\quad (क^२ + २ अ क + अ^२ - क^२ + २ क अ - अ^२) \\ &= (२ क^२ + २ अ^२) ४ क अ = २ \times ४ क अ (क^२ + अ^२) \end{aligned}$$

यद्वा लाघवाय कल्प्यतां क + अ = नी, क - अ = पी

$$\begin{aligned} तदा (क + अ)^४ - (क - अ)^४ &= नी^४ - पी^४ = (नी^२)^२ - (पी^२)^२ \\ &= (नी^२ + पी^२) (नी^२ - पी^२) \text{ ततोऽग्रे सुलभम्} \end{aligned}$$

उ. ५. ८७५ इत्यस्य वर्गः कः ?

$$\begin{aligned} (८७५)^२ &= (८७५)^२ - (२५)^२ + (२५)^२ \\ &= (८७५ + २५) (८७५ - २५) + ६२५ \\ &= ९०० \times ८५० + ६२५ = ७६५६२५. \end{aligned}$$

(उ. २) अभ्यासार्थमुदाहरणानि

१. अ^२ व + अव । २. २ क - क^२ । ३. म^२ - २ म क ।
४. अ^२ व + अ व^२ । ५. ८ अ^२ - ६ अव - ४ अ क ।
६. अ^२ व - ३ अ व^२ । ७. १२ प^२ र - ३ प र^२ ।
८. ६ क^३ ल - ६ क^२ ल^२ + १२ क^३ ल^२ ।
९. ८१ क^६ ल^४ + ६३ क^५ ल^३ । १०. २४ म^५ क^६ प^२ - ४२ म^२ क^३ ल^५ ।
११. ७ अ^३ क ल^२ + १४ अ^२ क^२ ल^२ - २१ अ^२ क ल^२ ।
१२. अव + व क + क ड + अ ड । १३. म^२ + म + न + मन
१४. २ अ क - ४ अ ल = व क + २ व ल । १५. अ^२ + व^२ + अ + १ ।
१६. अव र - व क र^२ + अ क र - अ^२ ।
१७. क ल प^२ - क^३ प - ल^३ प + क^२ ल^३ ।
१८. (अ + व) क - (अ + व) ल + (अ + व) प
१९. म^३ क ल - म^२ ल^२ - म^२ क^२ + म क ल
२०. म^२ - १६ २१. ६४ - र^२ २२. २५ अ^२ क^२ - ४६ व^२
२३. ८१ र^२ - ६४ ल^२ २४. १ - क^८ २५. अ^८ - क^८
२६. ३ क - १२ क^३ २७. ५० अ^५ व^२ क^२ - ८ अ^२ क^५ ल^२ ।
२८. ३ क^३ - ५ क ल^३ । २९. २ अ^५ - ५ अ क^५

$$३०. (क - ल)^2 - प^2 \quad ३१. २५ प^2 - ४ (३ च - १)^2$$

$$३२. ४ (ल क - म छ)^2 - ८१ क^2 छ^2 ।$$

$$३३. (३ अ - ५ व)^2 - (३ व छ - अ क)^2 ।$$

$$३४. (७ अ - ६ व)^2 - (६ अ - ७ व)^2 ।$$

$$३५. (म क + छ)^2 - (क + म छ)^2 ।$$

$$३६. (पर - च स)^2 - (प स - च र)^2 ।$$

लिखितानां मानानि साध्यानि

$$३७. (८७६)^2 - (१२१)^2 । \quad ३८. (६७२८)^2 - (६७२७)^2$$

$$३९. (६४)^2 \quad ४०. (४१६)^2 । \quad ४१. (६६६६)^2 ।$$

घनयोगस्य घनान्तरस्य च गुणावयवौ

$$उ_१. ८ अ^3 + क^3 = (२ अ)^3 + (क)^3 =$$

$$(२ अ + क) \{ (२ अ)^2 - २ अ \times क + क^2 \}$$

$$= (२ अ + क) (४ अ^2 - २ अ क + क^2)$$

$$उ_२. २७ (अ + क)^3 + ८ = \{ ३ (अ + क) \}^3 + २^3 =$$

$$[\{ ३ (अ + क) \}^2 - २ \times ३ (अ + क) + २^2]$$

$$\{ ३ (अ + क) + २ \}$$

$$= \{ ९ (अ^2 + २ अ क + क^2) - ६ (अ + क) + ४ \}$$

$$(३ अ + ३ क + २)$$

$$३. ८ अ^3 - २७ क^3 = (२ अ)^3 - (३ क)^3 = (२ अ - ३ क)$$

$$\{ (२ अ)^2 + २ अ \times ३ क + (३ क)^2 \}$$

$$= (२ अ - ३ क) (४ अ^2 + ६ अ क + ९ क^2)$$

$$४. (अ^2 - व क)^3 + ८ व^3 क^3 = (अ^2 - व क)^3 + (२ व क)^3$$

$$= (अ^2 - व क + २ व क) \{ (अ^2 - व क)^2 - (अ^2 - व क) २ व क + (२ व क)^2 \}$$

$$= (अ^2 + व क) (अ^4 - २ अ^2 व क + व^2 क^2 - २ अ^2 व क + २ व^2 क^2 + ४ व^२ क^२)$$

$$= (अ^2 + व क) (अ^४ + ७ व^२ क^२ - ४ अ^२ व क)$$

$$५. ८ अ^3 - (अ^3 + १)^3 = (२ अ)^3 - (अ^3 + १)^3$$

$$= \{ २ अ - (अ^3 + १) \} \{ (२ अ)^2 + २ अ (अ^3 + १) + (अ^3 + १)^2 \}$$

$$= (२ अ - अ^3 - १) (४ अ^४ + २ अ^४ + २ अ + अ^६ + २ अ^३ + १)$$

$$= (२ अ - अ^3 - १) (अ^६ + ६ अ^४ + २ अ^३ + २ अ + १)$$

(उ. ३) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. $अ^3 + ६४$ । २. $२७ अ^3 - व^3$ । ३. $८ अ^3 + १$ ।
 ४. $६४ य^3 - १$ । ५. $५१२ य^3 - २७$ । ६. $१२५ अ^3 + २७ व^3$ ।
 ७. $५४ अ^3 - २$ । ८. $य^3 + ६४ र^3$ । ९. $६४ अ^3 + १२५ व^3$ ।
 १०. $२१६ अ^3 - ८ य^३$ । ११. $७२६ + २१६ व^3$ । १२. $य^3 + १२ र^3$ ।
 १३. $\frac{१}{८} अ^3 - ५४ य^३$ । १४. $१६२ य^३ क - ३७५ य^२ क^३$ ।
 १५. $य^3 - ८ (य + र)^3$ । १६. $६४ (अ + व)^3 + २७ क^3$ ।
 १७. $(अ + व)^3 य^3 - ८ क^3 र^3$ । १८. $य^३ + (य^२ - २ अ)^3$ ।

यदि स्वरूपे एकवर्णमध्यमाहरणीयं रूपं तदा गुणावयवरूपे परिवर्तनं यथा—

$$उ० १. य^२ + ७ य + १२ = य^२ + ३ य + ४ य + १२ = (य^२ + ३ य) + (४ य + १२) = य (य + ३) + ४ (य + ३) = (य + ३) (य + ४)$$

$$उ० २. य^२ + य (अ + क) + अक = य^२ + अ य + क य + अ क = (य^२ + अ य) + (क य + अ क) = य (य + अ) + क (य + अ) = (य + अ) (य + क)$$

अनेन स्फुटमवगम्यते यद्रूपं ययोरङ्कयोर्घातरूपं, अन्यस्थकोष्ठं वा ययोर्घातरूपं ताभ्यामव्यक्तवर्गमूलं संगुण्य तयोरेव योगस्यान्तरस्य वा तुल्यं मध्यमकोष्ठं चेत्तदा ताभ्यामेव युतो हीनश्चाव्यक्तः गुणावयवौ भवतः यथात्रैव $१२ = ४ \times ३$ तथा $४ य + ३ य = ७ य$ मध्यमखण्डं तेन गुणावयवौ $य + ४, य + ३,$

$$\text{एवमेव } य^२ - १५ य + ३६ \text{ अत्र } ३६ = १२ \times ३ \text{ तथा } - १२ य + (-३ य)$$

$$= - १५ य \text{ मध्यमखण्डं तेन गुणावयवौ } य - १२, य - ३$$

$$\text{तद्यथा } य^२ - १५ य + ३६ = य^२ - १२ य - ३ य + ३६$$

$$= (य^२ - १२ य) - (३ य - ३६)$$

$$= य (य - १२) - ३ (य - १२) = (य - १२) (य - ३)$$

$$\text{एवं } य^२ - ५ य - ३६ = (य + ४) (य - ९)$$

तथा $य^२ + ७ य - १२०$ अस्मिन्नुदाहरणे $१२० = ६० \times २ = ४० \times ३ = ३० \times ४ = १५ \times ८ = १२० \times १ = १२ \times १० = २४ \times ५$ अतोऽत्रैवं विचारणीयं कयोर्गुणावयवयोर्योगोऽन्तरं वा उदाहरणस्य मध्यमखण्डसदृशं भवेत् । -१२० इयं संख्या घनशून्यतास्वरूपा तत्रापि मध्यमखण्डे घनत्वात् गुणावयवयोर्मध्ये महती

संख्या घनात्मिका तेनात्र - $१२० = (+१५) (-८)$ एवं स्वीकर्तव्यः यतः
 $+१५ - ८ = ७$ तदा $य^२ + ७ य - १२० = (य + १५) (य - ८)$ स्यात्

$$\text{तद्यथा } य^२ + ७ य - १२० = य^२ + १५ य - ८ य - १२०$$

$$= (य^२ + १५ य) - (८ य + १२०)$$

$$= य (य + १५) - ८ (य + १५) = (य + १५) (य - ८)$$

$$\text{एवमेव } य^२ + ८ य - १०५ = य^२ + १५ य - ७ य - १०५$$

$$= (य^२ + १५ य) - (७ य + १०५)$$

$$= य (य + १५) - ७ (य + १५) = (य + १५) (य - ७)$$

अथ यद्युदाहरणेऽव्यक्तवर्गस्यैव ऋणात्वं चेत्तदापि पूर्ववत् प्रकारो ज्ञेयः यथा
 $७२ + ६ य - य^२$ अत्रेदं स्पष्टं यत् $-य^२ = य \times (-य)$ तेनात्र गुणावयवौ

$$१२ = य, य + ६$$

$$\text{तद्यथा } ७२ + ६ य - य^२ = ७२ + १२ य - ६ य - य^२$$

$$= (७२ + १२ य) - (६ य + य^२)$$

$$= १२ (६ + य) - य (६ + य) = (६ + य) (१२ - य)$$

उ० १. $य^२ + \frac{१५}{२} य + \frac{५}{२}$ इदं गुणावयवरूपे परिवर्त्यताम् अत्र पूर्वोक्तयुक्त्या
 $\frac{५}{२}$ ययोभिज्ञाऽऽकरोर्धातस्तयोरेव योगः $= \frac{५}{२}$ समुचितः परन्तु १ इत्यस्य गुणावयवरूपं
 द्वयं न भवितुमर्हति तेनात्र स्वबुद्धिः $\frac{५}{२} = \frac{५}{२} = \frac{१}{२} \times \frac{५}{२}$ अतः $\frac{१}{२} + \frac{५}{२} = \frac{३}{२}$
 $= \frac{३}{२}$ अतोऽत्रोदाहरणे गुणावयवौ $य + \frac{१}{२}$, $य + \frac{५}{२}$,

$$\text{तद्यथा } य^२ + \frac{१५}{२} य + \frac{५}{२} = य^२ + \frac{१}{२} य - \frac{१}{२} य + \frac{१५}{२} य + \frac{५}{२}$$

$$= य^२ + \frac{१}{२} य + \frac{५}{२} य + \frac{५}{२} = य (य + \frac{१}{२}) + \frac{५}{२} (य + \frac{१}{२})$$

$$= (य + \frac{१}{२}) (य + \frac{५}{२})$$

$$\text{उ० २. } य^२ - \frac{१५}{२} य + १. \text{ अत्र } १ = \frac{१}{२}, \frac{३}{२} = \frac{३}{२} \times \frac{१}{२}$$

$$\text{तथा } -\frac{३}{२} + (-\frac{१}{२}) = -\frac{३}{२} \text{ अतोऽत्र गुणावयवौ } य - ३, य - \frac{१}{२}$$

$$\text{तद्यथा } य^२ - \frac{१५}{२} य + १ = य^२ - \frac{१}{२} य - ३ य + १ = य (य - \frac{१}{२}) -$$

$$३ (य - \frac{१}{२}) = (य - \frac{१}{२}) (य - ३)$$

(उ. ४) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. य^२ + २४ य + ८० । २. य^२ + ७ य + १० । ३. य^२ + ६ य + २० ।$$

$$४. य^२ + ४ य - ३२ । ५. य^२ - ५ य + ६ । ६. य^२ - २७ य + १७० ।$$

$$७. य^२ - ४ य - ३२ । ८. य^२ - ३ य - ५४ । ९. य^२ - १५ य - ५४ ।$$

$$१०. य^२ - ५ - १५६ । ११. य^२ - ७ य - ७८ ।$$

$$१२. अ^२ व^२ + १५ अ व + ३६ । १३. ८० - १६ य - य^२ ।$$

$$१४. य^२ - \frac{१}{३} य = ५ १५. अ^२ (५ + २) अ + ५ ।$$

$$१६. य^२ - २ (२ - २) य + (२ - १) (२ - ३) ।$$

$$१७. य^२ + (२ + १) य - (२ - २) (२ - १)$$

$$१८. य^२ - ४ अ व य - (अ^२ - व^२) । १९. य^२ + २ अ य + (अ^२ - १) ।$$

$$२०. य^२ - \frac{७}{४} य - \frac{१५}{८} २१. य^२ - \frac{१६ य}{१०} + \frac{३}{५}$$

अथ यद्युदाहरणेऽन्यक्तवर्गस्य गुणकाङ्कोऽपि भवति तदा तेन गुणकाङ्केन रूपं संगुण्य तस्य गुणावयवेषु ययोरेव योगान्तरतुल्यं मध्यमखण्डं स्यात्तदा ताभ्यां पूर्वोक्तेन विधिना गुणावयवौ साधनीयौ पश्चाद्व्यक्तवर्गगुणकाङ्केन विभाजनीयौ ।

यथा $६ य^२ + २३ य + २०$ अस्मिन्नुदाहरणेऽन्यक्तवर्गगुणकाङ्कः $= ६$ तेन $६ \times २० = १२०$, परन्तु $१२० = १० \times १२ = २४ \times ५ = २० \times ६ = १५ \times ८$ इत्यादि परस्त्राव्यक्तखण्डे गुणकाङ्कः $२३ = १५ + ८$ तेनात्र गुणावयवौ $(६ य + १५)$, $(६ य + ८) \div ६ = \left(\frac{६ य + १५}{३} \right) \left(\frac{६ य + ८}{२} \right)$

$$= (२ य + ५) (३ य + ४) \text{ तद्यथा } ६ य^२ + २३ य + २०$$

$$= ६ य^२ + १५ य + ८ य + २०$$

$$= (६ य^२ + १५ य) + (८ य + २०)$$

$$= ३ य (२ य + ५) + ४ (२ य + ५)$$

$$= (२ य + ५) (३ य + ४)$$

अथवाऽन्यक्तवर्गगुणकस्य गुणावयवौ साध्यौ, रूपस्य च गुणावयवौ साध्यौ तदा तयोर्द्वयोर्गुणावयवयोर्मध्ये एकस्य गुणावयवेन गुणितोऽन्यस्य गुणावयवः कार्यः तयोर्योगोऽन्तरं वा मध्यमखण्डतुल्यं चेत् तदा तयोर्गुणावयवयोरेव परस्परं योगोऽन्तरं वा स्वरूपस्य गुणावयवो भवति यथात्रैवोदाहरणे $६ य^२ = २ य \times ३ य$, तथा $२० = ५ \times ४$ अत्र $५ \times ३ य$ तथा $४ \times २ य$ अनयोरेवयोगः मध्यमखण्डं $२३ य$ तेन $३ य + ४$, $२ य + ५$ इमौ गुणावयवौ ।

यथा $५ अ^२ + १९ अ - ४$ अत्रोदाहरणे $५ अ^२ = ५ अ \times अ$ एवं $-४ = ४ \times (-१)$ अत्र $५ अ \times ४$ तथा $अ \times (-१)$ अनयोरेव योगः $१९ अ$ ।

तेनेष्टस्वरूपस्य पूर्वोक्तविधिनावयवौ (५ अ - १), (अ + ४)^५

तद्यथा ५ अ^२ + १९ अ - ४ = ५ अ^२ + २० अ - अ - ४

$$= (५ अ^२ + २० अ) - (अ + ४)$$

$$= ५ अ (अ + ४) = (अ + ४) १ = (अ + ४) (५ अ - १)$$

प्रथमप्रकारेणाप्येवम् ५ × (- ४) = - २० = २० × (- १)

$$\therefore (५ अ + २०) (५ अ - १) \div ५ = \left(\frac{५ अ + २०}{५} \right) \left(\frac{५ अ - १}{१} \right)$$

$$= (अ + ४) (५ अ - १)$$

एवं यान्युदाहरणानि एवं रूपाणि सर्वाणि साध्यानि भवन्ति ।

(उ. ५) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. ६ य^२ + ५ - १२ ।

२. ६ य^२ - ३५ य + ३६ ।

३. ४ य^२ + २३ य - ७२ ।

४. १५ य^२ + ४ य - ६६ ।

५. ६ म^२ + ६ म + २८ ।

६. ४ य^२ - १३ य र - १२ र^२ ।

७. य^२ - ५ य - २१

८. ६ य^२ र^२ + ५२ य र - १२ ।

९. ६ - ११ य - १० य^२ ।

१०. १० म^२ - ३४ म व + १५ व^२ ।

११. १२ य^२ + ३१ य र + २० र^२ । १२. ५६ र^२ + ६६ र य - ४५ य^२ ।

१३. ४२ य^२ - ४१ य - २० ।

अत्र विशेषा रीतिः ।

तत्र वक्ष्यमाणश्रीधराचार्यसूत्रेण “चतुराहतवर्गसमै” रित्यादिना किमप्येकवर्णमध्यमाहरणस्वरूपं वास्तववर्गस्वरूपे परिवर्तितव्यं तद्यथा—

$$\begin{aligned} & \text{कल्प्यते किमपि स्वरूपं य^२ - १३ य + ४० = } \frac{१}{४} (य^२ - १३ य + ४०) \\ & + (१३)^२ - (१३)^२ = \frac{१}{४} (४ य^२ - ५२ य + १६०) + १६९ - १६९ \\ & = \frac{४ य^२ - ५२ य + १६९}{४} - \frac{९}{४} = \left(\frac{२ य - १३}{२} \right)^२ - \left(\frac{३}{२} \right)^२ \\ & = \left(\frac{२ य - १३ + ३}{२} \right) \left(\frac{२ य - १३ - ३}{२} \right) \\ & = \left(\frac{२ य - १०}{२} \right) \left(\frac{२ य - १६}{२} \right) = (य - ५) (य - ८) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{प्रकारान्तरेणापि वा य^२ - १३ य + ४० = य^२ - १३ य + \left(\frac{१३}{२} \right)^२ - \left(\frac{१३}{२} \right)^२ + ४०} \\ & = \{ य^२ - १३ य + \left(\frac{१३}{२} \right)^२ \} - \left\{ \left(\frac{१३}{२} \right)^२ + ४० \right\} = य^२ - १३ य + \left(\frac{१३}{२} \right)^२ - \frac{३}{४} \end{aligned}$$

$$= (य - \frac{१३}{२})^2 - (\frac{३}{२})^2 = (य - \frac{१३}{२} + \frac{३}{२})(य - \frac{१३}{२} - \frac{३}{२})$$

$$= (य - ५)(य - ८)$$

एतेनेदं सिद्धं यत्किमपि मध्यमाहरणीयस्वरूपं प्रथमतः वर्गान्तर-
स्वरूपे परिणमय्य ततो वर्गान्तरं योगान्तरघातसममिति सिद्धान्तेन गुणा-
वयरूपे परिवर्तितं भवति ।

उ० अ^२ + ९ अ - १६२ इदं स्वरूपं गुणावयरूपे परिवर्त्यताम् ।

$$\therefore अ^2 + ९ अ - १६२ = \frac{४}{४} (अ^2 + ९ अ - १६२) + ८१ - ८१$$

$$= \frac{(४ अ^2 + ३६ अ - ६४८) + ८१ - ८१}{४}$$

$$= \frac{(४ अ^2 + ३६ अ + ८१) - ७२९}{४} = \left(\frac{२अ + ९}{२}\right)^2 - \left(\frac{२७}{२}\right)^2$$

$$= \left(\frac{२अ + ९ - २७}{२}\right) \left(\frac{२अ + ९ + २७}{२}\right)$$

$$= \frac{(२अ - १८)(२अ + ३६)}{२} = (अ - ९)(अ + १८)$$

$$\text{यद्वा } अ^2 + ९ अ - १६२ = (अ^2 + ९ अ + \frac{८१}{४}) - \frac{८१}{४} - १६२$$

$$= (अ + \frac{९}{२})^2 - \frac{७२९}{४} = (अ + \frac{९}{२})^2 - (\frac{२७}{२})^2$$

$$= (अ + \frac{९}{२} - \frac{२७}{२})(अ + \frac{९}{२} + \frac{२७}{२}) = (अ - ९)(अ + १८)$$

उ० एवमेव १२ अ^२ - २३ अ + १०

$$= \frac{१४४ अ^2 - २७६ अ + १२०}{१२} + (\frac{२३}{१२})^2 - (\frac{२३}{१२})^2$$

$$= \{ १४४ अ^2 + (\frac{२३}{१२})^2 - २७६ अ - \{ -(\frac{२३}{१२})^2 + १२० \}$$

$$= \frac{\{ १२ अ - (\frac{२३}{१२}) \}^2 - (\frac{५३९}{१२} - १२०)}{१२} = \frac{(१२ अ - \frac{२३}{१२})^2 - (\frac{७}{१२})^2}{१२}$$

$$= \frac{१}{१२} (१२ अ - \frac{२३}{१२} + \frac{७}{१२})(१२ अ - \frac{२३}{१२} - \frac{७}{१२})$$

$$= \frac{१}{१२} (१२ अ - ८)(१२ अ - १५) = (अ - \frac{२}{३})(१२ अ - १५)$$

श्रीधगचार्यरीत्याप्येवमेव फलम् ।

उ० ३. य^२ + २ य - र^२ - ४ र - ३ इदं गुणावयरूपे परिवर्त्यताम्

$$य^2 + २ य - र^2 - ४ र - ३ = य^2 + २ य + -र^2 - ४ र - ३ - १$$

$$= (य^2 + २ य + १) - (र^2 + ४ र + ४) = (य + १)^2 - (र + २)^2$$

$$= (य + १ + र + २)(य + १ - र - २) = (य + र + ३)(य - र - १)$$

उ० ४. २ य^२ - य र - ६ र^२ + ९ य + १७ र - ५ गुणावयरूपे

परिवर्तनीयम् ।

अत्र घाताङ्कस्यापचयेन स्थापने कृते

$$(२ य^२ - यर + ९ य) - (६ र^२ - १७ र + ५)$$

$$= २ य^२ - (२ - ९) य - (३ र - १) (२ र - ५)$$

अत्रान्तिमखण्डं (३ र - १) (२ र - ५) अव्यक्तवर्गगुणकेन द्वाभ्यां
संगुण्य जातं (३ र - १) (४ र - १०)

अत्रान्तिमखण्डं गुणावयवयोरन्तरस्यास्य र - ९ तुल्यं मध्यमखण्डं तेन

$$२ य^२ - (२ - ९) य - (३ र - १) (२ र - ५) = \{ २ य +$$

$$(३ र - १) \} \{ य - (२ र - ५) \} = (२ य + ३ र - १) (य - २ र + ५)$$

$$\text{यद्वा } २ य^२ - यर - ६ र^२ + ९ य + १७ र - ५$$

$$= २ य^२ - (२ - ९) य - (६ र^२ - १७ र + ५)$$

$$= \frac{१}{२} (१६ य^२ - ८ (२ - ९) य - (४८ र^२ - १३६ र + ४०))$$

$$= \frac{१}{२} \{ १६ य^२ - ८ (२ - ९) य + (२ - ९)^२ \}$$

$$- (२ - ९)^२ - (४८ र^२ - १३६ र + ४०)$$

$$= \frac{१}{२} \{ (४ य - र + ९)^२ - (७ र - ११)^२ \}$$

$$= \frac{१}{२} (४ य - र + ९ + ७ र - ११) (४ य - र + ९ - ७ र + ११)$$

$$= \frac{१}{२} (४ य + ६ र - २) (४ य - ८ र + २०)$$

$$= \frac{१}{२} \times २ (२ य + ३ र - १) (य - २ र + ५) \times ४$$

$$= (२ य + ३ र - १) (य - २ र + ५)$$

एवं तथा यतितन्व्यं येन स्वरूपं वर्गान्तरसदृशं भवेत्तदा शेषक्रिया

सुगमा ।

(उ. ६) अत्राभ्यासार्थं प्रश्नाः (गुणावयवरूपे परिवर्त्यताम्)

$$१. य^२ + २८ य + १६२ । २. य^२ - १८ य + ८० । ३. अ^२ - अ - ३८० ।$$

$$४. ३ य^२ - २० य - ३२ ।$$

$$५. १० य^२ - १६ यर - १५ र^२ ।$$

$$६. १२ - ७१ य - ६० य^२ ।$$

$$७. १५ य^२ + ३२ य - ७७५ ।$$

$$८. र^२ - र - ८६३० ।$$

$$९. ८ य^२ + ५१३ य - १०६३५ ।$$

$$१०. य^२ - ६ य - र^२ + २ र + ८ ।$$

$$११. अ^२ - ६ अ व + ५ व^२ + ४ अ क - क^२ ।$$

$$१२. य^२ + १० यर + ६ र^२ + ८ र ज - ज^२ ।$$

$$१३. अ^२ - २ अ व - ४ अ क + २ व क + ३ क^२ ।$$

$$१४. ३ य^२ - २ अ य - अ^२ - ४ अ क - ३ क^२ ।$$

$$१५. यर + २ र^२ + य + ५ र + ३ ।$$

$$१६. २ यर - ६ य + ३ र^२ - ५ र - १२ ।$$

$$१७. य^२ - २ र^२ - अर - यर - ३ रज ।$$

$$१८. १५ यर + ११ य + ३ य^२ - ५ र - ४ ।$$

$$१९. २ र^२ - ५ यर + २ य^२ - अर - अय - अ^२ ।$$

$$२०. य^२ + ४ यर + ३ य^२ + ४ अय + ६ अर + ३ अ^२ ।$$

गुणावयवनिर्धारणे प्रत्येकस्मिन्नवयवे यदि द्वयधिका राशयो भवन्ति तत्र गुणावयवस्य पृथक्करणे क्लेशोऽनुभूयते यदि तत्र काचित् स्थिरा प्रणाली न वर्तते तत्र गुणावयवपृथक्करणायैका सरला साधारणा रीतिर्दीयते या च सर्वत्रोपयुक्ता भवति यथा निम्नस्थोदाहरणे—

२ य^२ - ३ र^२ - ६ व^२ - य र - ४ य व + ११ वर अत्र गुणावयवनिर्धारणे कर्तव्ये स्वरूपे घाताङ्कस्यैकापचयेन प्रथमं स्थापनं कार्यम् यथा २ य^२ - यर - ४ य व - ३ र^२ + ११ वर - ६ व^२ अत्र प्रथममिदमनुसन्धेयं यदेकस्मिन्नवयवे य, र, व त्रयो वर्णास्सन्ति । त्रयाणां वर्णानां वर्गदर्शनात् द्वितीये गुणावयवेऽपि राशित्रयस्य संभावना । एतदर्थं कोष्ठद्वये त्रयो राशयः स्थाप्याः यथा—

य, र, व { अत्रेदं स्पष्टं यत् समजातीययोर्घातेन तेषां वर्ग उदाहरणे
य, र, व { दृश्यते एवं कोऽत्र वर्णः धनात्मकः कश्च ऋणात्मक इति
विचारे उदाहरणदर्शनादिदं स्फुटं यत् कोष्ठद्वये य धनात्मको ऋणात्मको
वा यवर्गस्य दर्शनात् एवं र वर्गस्य ऋणात्मकत्वात् र एकस्मिन् कोष्ठे
ऋणमिति स्फुटम् एवं व इत्यस्यापि ऋणत्वं ज्ञेयम्

अथ तेषां गुणकाङ्कस्य विचारः । यवर्गे रूपद्वयस्यदर्शनात् एकस्मिन् कोष्ठे य इत्यस्य रूपद्वयं गुणः, रवर्गे रूपत्रयस्य दर्शनात् तत्राप्येकस्य रवर्गस्य त्रयं गुणः एवं व वर्गे षड् रूपाणां दर्शनात् प्रत्येकस्य व कारस्य द्वौ त्रयो वा गुणकाः, षट् रूपं वा यतः $६ = २ \times ३ = ६ \times १$

एवं बुद्ध्या संभावनां दृष्ट्वा निश्चिते प्रकोष्ठे २ य - ३ र + २ व
य + र - ३ व }

अत्र परस्परगुणनेन प्रकोष्ठयोर्घात उद्दिष्टतुल्यो भवति तेन प्रथमत एवोद्दिष्टगुणावयवो निर्णय ततः क्रिययापि तस्य स्पष्टता विधेया तद्यथा

$$\begin{aligned}
 & २ य^२ - ३ र^२ - ६ व^२ - य र - ४ य व + ११ व र \text{ अत्र घाताङ्कापचय-} \\
 & \text{स्थापनेन } २ य^२ - य र - ४ य व - ३ र^२ + ११ व र - ६ व^२ \\
 & = (२ य^२ + २ य र - ६ य व) - ३ य र + २ य व - ३ र^२ + ११ व र - ६ व^२ \\
 & = २ य (य + र - ३ व) - (३ य र + ३ र^२ - ९ व र) + २ य व + २ व र - ६ व^२ \\
 & = २ य (य + र - ३ व) - ३ र (य + र - ३ व) + २ व (य + र - ३ व) \\
 & = (य + र - ३ व) (२ य - ३ र + २ व) \\
 & उ२. य^३ + ४ य^२ र - ३ य^२ व^२ - य र - ४ र^२ + ३ व^२ र \\
 & \text{अत्रापि पूर्वकल्पनया ज्ञाते प्रकोष्ठे } य + ४ र - ३ व^२ \\
 & \quad \quad \quad य^२ - र \\
 & \text{ततः } य^३ + ४ य^२ र - ३ य^२ व^२ - य र - ४ र^२ + ३ व^२ र \\
 & \text{अत्र स्वरूपं घाताङ्कापचयवशेनैवास्ति तेन} \\
 & (य^३ - य र) + (४ य^२ र - ४ र^२) - (३ य^२ व^२ - ३ व^२ र) \\
 & = य (य^२ - र) + ४ र (य^२ - र) - ३ व^२ (य^२ - र) \\
 & = (य^२ - र) (य + ४ र - ३ व^२)
 \end{aligned}$$

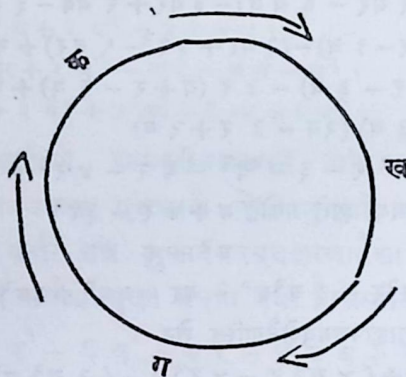
(उ. ७.) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. य^२ + २ य - र^२ - ४ र - ३ ।
२. य^२ - ६ य - र^२ + २ र + ८ ।
३. अ^२ - २ अ व - अ क + २ व क + ३ क^२ ।
४. व^२ - २ र^२ - ज^२ - य र - ३ र ज ।
५. १५ य र + ११ य + ३ य^२ - ५ र - ४ ।
६. २ र^२ - ५ य र + २ य^२ - अ र - अ य - आ र ।
७. य^२ + ४ य र + ३ र^२ + ४ अ य + ६ अ र + ३ अ^२ ।

पारिधिकनियमाः

यदि त्रयो वर्णाः क, ख, ग वृत्तपरिधौ क्रमशः स्थापिता भवन्ति तथा ते यदि शरगत्या भ्रमन्ति यत्र क, खमनुधावति ख गमनुधावति तथा ग कमनुधावति एतादृशी स्थितिः पारिधिकस्थितिनाम्ना व्यवहियते । अत्र स्थितौ क बिन्दुमारभ्य द्वयोर्वर्णयोर्घातः कख, खग, गक एवमेव यदि ख बिन्दोः प्रारभ्यते तदा द्वयोर्वर्णयो-

घातः खग, गक, कख, एवमेव यदि ग विन्दोः प्रारभ्यते तदा द्वयो-
र्वर्णयोर्वर्वातः गक, कख, खग ।



एवमेव पारिधिकस्थितौ क विन्दुमारभ्य द्वयोर्वर्णयोरन्तरं क-ख, ख-ग,
ग-क एवं भवति । पारिधिकस्थितौ वर्णानां स्थापनाय सावधानता रक्ष-
णीया तदैव कर्मणि सुगमता । पारिधिकस्थितेर्नियमः निम्नरीत्या दीयते ।

सिद्धान्तः $(य + क)(य + ख)(य + ग) = य^3 + (क + ख + ग)य^2 + (कख + खग + गक)य + कखग$ यदि क, ख, ग ऋणात्म-
कस्तदा एष एव सिद्धान्तः निम्नरूपे परिणतो भवति $(य - क)(य - ख)(य - ग) = य^3 - (क + ख + ग)य^2 + (खग + गक + कख)य - कखग$ ।

उ० य + ३, य + ५, य + ८ एषां घातः कः

$$\text{इष्टघातः } य^3 + (३ + ५ + ८)य^2 + (५० + ८० + ३०)य + ३०५०८ \\ = य^3 + १६य^2 + ७९य + १२०$$

उ२. $(य - २)(य + ५)(य - ८)$ एषां घातः कः

$$= य^3 + \{(-२) + ५ + (-८)\}य^2 + \{५(-८) + (-८)(-२) \\ + (-२)५\}य + (-२)५(-८) \\ = य^3 - ५य^2 - ३४य + ८०$$

(उ. ८.) निम्नस्थोदाहरणानां घातः कार्यः

$$१. (अ + १)(अ + २)(अ + ३)$$

$$२. (ब - १)(ब - २)(ब - ३)$$

$$३. (य - १)(य + २)(य + ३)$$

$$४. (य + २)(य + ५)(य + ८)$$

$$५. (प - १)(प - ३)(प - ४)$$

$$६. (क - ३)(क - ४)(क + ६)$$

$$७. (य + अ)(य + २ अ)(य + ३ अ)$$

$$८. (य + अ)(य + २ अ)(य - ३ अ)$$

$$९. (३ य - ३)(३ य - ४)(३ य - १०)$$

$$१०. (५ य - ४)(५ य - ३)(५ य + २)$$

यथा क, ख, ग वर्णाः क्रमस्थाः पारिधिकाः सन्ति एवमेव अ, व क, त्रयो-
वर्णाः क्रमस्थाः पारिधिकाश्चावगन्तव्याः तेनात्र सिद्धान्ताः ।

$$(व - क) + (क - अ) + (अ - व) = ०$$

$$अ(व - क) + व(क - अ) + क(अ - व) = ०$$

$$(व^२ - क^२) + (क^२ - अ^२) + (अ^२ - व^२) = ०$$

एतेषां स्पष्टता तु वन्धिण्याः मोक्षणेनैव भवति ।

(उ. ९.) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

स्पष्टीक्रियताम्

$$१. (य + अ)(व - क) + (य + व)(क - अ) + (य + क)(अ - व)$$

$$२. अ^२(व + क)(व - क) + व^२(क + अ)(क - अ) + क^२(अ + व)(अ - व)$$

$$३. (य^२ - अ^२)(व^२ - क^२) + (य^२ - व^२)(क^२ - अ^२) +$$

$$(य^२ - क^२)(अ^२ - व^२)$$

$$४. (य - व - क)(व - क) + (य - क - अ)(क - अ) +$$

$$(य - अ - व)(अ - व)$$

$$५. (२ अ - व - क)(व - क) + (२ व - क - अ)(क - अ) +$$

$$(२ क - अ - व)(अ - व)$$

$$\text{सिद्धान्तः } अ^२(व - क) + व^२(क - अ) +$$

$$क^२(अ - व) = -(व - क)(क - अ)(अ - व)$$

सिद्धान्तस्यास्य स्पष्टीकरणाय वामपक्ष एव प्रथमं स्पष्टीकरणीयः तद्यथा

$$अ^२(व - क) + व^२(क - अ) + क^२(अ - व)$$

$$= अ^२(व - क) + व^२क - व^२अ + क^२अ - अ^२व$$

$$= अ^२(व - क) + वक(व - क) - अ(व^२ - क^२)$$

$$= अ^२ (व - क) + व क (व - क) - अ (व - क) (व + क)$$

$$= (व - क) (अ^२ + व क - अ व - अ क)$$

$$= (व - क) \{ व (क - अ) - अ (क - अ) \}$$

$$= (व - क) (क - अ) (व - अ)$$

$$= - (व - क) (क - अ) (अ - व)$$

$$\text{एवम् } अ^२ (व - क) + व^२ (क - अ) + क^२ (अ - व) \dots (१)$$

$$व क (व - क) + क अ (क - अ) + अ व (अ - व) \dots (२)$$

अनयोः स्वरूपयोर्यदि वन्धिण्याः मोक्षणं क्रियते तदैमे स्वरूपे ।

$$अ^२ व - अ व^२ + व^२ क - व क^२ + क^२ अ - क अ^२ अस्यैव स्वरूपस्य तुल्ये \dots (३)$$

$$\therefore अ^२ (व - क) + व^२ (क - अ) + क^२ (अ - व)$$

$$वा व क (व - क) + क अ (क - अ) + अ व (अ - व)$$

$$वा, अ^२ व - अ व^२ + व^२ क - व क^२ + क^२ अ - क अ^२$$

$$= - (व - क) (क - अ) (अ - व)$$

$$\text{एवमेव } अ (व^२ - क^२) + व (क^२ - अ^२) + क (अ^२ - व^२)$$

$$= - (व - क) (क - अ) (अ - व)$$

विद्यार्थिभिरिदं स्मर्त्तव्यं यद्वात्र पारिधिकनियमः सुरक्षितः कृतोऽस्ति
एतस्य फलमग्रे परमोपकारकं सौलभ्यप्रदं च भविष्यति ।

उ० १. प्रदर्शयताम्

$$(अ - व) (य - अ) (य - व) + (व - क) (य - व) (य - क)$$

$$+ (क - अ) (य - क) (य - अ)$$

$$= (अ - व) (व - क) (अ - क)$$

$$\text{अत्र वामपक्षः} = (अ - व) \{ य^२ - (अ + व) य + अ व \}$$

$$+ (व - क) \{ य^२ - (व + क) य + व क \}$$

$$+ (क - अ) \{ य^२ - (क + अ) य + क अ \}$$

$$= य^२ \{ अ - व \} + (व - क) + (क - अ) \}$$

$$- य \{ (अ^२ - व^२) + (व^२ - क^२) + (क^२ - अ^२) \}$$

$$+ \{ अ व (अ - व) + व क (व - क) + क अ (क - अ) \}$$

$$= य^२ \times ० - य \times ० + \{ अ व (अ - व) +$$

$$व क (व - क) + क अ (क - अ) \}$$

$$= - (व - क) (क - अ) (अ - व)$$

$$\text{उ० २. } अ^३ (व - क) + व^३ (क - अ) + क^३ (अ - व) \text{ गुणावयवरूपे}$$

परिवर्त्यताम् । अत्र प्रथमपदं यथावत् स्थापयित्वा अघातमापकानुसारेणान्यपदं
रक्षणीयं तदा पक्षः = $a^3 (v - k) - a (v^2 - k^2) + v k (v^2 - k^2)$
= $(v - k) \{ a^3 - a (v^2 + v k + k^2) + v k (v + k) \}$

पुनरन्यगुणावयवं वघातमापकानुसारेण स्थापयित्वा जातः

पक्षः = $(v - k) \{ v^2 (k - a) + v k (k - a) - a (k^2 - a^2) \}$
= $(v - k) (k - a) \{ v^2 + v k - a (k + a) \}$

पुनस्तृतीयगुणावयवं क इत्यस्य घातमापकानुसारेण स्थापयित्वा

जातः पक्षः = $(v - k) (k - a) \{ k (v - a) + (v^2 - a^2) \}$
= $(v - k) (k - a) (v - a) (k + v + a)$
= $-(v - k) (k - a) (a - v) (a + v + k)$

यद्वा साधारणः प्रकारः

$a^3 (v - k) + v^3 (k - a) + k^3 (a - v) = a^3 (v - k) + v^3 k - v^3 a + k^3 a - k^3 v$

अत्र तथा यतितव्यं येन $(v - k)$ गुणावयवः समागच्छति तेन

= $a^3 (v - k) + (v^3 k - k^3 v) - (v^3 a - k^3 a)$
= $a^3 (v - k) + v k (v^2 - k^2) - a (v^3 - k^3)$
= $a^3 (v - k) + v k (v + k) (v - k) - a (v - k) (v^2 + v k + k^2)$
= $(v - k) \{ a^3 + v k (v + k) - a (v^2 + v k + k^2) \}$

पुनस्तथा यतितव्यं येन $(k - a)$ गुणावयवः समागच्छति तेन

= $(v - k) (a^3 + v^2 k + v k^2 - a v^2 - a v k - a k^2)$
= $(v - k) \{ (v^2 k - a v^2) + (v k^2 - a v k) - (a k^2 - a^3) \}$
= $(v - k) \{ v^2 (k - a) + v k (k - a) - a (k - a) (k + a) \}$
= $(v - k) (k - a) \{ v^2 + v k - a (k + a) \}$
= $(v - k) (k - a) (v^2 + v k - a k - a^2)$
= $(v - k) (k - a) \{ (v^2 - a^2) + (v k - a k) \}$
= $(v - k) (k - a) \{ (v - a) (v + a) + k (v - a) \}$
= $(v - k) (k - a) (v - a) (a + v + k)$
= $-(v - k) (k - a) (a - v) (a + v + k)$

(उ० १०) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

गुणावयवरूपे परिवर्त्यताम्

$$१. व क (व - क) (य + अ)^२ + क अ (क - अ) (य + व)^२ +$$

$$अ व (अ - व) (य + क)^२$$

$$२. व क (व - क) + क अ (क - अ) + अ व (अ - व)$$

$$३. (व - क) (व + क)^२ + (क - अ) (क + अ)^२ + (अ - व) (अ + व)^२$$

$$४. अ (व^३ - क^३) + व (क^३ - अ^३) + क (अ^३ - व^३)$$

$$५. व क (व^२ - क^२) + क अ (क^२ - अ^२) + अ व (अ^२ - व^२)$$

सिद्धान्तः

$$अ^३ + व^३ + क^३ - ३ अ व क =$$

$$(अ + व + क) (अ^२ + व^२ + क^२ - व क - क अ - अ व)$$

$$तद्यथा अ^३ + व^३ + क^३ - ३ अ व क = (अ + व)^३ - ३ अ व$$

$$(अ + व) + क^३ - ३ अ व क$$

$$= \{ (अ + व)^३ + क^३ \} - \{ ३ अ व (अ + व) + ३ अ व क \}$$

$$= (अ + व + क) \{ (अ + व)^२ - (अ + व) क + क^२ \} - ३ अ व (अ + व + क)$$

$$= (अ + व + क) \{ (अ + व)^२ - (अ + व) क + क^२ - ३ अ व \}$$

$$= (अ + व + क) (अ^२ + व^२ + २ अ व - अ क - व क + क^२ - ३ अ व)$$

$$= (अ + व + क) (अ^२ + व^२ + क^२ - व क - क अ - अ व) \dots (१)$$

$$= \frac{१}{२} (अ + व + क)$$

$$(२ अ^२ + २ व^२ + २ क^२ - २ व क - २ क अ - २ अ व)$$

$$= \frac{१}{२} (अ + व + क)$$

$$\{ (अ^२ + व^२ - २ अ व) + (व^२ + क^२ - २ व क) + (अ^२ + क^२ - २ अ क) \}$$

$$= \frac{१}{२} (अ + व + क) \{ (अ - व)^२ + (व - क)^२ + (अ - क)^२ \} \dots (२)$$

अत्रानुमानम् यदि अ + व + क = ०, तदा (१), (२) मानमपि शून्यम्

अर्थात् अ^३ + व^३ + क^३ - ३ अ व क = ० शून्ये गुणके जाते खमिति

निर्णयात्

एतदन्यथापि साधयितुं शक्यते

यदि अ + व + क = ०, तदा अ + व = - क पक्षयोर्धने कृते

$$अ^३ + व^३ + ३ अ व (अ + व) = - क^३$$

वा, अ^३ + व^३ - ३ अ व क = - क^३ पक्षान्तरेण

$$अ^३ + व^३ + क^३ - ३ अ व क = ०$$

तदा $अ^3 + व^3 + क^3 = ३अ व क$

उ० १. $१ + ८ य^3 + १८ य र = २७ र^3$ गुणावयवरूपे परिवर्त्यताम्
पक्षः $= १^3 + (२ य)^3 + (-३ र)^3 - ३.१ य (-३ र)$

अतोऽत्र यदि $१ = अ$, $२ य = व$, $-३ र = क$ कल्प्यते तदा

$= अ^3 + व^3 + क^3 - ३ अ व क$

$= (अ + व + क) (अ^2 + व^2 + क^2 - अ व - अ क - व क)$

$= (१ + २ य - ३ र) (१ + ४ य^2 + ९ र^2 - २ य + ३ र + ६ य र)$

अथवान्यथैवेतत्साधयितुं शक्यते तद्यथा

$१ + ८ य^3 + १८ य र - २७ र^3$

$= १^3 + (२ र)^3 + १८ य र - (३ र)^3$

$= (१ + २ य)^3 - ३.२ य (१ + २ य) + १८ य र - (३ र)^3$

$= (१ + २ य - ३ र) \{ (१ + २ य)^2 + (३ र)^2 + ३ र (१ + २ य) \}$

$- ६ य - १२ य^2 + १८ य र$

$= (१ + २ य - ३ र) \{ (१ + २ य)^2 + (३ र)^2 + ३ र (१ + २ य) \}$

$- ६ य (१ + २ य - ३ र)$

$= (१ + २ य - ३ र) (१ + ४ य^2 + ४ य + ९ र^2 + ३ र + ६ य र - ६ य)$

$= (१ + २ य - ३ र) (१ + ४ य^2 + ९ र^2 - २ य + ३ र + ६ य र)$

उ २. यदि $अ + व + क = य$ तदा $(य + अ)^3 + (य + व)^3 + (य + क)^3$

$= ३ (य + अ) (य + व) (य + क)$

$= ४ (अ^3 + व^3 + क^3 - ३ अ व क)$

सिद्धान्तेन पूर्वपक्षः $= \frac{१}{३} (य + अ + य + व + य + क) \{ (य + क) -$

$(य + व) \}^2 + \{ (य + व) - (य + क) \}^2 + \{ (य + क) - (य + अ) \}^2 \}$

$= \frac{१}{३} (३ य + अ + य + क) \{ (अ - व)^2 + (व - क)^2 + (क - अ)^2 \}$

परन्तु $अ + व + क = य$, तेन

$= \frac{१}{३} (३ य + य) \{ (अ - व)^2 + (व - क)^2 + (क - अ)^2 \}$

$= २ (अ + व + क) २ (अ^2 + व^2 + क^2 - अ व - अ क - व क)$

$= ४ (अ + व + क) (अ^2 + व^2 + क^2 - अ व - अ क - व क)$

$= ४ (अ^3 + व^3 + क^3 - ३ अ व क)$

उ ३. $(व - क)^3 + (क - अ)^3 + (अ - व)^3$

$= ३ (व - क) (क - अ) (अ - व)$ इति साध्यताम्

अत्र यतः $(व - क) + (क - अ) + (अ - व) = ०$

$$\therefore \text{पूर्वसिद्धान्तानुमानेन } (व - क)^3 + (क - अ)^3 + (अ - व)^3$$

$$= ३ (व - क) (क - अ) (अ - व) = ०$$

$$\therefore (व - क)^3 + (क - अ)^3 + (अ - व)^3$$

$$= ३ (व - क) (क - अ) (अ - व)$$

(उ. ११.) अध्यासार्थं प्रश्नाः

गुण्यगुणावरूपे परिवर्त्यताम्

$$१. अ^3 - ३ अ व + व^3 + ३$$

$$२. अ^3 + ३ व^3 + ६ अ व - १$$

$$३. य^3 + ३ अ य र + य^3 - अ^3$$

$$४. (य - र)^3 + (र - ल)^3 + (ल - य)^3$$

$$५. अ^3 (व - क)^3 + व^3 (क - अ)^3 + क^3 (अ - व)^3$$

$$६. (२ य - र)^3 - (व + र)^3 + (२ र - य)^3$$

७. यदि य = व + क, र = क + अ, ल = अ + व, तदा साध्यताम् यत्

$$य^3 + र^3 + ल^3 - ३ य र ल = २ (अ^3 + व^3 + क^3 - ३ अ व क)$$

८. यदि अ = र + ल - य, व = ल + य - र, क = य + र - ल, तदा

$$अ^3 + व^3 + क^3 - ३ अ व क = ४ (य^3 + र^3 + ल^3 - ३ य र ल)$$

$$९. साध्यताम् (व + क - २ अ)^3 + (क + अ - २ व)^3 + (अ + व - २ क)^3 =$$

$$३ (व + क - २ अ) (क + अ - २ व) (अ + व - २ क)$$

$$१०. यदि स = अ + व + क, तदा (३ अ - स)^3 + (३ व - स)^3 + (३ क - स)^3$$

$$= ३ (३ अ - स) (३ व - स) (३ क - स) इति प्रदर्शयताम् ।$$

$$११. यदि २ स = अ + व + क, तदा (स - अ)^3 + (स - व)^3 + (स - क)^3 =$$

$$३ (स - अ) (स - व) (स - क)$$

$$= \frac{१}{२} (अ^3 + व^3 + क^3 - ३ अ व क)$$

निम्नलिखितप्रश्नेषु गुणावरयवानयनाय स्वबुद्धयैवानुसन्धेयम् ।

उ० १. यथा य^3 - ३ य^२ - ६ य + ८ अत्र गुणावरयवानयनं त्रिधा भवति

$$य^3 - ३ य^२ - ६ य + ८ = य^3 + ८ - ३ य^२ - ६ य = य^3 + २^३ - ३ य (य + २)$$

$$= (य + २) (य^२ - २ य + ४) = ३ य (य + २) = (य + २) (य^२ - ५ य + ४)$$

$$= (य + २) (य - १) (य - ४)$$

$$\text{अथवा } य^3 - ३ य^२ - ६ य + ८ = य^3 - य^२ - २ य^२ + २ य - ८ य + ८$$

$$= (य^3 - य^२) - (२ य^२ - २ य) - (८ य - ८)$$

$$= य^२ (य - १) - २ य (य - १) - ८ (य - १)$$

$$= (य - १) (य^२ - २ य - ८) = (य - १) (य - ४) (य + २)$$

$$\begin{aligned}
 \text{अथवा } y^3 - ३ y^2 - ६ y + ८ &= y^3 - ३ y^2 + २ y - ८ y + ८ \\
 &= y (y^2 - ३ y + २) - ८ (y - १) \\
 &= y (y - १) (y - २) - ८ (y - १) \\
 &= (y - १) \{ y (y - २) - ८ \} = (y - १) (y^2 - २y - ८) \\
 &= (y - १) (y - ४) (y + २)
 \end{aligned}$$

एतादृशगुदाहरणे प्रथमं व्यक्ताऽङ्कस्यैव परीक्षा कार्या । यथात्र ८ एषोऽङ्कः ४, २, १ एषां धातस्वरूपस्तेनात्र प्रत्येकगुणावयवे एतानि रूपाणि भवन्ति । तथा ८ धनं तेन ४, २, १ धनात्मका अथवात्र द्वौ ऋणात्मकौ येन सर्वेषां घातः धनात्मक एव अतएवात्र गुणावयवे केवलं १ धनं ४, २ ऋणे भवतः एवं सर्वत्र बुद्धयोदाहरणस्वरूपेणैव अपवर्त्तनाङ्काः ज्ञेयाः ।

$$\begin{aligned}
 उ० २. y^3 + y^2 - १७ y + १५ &= y^3 + ५ y^2 - ४ y^2 - २० y + ३ y + १५ \\
 &= (y^3 + ५ y^2) - (४ y^2 + २० y) + (३ y + १५) \\
 &= y^2(y + ५) - ४y(y + ५) + ३(y + ५) = (y + ५)(y^2 - ४y + ३) \\
 &= (y + ५)(y - ३)(y - १)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अथवा } y^3 + y^2 - १७ y + १५ &= y^3 - १ + y^2 - १७ y + १६ \\
 &= (y - १)(y^2 + y + १) + (y - १६)(y - १) \\
 &= (y - १)(y^2 + y + १ + y - १६) \\
 &= (y - १)(y^2 + २y - १५) = (y - १)(y + ५)(y - ३)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अथवा } y^3 + y^2 - १७ y + १५ &= y^3 + y^2 - २y - १५ y + १५ \\
 &= y(y^2 + y - २) - १५(y - १) = y(y + २)(y - १) - १५(y - १) \\
 &= (y - १) \{ y(y + २) - १५ \} = (y - १)(y^2 + २y - १५) \\
 &= (y - १)(y - ३)(y + ५) \text{ एवं ज्ञेयम्}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 उ० ३. y^3 - ४ y^2 + ३ y &\text{ अत्र गुणावयवानयने प्रकाराः} \\
 (y^3 - १) - ४y + ४ &= (y - १)(y^3 + y^2 + y + १) - ४(y - १) \\
 &= (y - १)(y^3 + y^2 + y + १ - ४) = (y - १)(y^3 + y^2 + y - ३) \\
 &= (y - १) \{ y^3 - १ \} + (y^2 - १) + y - १ \} \\
 &= (y - १)(y - १)(y^2 + y + १ + y + १ + १) \\
 &= (y - १)^2 (y^2 + २y + ३)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अथवा } y^3 - ४ y^2 + ३ y &= (y^3 - y) - ३y + ३ = y(y^2 - १) - ३(y - १) \\
 &= (y - १) \{ y(y^2 + y + १) - ३ \}
 \end{aligned}$$

$$=(य-१)(य^३+य^२+य-३) \text{ ततः पूर्ववत्}$$

$$=(य-१)^२(य^२+२य+३)$$

$$\text{यद्वा, } य^४-४य^३+३य^२-४य+३=y^४-y^३+y^३-y^२+y^२-य-३य+३$$

$$=य^३(य-१)+य^२(य-१)+य(य-१)-३(य-१)$$

$$=(य-१)(य^३+य^२+य-३) \text{ ततः पूर्ववत्}$$

$$\text{उ० ४. } य^४+११य^३+४१य^२+६१य+३० \text{ गुणावयवे परिवर्त्यताम्}$$

अत्र तावत् साधारणः प्रकारः

$$=य^४+५य^३+६य^३+३०य^२+११य^२+५५य+६य+३०$$

$$=य^३(य+५)+६य^२(य+५)+११य(य+५)+६(य+५)$$

$$=(य+५)(य^३+६य^२+११य+६)$$

$$=(य+५)\{(य^३+३य^२)+(३य^२+९य)+(२य+६)\}$$

$$=(य+५)(य+३)(य^२+३य+२)$$

$$=(य+५)(य+३)(य+२)(य+१)$$

$$\text{अथवा } =य^२(य^२+११य+३०)+(११य^२+६१य+३)$$

$$=य^२(य+६)(य+५)+(११य+६)(य+५)$$

$$=(य+५)\{य^२(य+६)+११य+६\}$$

$$=(य+५)(य^३+६य^२+११य+६) \text{ ततः पूर्वोक्तवत्}$$

(उ० १२) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. य^३+६य^२+६य-१६$$

$$२. य^३+४य^२+११य+८$$

$$३. य^३-२य^२-१०य+२४$$

$$४. ६य^३+१७य^२-५य-६$$

$$५. २य^३-४य^२-८य+१६$$

$$६. अ^३-३अ+२$$

$$७. य^३-३य^२+४$$

$$८. य^३-३१य-३०$$

$$९. ८य^३-१६य^२+६$$

$$१०. अ^३+६अ^२व-८व^३$$

$$११. ६अ^३-७अ^२व+व^३$$

$$१२. २५य^३-१६व+६$$

$$१३. य^४-१३य-४२$$

$$१४. य^४-५य^३+५४$$

$$१५. ३य^४-५य^३-८$$

$$१६. १२य^४-४६य^३-६२य^२+२६य+३०$$

$$१७. ३अ^४+५अ^३व-८व^४$$

$$१८. य^४+२य^३-१३य^२-१४य+२४$$

विशिष्टोदाहरणानि

उ० १. य^४+४य^४ अत्र गुणावयवाः के ?

$$य^४ + ४ र^४ = य^४ + ४ र^२ + ४ य^२ र^२ - ४ य^२ र^२$$

$$= (य^२ + २ र^२)^२ - (२ य र)^२$$

$$= (य^२ + २ र^२ + २ य र) (य^२ + २ र^२ - २ य र)$$

$$\text{अथवा } य^४ + ४ र^४ = (य^२)^२ + (२ र^२)^२ = (य^२ + २ र^२)^२ - २ य^२ २ र^२$$

$$= (य^२ + २ र^२)^२ - (२ य र)^२$$

$$= (य^२ + २ र^२ + २ य र) (य^२ + २ र^२ - २ य र)$$

उ० २. य^४ - ७ य^२ + ९ अत्र गुणावयवाः के ?

$$य^४ - ७ य^२ + ९ = (य^२)^२ + ३^२ - ७ य^२ = (य^२)^२ + ३^२ - ६ य^२ - य^२$$

$$= (य^२ - ३)^२ - य^२ = (य^२ - ३ + य) (य^२ - ३ - य)$$

उ० ३. य^४ + य^२ + १ अत्र गुणावयवाः के ?

$$य^४ + य^२ + १ = (य^२)^२ + १ + २ य^२ - य^२ = (य^२ + १)^२ - य^२$$

$$= (य^२ + १ + य) (य^२ + १ - य)$$

उ० ४. ८ य^४ + २ य^२ - ४५ अत्र गुणावयवाः के ?

$$\text{कल्प्यते } य^२ = म \text{ तदा स्वरूपम् } = ८ म^२ + २ म - ४५$$

$$\text{तदा पूर्वयुक्त्या } ८ म^२ + २ म - ४५ = ८ म^२ - १८ म + २० म - ४५$$

$$= २ म (४ म - ९) + ५ (४ म - ९)$$

$$= (४ म - ९) (२ म + ५) = (४ य^२ - ९) (२ य^२ + ५)$$

$$= (२ य + ३) (२ य - ३) (२ य^२ + ५)$$

उ० ५. २ (अ^२ + ३ अ + ३)^२ + ३ (अ^२ + ३ अ + ३) - ५ अत्र

गुणावयवाः के कल्प्यते अ^३ + ३ अ + ३ = य तदा स्वरूपम् = २ य^२ + ३ य - ५

$$= २ य^२ - २ य + ५ य - ५ = २ य (य - १) + ५ (य - १)$$

$$= (य - १) (२ य + ५) = (अ^२ + ३ अ + ३ - १)$$

$$(२ अ^२ + ६ अ + ६ + ५)$$

$$= (अ^२ + ३ अ + २) (२ अ^२ + ६ अ + ११)$$

$$= (अ + १) (अ + २) (२ अ^२ + ६ अ + ११)$$

उ० ६. (य^२ + ७ य + ४) (य^२ + ७ य + ६) - ४८ अत्र गुणावयवाः के ?

$$\text{कल्प्यते } य^२ + ७ य = म \text{ तदा स्वरूपम् } = (म + ४) (म + ६) - ४८$$

$$= म^२ + १० म + २४ - ४८ = म^२ + १० म - २४ = म^२ - २ म$$

$$+ १२ म - २४$$

$$= म (म - २) + १२ (म - २) = (म - २) (म + १२)$$

$$= (य^२ + ७ य - २) (य^२ + ७ य + १२)$$

$$= (य^२ + ७ य - २) (य + ४) (य + ३)$$

उ० ७. य (य + १) (य + २) (य + ३) - १५ अत्र गुणावयवाः के ?

(अत्र प्रथमगुणने तादृशे कोष्ठे स्वीकार्ये येन परिवर्तितकोष्ठद्वये यथासाध्यं समता भवेत् अत्र प्रथमचतुर्थयोः द्वितीयतृतीयोर्गुणनं कृतम् ।

$$य (य + १) (य + २) (य + ३) - १५$$

$$= (य^२ + ३ य) (य^२ + ३ य + २) - १५$$

$$\text{अत्र कल्प्यते } य^२ + ३ य = म, \text{ तदा स्वरूपम् } म (म + २) - १५$$

$$= म^२ + २ म - १५ = म^२ - ३ म + ५ म - १५ = (म^२ - ३ म) + (५ म - १५)$$

$$= म (म - ३) + ५ (म - ३) = (म - ३) (म + ५)$$

$$= (य^२ + ३ य - ३) (य^२ + ३ य + ५)$$

(उ० १३) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. \text{अ}^२ \text{य}^२ - २ \text{अ य र} - \text{अ य} + \text{र}^२ + २$$

$$२. \text{अ}^२ + \text{व}^२ + २ (व क + क अ + अ व)$$

$$३. १ - २ र + र^२ - \text{अ}^२$$

$$४. १ + २ अ व + \text{अ}^२ \text{य}^२ - \text{य}^२$$

$$५. \text{अ}^४ + \text{अ}^२ \text{व}^२ + \text{व}^४$$

$$६. \text{य}^४ - (य^२ + २) \text{य}^२ \text{र}^२ + \text{र}^४$$

$$७. \text{य}^४ - २६ \text{य}^२ + २५ \quad \text{८. अ}^६ + \text{अ}^४ \text{य}^४ + \text{य}^६$$

$$९. (\text{य}^४ - २ \text{य}^३ \text{र}) - (\text{र}^४ - २ \text{य र}^३)$$

$$१०. (\text{अ} + २ व)^२ - \text{व}^२ - ३ अ - ६ व$$

$$११. \text{अ}^२ + अ - \text{व}^२ - व - क^२ - क + २ व क$$

$$१२. \text{य}^३ - ३ \text{य}^२ \text{र} + ३ \text{य र}^२ - \text{र}^३ - \text{अ}^३$$

$$१३. \text{अ}^३ + ३ \text{अ}^२ व + ३ अ व^२ + २ व^३$$

$$१४. (\text{अ} + \text{य})^३ + (\text{अ} + व) - २$$

$$१५. \text{य}^३ - ७ \text{अ}^३ + (\text{य} - ३ अ)^३$$

$$१६. \text{अ}^३ + अ (व + क) (अ + व + क) + (व + क)^३$$

$$१६. ६ \text{य}^४ + ५ \text{व}^२ - ४ \quad १७. २ \text{य}^४ + \text{य}^२ \text{र}^२ - ३ \text{र}^४$$

$$१८. ४ \text{अ}^४ - ६३ \text{अ}^४ - १६ \quad १९. (\text{य}^२ + ३ य)^२ - (\text{य}^२ + ३ य) - ६$$

$$२०. (\text{य}^२ + ४ व)^२ - २ (\text{व}^२ + ४ य) - १५$$

$$२१. (\text{व}^२ - १० य)^२ + १३ (\text{व}^२ - १० य) - २६४$$

२२. $(x^2 + r^2)^2 - ८ (x^2 - r^2) - ४८ (x^2 - r^2)^2$
 २३. $(४ अ + य)^2 - ५ (४ अ + य) (अ - ३ य) - ६ (अ - ३ य)^2$
 २४. $(अ^२ + अ व)^२ - ३ (अ व - व^२) (अ^२ + अ व) - ४ (अ व - व^२)^२$
 २५. $(अ^२ + ६ अ + २) (अ^२ + ६ अ - ४) - २७।$
 २६. $य (व + ३) (य + ६) (य + ६) + ५६$
 २७. $(य + १) (य + ४) (य + ७) (य + १०) - ४०$
 २८. $(य - १) (य - २) (य - ३) (य - ४) - १२०$
 २९. $(य - अ) (य - २ अ) (२ य - अ) (२ य - ३ अ) - ३० अ^४$

अत्र केचित् सूत्राः विशेषप्रश्नाः ।

- उ० १. $अ^२ (व + क) + व^२ (क + अ) + क^२ (अ + व) + २ अ व क$
 $= (व + क) (क + अ) (अ + व)$ इति साध्यताम्
 अत्रेदं स्पष्टं यत् $अ^२ व + अ व^२ + व^२ क + व क^२ + क^२ अ + क अ^२$
 $= अ^२ (व + क) + व^२ (क + अ) + क^२ (अ + व)$
 $= व क (व + क) + क अ (क + अ) + अ व (अ + व)$
 $= अ (व^२ + क^२) + व (क^२ + अ^२) + क (अ^२ + व^२) = स... (१)$

अइत्यस्यघाताङ्कापचयस्थापनेन वामपक्षस्य स्वरूपम्

$$= अ^२ (व + क) + अ (व^२ + २ व क + क^२) + व^२ क + व क^२$$

$$= अ^२ (व + क) + अ (व + क)^२ + व क (व + क)$$

$$= (व + क) \{ अ^२ + अ (व + क) + व क \}$$

$$= (व + क) (अ + क) (अ + व)$$

अतः $स + २ अ व क = (व + क) (अ + क) (अ + व)$

- उ० २. $अ^२ (व + क) + व^२ (क + अ) + क^२ (अ + व) + ३ अ व क$
 $= (अ + व + क) (व क + क अ + अ व)$ इति साध्यताम्
 वामपक्षः $= अ^२ व + अ व^२ + व^२ क + व क^२ + क^२ अ + क अ^२ + ३ अ व क$
 $= (व^२ क + व क^२ + अ व क) + (क^२ अ + क अ^२ + अ व क)$
 $+ (अ^२ व + अ व^२ + अ व क)$
 $= व क (व + क + अ) + क अ (क + अ + व) + अ व (अ + व + क)$
 $= (अ + व + क) (व क + क अ + अ व)$
 अतः $स + ३ अ व क = (अ + व + क) (व क + क अ + अ व)$

$$\text{उ० ३. } (अ + व + क)^3 = अ^3 + व^3 + क^3 + ३(व + क)(क + अ)(अ + व)$$

इति साध्यताम्

$$(अ + व + क)^3 = अ^3 + व^3 + क^3 + ३अ^२व + ३अव^२ + ३व^२क + ३वक$$

$$+ ३क^२अ + ३कअ^२ + ६अवक$$

$$= अ^3 + व^3 + क^3 + ३स + ६अवक$$

$$= अ^3 + व^3 + क^3 + ३(स + २अवक)$$

$$= अ^3 + व^3 + क^3 + ३(व + क)(क + अ)(अ + व)$$

प्रथमोदाहरणवलेन

$$\text{उ० ४. } ८(अ + व + क)^3 - (व + क)^3 - (क + अ)^3 - (अ + व)^3$$

$$= ३(२अ + व + क)(अ + २व + क)$$

(अ + व + २क) इति साध्यताम्

$$\text{यतः } ८(अ + व + क)^3 = (२अ + २व + २क)^3$$

$$= \{ (व + क) + (क + अ) + (अ + व) \}^3$$

$$\text{अत्र कल्प्यते य} = (व + क), \text{ र} = क + अ, \text{ ज} = अ + व$$

$$\text{अतः } (य + र + ज)^3 - य^3 - र^3 - ज^3 =$$

$$३(र + ज)(ज + य)(य + र)$$

$$= ३(२अ + व + क)(अ + २व + क)(अ + व + २क)$$

$$\text{उ० ५. } (अ + व + क)^3 - (व + क - अ)^3 - (क + अ - व)^3 -$$

$$(अ + व + क) \text{ कल्प्यतां य} = व + क - अ, \text{ र} = क + अ - व, \text{ ज} = अ + व - क,$$

$$\text{तदा य + र + ज} = (व + क - अ) + (क + अ - व) + (अ + व - क) =$$

$$अ + व + क \text{ अतो निर्दिष्टस्वरूपम्} = (य + र + ज)^3 - य^3 - र^3 - ज^3$$

$$= ३(र + ज)(ज + य)(य + र) =$$

$$३(२अ)(२व)(१क) = २४अवक$$

$$\text{उ० ६. } अ^३ + व^३ + क^३ + अ^२(व + क) + व^२(क + अ) + क^२(अ + व)$$

$$= (अ + व + क)(अ^२ + व^२ + क^२) \text{ इति साध्यताम्}$$

पदानां क्रमतो न्यासेन वामपक्षः

$$= अ^३ + अ^२(व + क) + व^३ + व^२(क + अ) + क^३ + क^२(अ + व)$$

$$= अ^२(अ + व + क) + व^२(व + क + अ) + क^२(क + अ + व)$$

$$= (अ + व + क)(अ^२ + व^२ + क^२) \text{ अतः}$$

$$\text{स} + अ^३ + व^३ + क^३ = (अ + व + क)(अ^२ + व^२ + क^२)$$

$$\text{उ० ७. } २व^२क^२ + २क^२अ^२ + २अ^२व^२ - अ^४ - व^४ - क^४$$

$$= (अ + व + क) (व + क - अ) (क + अ - व) (अ + व - क)$$

इति साध्यताम्

अ इत्यस्य घाताङ्कापचयेन स्थापने कृते

$$\text{वामपक्षः} = \{ अ^४ = २ (व^२ + क^२) अ^२ \div व^४ + क^४ - २ व^२ क^२ \}$$

$$= - \{ अ^४ - २ (व^२ + क^२) अ^२ + (व^२ + क^२)^२ \}$$

$$- (व^२ + क^२)^२ + (व^२ - क^२)^२ \}$$

$$= - \{ (अ^२ - व^२ + क^२)^२ - ४ व^२ क^२ \}$$

$$= (२ व क)^२ - (अ^२ - व^२ - क^२)^२$$

$$= \{ २ व क - (अ^२ - व^२ - क^२) \} \{ (२ व क + (अ^२ - व^२ - क^२)) \}$$

$$= \{ (व + क)^२ - अ^२ \} \{ अ^२ - (व - क)^२ \}$$

$$= (व + क + अ) (व + क - अ) (अ + व - क) (अ - व + क)$$

$$= (अ + व + क) (व + क - अ) (क + अ - व) (अ + व - क)$$

(उ. १४.) (गुणावयवरूपे परिवर्त्यताम्) अभ्यासार्थं प्रभाः

$$१. अ^३ (व^२ - क^२) + व^३ (क^२ - अ^२) + क^३ (अ^२ - व^२)$$

$$२. अ^२ (व^३ - क^३) + व^२ (क^३ - अ^३) + क^२ (अ^३ - व^३)$$

$$३. व^२ क^२ (व^२ - क^२) + क^२ अ^२ (क^२ - अ^२) + अ^२ व^२ (अ^२ - व^२)$$

$$४. (अ + व + क)^३ - अ^३ - व^३ - क^३$$

$$५. (व + क) (क + अ) अ + व) + अ व क$$

$$६. अ (व - क)^२ + व (क - अ)^२ + क (अ - व)^२ + ८ अ व क$$

$$७. अ (व + क)^२ + व (क + अ)^२ + क (अ + व)^२ - ३ अ व क$$

$$८. अ (व - क)^३ + व (क - अ)^३ + क (अ - व)^३$$

$$९. अ^४ (व - क) + व^४ (क - अ) + क^४ (अ - व)$$

$$१०. व क (व^३ - क^३) + क अ (क^३ - अ^३) + अ व (अ^३ - व^३)$$

$$११. अ (व^४ - क^४) + व (क^४ - अ^४) + क (अ^४ - व^४)$$

$$१२. (व - क) (व + क)^३ + (क - अ) (क + अ)^३ + (अ - व) (अ + व)^३$$

$$१३. (व + क) (व - क)^३ + (क + अ) (क - अ)^३ + (अ + व) (अ - व)^३$$

वर्गमूलानयनम्

वर्गमूलानयने विशेषरीतिः प्रदर्श्यते तत्र क्रमानुसारतः सर्वं पदं स्थाप्यं येन मूलानयने दोषापत्तिर्न भवेत्—

यथा उ१. $४ - ४क + २व + क^२ - वक + \frac{व^२}{४}$ अत्र निम्नरीत्या प्रथमं

पदानि घाताङ्कापचयेन स्थाप्यानि $\frac{व^२}{४} - वक + २व + क^२ - ४क + ४$

$$= \frac{व^२}{४} - व(क - २) + (क^२ - ४क + ४)$$

$$= \left(\frac{व}{२}\right)^२ - २\left\{\frac{व}{२}(क - २) + (क - २)^२\right\}$$

$$= \left\{\frac{व}{२} - (क - २)\right\}^२ = \left(\frac{व}{२} - क + २\right)^२$$

$$\text{अतोऽस्यमूलम्} = \frac{व}{२} - क + २$$

उ२. $(अव + अक + वक)^२ - ४अवक(अ + क)$ अत्र वर्गमूलमपेक्षितम् ।

उपरिस्थं स्वरूपम् $= \{व(अ + क) + अक\}^२ - ४अवक(अ + क)$

$$= व^२(अ + क)^२ + अ^२क^२ - २अवक(अ + क)$$

$$= \{व(अ + क) - अक\}^२ = (अव - अक + वक)^२$$

अतोऽत्र मूलम् $= अव - अक + वक$

$$\text{उ. ३. } अ^४ + व^४ + क^४ + ड^४ - २(अ^२ + क^२)(व^२ + ड^२) + २अ^२क^२ + २व^२ड^२$$

अस्य वर्गमूलमपेक्षितम्

$$\text{उपरिस्थितं स्वरूपम्} = अ^४ - २अ^२(व^२ + ड^२) + २अ^२क^२ - २क^२(व^२ + ड^२) + २व^२ड^२ + व^४ + क^४ + ड^४$$

$$= अ^४ - २अ^२(व^२ + ड^२ - क^२) + \{व^४ + क^४ + ड^४ - २क^२(व^२ + ड^२) + २व^२ड^२\}$$

अत्र महत्कोष्ठकान्तर्गतं पदं च निम्नक्रम रीत्या स्थापने कृते

$$अ^४ - २अ^२(व^२ + ड^२ - क^२) + \{व^४ - २व^२(क^२ - ड^२) + (क^४ + ड^४ - २क^२ड^२)\}$$

$$\begin{aligned}
 &= a^4 - 2a^2 (v^2 + d^2 - k^2) + \\
 &\quad \{ v^4 - 2v^2 (k^2 - d^2) + (k^2 - d^2)^2 \} \\
 &= a^4 - 2a^2 (v^2 + d^2 - k^2) + \{ v^2 \} (k^2 - d^2)^2 \\
 &= a^4 - 2a^2 (v^2 + d^2 - k^2) + (v^2 + d^2 - k^2)^2 \\
 &= \{ a^2 - (v^2 + d^2 - k^2) \}^2 = (a^2 + k^2 - v^2 - d^2)^2 \\
 \text{अतोऽत्र मूलम्} &= a^2 - v^2 + k^2 - d^2
 \end{aligned}$$

४. $\frac{(a^2 + v^2)^2}{a^4 + v^4 - 2a^2v^2} + 4 \frac{a}{a+v} \times \frac{v}{a-v}$ अत्र वर्गमूलमपेक्षितम्

$$\begin{aligned}
 \text{उपरिस्थं स्वरूपं} &= \frac{(a^2 + v^2)^2}{(a^2 - v^2)^2} + \frac{4av}{a^2 - v^2} = \frac{(a^2 + v^2)^2 + 4av(a^2 - v^2)}{(a^2 - v^2)^2} \\
 &= \frac{\{ (a^2 - v^2)^2 + 4a^2v^2 \} + 4av(a^2 - v^2)}{(a^2 - v^2)^2} \\
 &= \frac{\{ (a^2 - v^2) + 2av \}^2}{(a^2 - v^2)^2} = \frac{(a^2 + 2av - v^2)^2}{(a^2 - v^2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{अतोऽत्र मूलम्} = \frac{a^2 + 2av - v^2}{a^2 - v^2}$$

५. $y^2 + \frac{a^2}{9} - vy + \frac{v^2}{4} - \frac{av}{3} + \frac{2ay}{3}$

अत्र घाताङ्कापचयक्रमरीत्या स्थापनेन

$$\begin{aligned}
 &y^2 - vy + \frac{2ay}{3} + \frac{a^2}{9} - \frac{av}{3} + \frac{v^2}{4} \\
 &= \left(y + \frac{a}{3} \right)^2 - vy - \frac{av}{3} + \left(\frac{v}{2} \right)^2 \\
 &= \left\{ \left(y + \frac{a}{3} \right) - \frac{v}{2} \right\}^2 = \left(y + \frac{a}{3} - \frac{v}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\text{अतोऽत्र मूलम् } y + \frac{a}{3} - \frac{v}{2}$$

६. $\left(y + \frac{1}{y} \right)^2 - 4 \left(y - \frac{1}{y} \right)$ अत्र वर्गमूलमपेक्षितम्

$$\text{निर्दिष्टस्वरूपं} = y^2 + \left(\frac{1}{y} \right)^2 - 4y + \frac{4}{y} + 2$$

$$= य^2 - ४ य + \frac{४}{य} + २ + \frac{१}{य^2}$$

$$= य^2 - ४ य + \frac{४}{य} + \frac{१}{य^2} + ४ - २$$

$$= (य - २)^2 - २ + \frac{४}{य} + \frac{१}{य^2} = \left\{ (य - २) - \frac{१}{य} \right\}^2$$

$$= (य - २ - \frac{१}{य})^2 \text{ अतोऽत्र मूलम् } य - २ - \frac{१}{य}$$

$$७. य^४ + \frac{१}{य^४} + २ (य^२ + \frac{१}{य^२}) + ३ \text{ अत्र वर्गमूलमपेक्षितम् ।}$$

उपरिस्थं स्वरूपं घाताङ्कापचयक्रमरीत्या स्थाप्यते:—

$$य^४ + २ य^२ + ३ + \frac{२}{य^२} + \frac{१}{य^४}$$

$$= (य^२ + १)^२ + २ + \frac{२}{य^२} + \frac{१}{य^४}$$

$$= \left\{ (य^२ + १) + \frac{१}{य^२} \right\}^२ = (य^२ + १ + \frac{१}{य^२})^२$$

$$\text{अतोऽत्र मूलम्} = य^२ + १ + \frac{१}{य^२}$$

$$८. \frac{य^२}{र^२} + \frac{र^२}{य^२} - \left(\frac{य}{र} + \frac{र}{य} \right) \sqrt{२ + २\frac{१}{र}} \text{ अत्र वर्गमूलपेक्षितम् ।}$$

अत्र स्वरूपमिदं =

$$\left(\frac{य}{र} + \frac{र}{य} \right)^२ - \left(\frac{य}{र} + \frac{र}{य} \right) \sqrt{२ + २\frac{१}{र}}$$

$$\left\{ \left(\frac{य}{र} + \frac{र}{य} \right) - \frac{१}{\sqrt{२}} \right\}^२ = \left(\frac{य}{र} + \frac{र}{य} - \frac{१}{\sqrt{२}} \right)^२$$

$$\text{अतोऽत्र मूलम् } \frac{य}{र} - \frac{१}{\sqrt{२}} + \frac{र}{य} \text{ ।}$$

(उ० १५) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. अ^२ + ब^२ + क^२ + ड^३ - २ अ (ब - क + ड) - २ ब (क - ड) - २ क ड$$

$$२. (अ - ब)^४ - २ (अ^२ + ब^२) (अ - ब)^२ + २ (अ^४ + ब^४)$$

$$३. अ^४ + व^४ + क^४ + ड^४ - २ अ^२ (व^२ + ड^२) - २ व^२ (क^२ - ड^२) + २ क^२ (अ^२ - ड^२)$$

$$४. २ अ^२ (व + क)^२ + २ व^२ (क + अ)^२ + २ क^२ (अ + व)^२ +$$

$$४ अ व क (अ + व + क)$$

वर्गमूलानयनार्थं साधारणरीतिर्यथाः—

$$(अ + व)^२ = अ^२ + (२ अ + व) व ;$$

$$(अ + व + क)^२ = अ^२ + (२ अ + व) व + (२ अ + २ व + क) क ;$$

$$(अ + व + क + ड)^२ = अ^२ + (२ अ + व) व +$$

$$(२ अ + २ व + क) क + (२ अ + २ व + २ क + ड) ड ;$$

एवमतोऽनुमीयते यत्

$$(अ य^२ + व य + क)^२ = अ^२ य^४ + (२ अ य^२ + व य) व य + (२ अ य^२ + २ व य + क) क, \dots\dots(१)$$

इदमन्तिमस्वरूपं यदि यघाताङ्कस्य एकापचितरूपेण स्थाप्यते

$$तदा अ^२ य^४ + २ अ व य^३ + (व^२ + २ अ क) य^२ + २ व क य + क^२$$

अत्र स्वरूपस्यास्य यदि वर्गमूलमपेक्ष्यते तदा (१) स्वरूपावलोकनेन स्पष्टमवसीयते यत् प्रथमपदस्य मूलमिदं अय^२ ततो द्वितीयपदे द्विघ्नस्य प्रथमपदमूलस्य वय इत्यस्य च घातो वय इत्यस्य वर्गोऽपि दृश्यते अतोऽनुमीयते यत् मूलस्य द्वितीयपदे वय एवं तृतीयपदे द्विघ्नस्य पूर्वागतमूलस्य क इत्यस्य च घातस्तथा क इत्यस्य वर्गोऽपि दृश्यते तेनेदं स्पष्टं यत् मूले तृतीयं पदं क अतः पूर्ववर्गस्य मूलं २ अ य^२ + व य + क इति । अतोऽत्र त्यक्त्वान्त्याद्विषमात्पदमित्यादि भास्कररीत्या मूलानयनं सरलं भवतिः—

$$उ० १. \frac{य^४}{४ र^४} + \frac{४ र^४}{य^४} + \frac{य^२}{र^२} + \frac{४ र^२}{य^२} + ३ अत्र वगमूलं किम्$$

अत्रेदं स्वरूपं य इत्यस्य घातकापचयरूपेण स्थाप्यते तदा

$$\frac{य^४}{४ र^४} + \frac{य^२}{र^२} + ३ + \frac{४ र^२}{य^२} + \frac{४ र^४}{य^४} ततो मूलानयनं यथा$$

$$\frac{य^४}{४ र^४} + \frac{य^२}{र^२} + ३ + \frac{४ र^२}{य^२} + \frac{४ र^४}{य^४} \left(\frac{य^२}{२ र^२} + १ + \frac{२ र^२}{य^२} \right)$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{य^४}{४ र^४} \\
 \hline
 \frac{य^२}{र^२} + १ \quad \frac{य^२}{र^२} + १ \\
 \hline
 \frac{य^२}{र^२} + २ + \frac{२ र^२}{य^२} \quad \left) \quad २ + \frac{४ र^२}{य^२} + \frac{४ र^४}{य^४} \\
 \hline
 २ + \frac{४ र^२}{य^२} + \frac{४ र^४}{य^४} \\
 \hline
 \text{अतोऽभीष्टं मूलम्} = \frac{य^२}{२ र^२} + १ + \frac{२ र^२}{य^२}
 \end{array}$$

$$\text{उ० २. } य^६ - २ अ^{-३} य^१ य^१ + २ अ^४ य^४ + अ^{-६} य^१ य^१ - २ अ^१ य^१ + अ^६$$

अत्रापि य घाताङ्कस्य एकापचयरूपस्थापनेन स्वरूपम्

$$अ^{-६} य^१ य^१ - २ अ^{-३} य^१ य^१ + य^६ - २ अ^१ य^१ + २ अ^४ य^४ + अ^६$$

$$अ^{-६} य^१ य^१ \quad \left(अ^{-३} य^१ य^१ - य^६ - अ^६ \right)$$

$$२ अ^{-३} य^१ य^१ - य^६ \quad \left) \quad - २ अ^{-३} य^१ य^१ + य^६$$

$$- २ अ^{-३} य^१ य^१ + य^६$$

$$२ अ^{-३} य^१ य^१ - २ य^६ - अ^६ \quad \left) \quad - २ अ^१ य^१ + २ अ^४ य^४ + अ^६$$

$$- २ अ^१ य^१ + २ अ^४ य^४ + अ^६$$

$$\text{अतोऽभीष्टं मूलम्} = अ^{-३} य^१ य^१ - य^६ - अ^६$$

(उ० १६) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. व^४ - ४ व^३ + १० व^२ - १२ व + ६$$

$$२. व^६ - २ व^४ + २ व^३ + व^२ - २ व + १$$

$$३. ४ व^४ + ८ अ व^३ + ४ अ^२ व^२ + १६ व^२ व^२ + १६ अ व^२ व + १६ व^४$$

$$४. \frac{१०५१ व^२}{२५} - \frac{६ व}{५} - \frac{१४ व^३}{५} + ४१ व^४ + ६$$

$$५. \frac{य^४}{४} + ४य^२ + \frac{अ य^२}{३} + \frac{अ^२}{६} - २य^३ - \frac{४ अ य}{३}$$

$$६. \frac{य^२}{२} + \frac{र^२}{२} - \frac{य}{२} + \frac{र}{२} - १\frac{३}{४}$$

$$७. २५\frac{३}{४} - \frac{२० य}{७२} + \frac{६ र^२}{१६ य^२} - \frac{१५ र}{२ य} + \frac{४ य^२}{४६ र^२}$$

$$८. य^५ - ४ य^३ + २ य + ४ य^३ + य^५$$

$$९. \frac{६ य^३}{४} - ५ य^५ र^३ + \frac{१७६ य^२ र}{४५} - \frac{४ य^३ र^३}{३} + \frac{४ य र^२}{२५}$$

$$१०. य^४ + २ (र + क) य^३ + (३ र^२ + ३ र क + ३ क^२) य^२ + २ (र^३ + र^२ क + र क^२ + क^३) य + र^४ + २ र^२ क^२ + क^४$$

घनमूलानयनं यथा

$$तत्र (अ य^२ + व य + क)^३ = (अ य^२ + व य)^३ +$$

$$३ (अ य^२ + व य)^२ क + ३ (अ य^२ + व य) क^२ + क^३$$

$$= अ^३ य^६ + ३ (अ^२ य^४) व य + ३ (अ य^२) (व य)^२ + (व य)^३$$

$$+ ३ (अ य^२ + व य)^२ क + ३ (अ य^२ + व य) क^२ + क^३$$

अत्र घनमूलसाधने स्वरूपावलोकनेनैव स्फुटमवसीयते यत् घन-
मूलस्य प्रथमं पदं घनस्वरूपस्य प्रथमपदस्यैव मूलं यथात्र अयं ततः
आद्याद्घनतः घनं विशोध्य पदं पृथक्कृतमित्यादि भास्कर रीत्या घन-
मूलानयनं सुबोधं भवति अतोऽत्र मूलम् = अयं + वयं + क

अत्रापि पदानां निवेशः एकापचितघाताङ्कमेणैव कार्यः ।

(उ० १७) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. य^३ + २७ य^२ + २४३ य + ७२९$$

$$२. २७ य^३ - २१६ य^२ + ५७६ य - ५१२$$

$$३. ६४ अ^३ - १४४ अ^२ व + १०८ अ व^२ - २७ व^३$$

$$४. ३३ य^४ - ३६ य + य^६ - ६३ य^३ + ८ - ६ य^५ + ६६ य^२$$

$$५. ८ य^६ + १२ य^५ - ३० य^४ - ३५ य^३ + ४५ य^२ + २७ य - २७$$

$$६. १ - ६ य^२ + ३३ य^४ - ६३ य^६ + ६६ य^१० + ८ य^१२$$

$$७. क^६ - ६३ क^२ य^२ + ८ य^६ - ६ क^५ य + ६६ क^२ य^४ - ३६ क य^५ + ३३ क^४ य^२$$

प्रघातमापकगणितम्

तत्र प्रथमसिद्धान्तः १६४ पृष्ठे प्रदर्शितः

द्वितीयः सिद्धान्तः ।

प्रथमसिद्धान्तं $a^m \times a^n = a^{m+n}$ मूलं मत्वा म, न इत्यस्य ऋणात्मके, भिन्नात्मके च स्वरूपे स्थितिः प्रदर्श्यतेः—

(क) $a^{\frac{p}{k}}$ इत्यस्य मानं साध्यते यदा प, क, घनात्मके संख्ये
बतः $a^m \times a^n = a^{m+n}$ म, न इत्यनयोः सर्वस्मिन् माने ।

अतः म, न इत्यनयोः स्थाने $\frac{p}{k}$ इति प्रकल्प्य $a^{\frac{p}{k}} \times a^{\frac{p}{k}}$
 $= a^{\frac{p}{k} + \frac{p}{k}} = a^{\frac{2p}{k}}$

एवमेव $a^{\frac{p}{k}} \times a^{\frac{p}{k}} \times a^{\frac{p}{k}} = a^{\frac{2p}{k}} \times a^{\frac{p}{k}} = a^{\frac{3p}{k}}$ एवमग्रे

अतः $a^{\frac{p}{k}} \times a^{\frac{p}{k}} \times a^{\frac{p}{k}} \dots \dots \dots$ क प्रमिताः

$= a^{\frac{p}{k}} = a^{\frac{p}{k}}$

एवं रीत्या $a^{\frac{p}{k}}$ इदं $a^{\frac{p}{k}}$ इत्यस्य क मूलतुल्यं अतएवेदं $\sqrt[k]{a^{\frac{p}{k}}}$ इत्यस्य तुल्यम् ।

अनु० यतः $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$, $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$ एवमग्रे

एवं साधारणतया $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

(ख) a^0 इत्यस्य मानं साध्यते

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ अतोऽत्र यदि $m = 0$

तदा $a^0 \times a^n = a^{0+n} = a^n$,

$\therefore a^0 = \frac{a^n}{a^n} = 1$ अतः कस्याप्यङ्कस्य शून्यघातः रूपसमो भवति ।

(ग) a^{-n} इत्यस्यमानं साध्यं यत्र न घनात्मिका संख्या

यतः $a^m \times a^n = a^{m+n}$ अतः $m = -n$ कल्पनेन $a^{-n} \times a^n$

$= a^{-n+n} = a^0 = 1 \therefore a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ तथा $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

$$\text{अनु० } अ^m \div अ^n = अ^{m-n}$$

$$अ^m \div अ^n = \frac{अ^m}{अ^n} = अ^m \times अ^{-n} = अ^{m-n}$$

$$\text{उ० १. } ८^{\frac{५}{३}} \text{ इत्यस्य किं मानम्}$$

$$८^{\frac{५}{३}} = (\sqrt[३]{८})^५ = २^५ = ३२$$

$$\text{उ० २. } ४^{-\frac{५}{२}} \text{ इत्यस्य मानं किम्}$$

$$४^{-\frac{५}{२}} = \frac{१}{४^{\frac{५}{२}}} = \frac{१}{(\sqrt{४})^५} = \frac{१}{२^५} = \frac{१}{३२}$$

$$\text{उ० ३. } \sqrt{अ^५}, अ^{\frac{३}{२}}, \sqrt[५]{अ^{-५}} \text{ तथा } \frac{१}{अ^{-३}} \text{ एषां गुणनफलं किम्}$$

$$\text{इष्टं गुणनफलम्} = अ^{\frac{५}{२}} \times अ^{\frac{३}{२}} \times अ^{-\frac{५}{५}} \times अ^३$$

$$= अ^{\frac{५}{२} + \frac{३}{२} - १ + ३} = अ^{\frac{५}{२} - \frac{१}{२} + ३}$$

$$= अ^{२+३} = अ^५$$

(उ. १८) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

निम्नलिखितस्वरूपाणां मानानि साध्यानि

$$१. ४^{-\frac{३}{२}}$$

$$२. ८^{\frac{३}{२}}$$

$$३. २^{\frac{३}{२}}$$

$$४. १६^{\frac{५}{२}}$$

$$५. ८१^{-\frac{३}{२}}$$

$$६. \frac{१}{६^{\frac{१}{२}}}$$

$$७. १२५^{-\frac{३}{२}}$$

$$८. \left(\frac{१}{२७}\right)^{-\frac{५}{२}}$$

$$९. (२१६)^{-\frac{३}{२}}$$

$$१०. \frac{य^m + २ न य^३ म - ८ न}{य^५ म - ६ न} \text{ स्पष्टीक्रियताम्}$$

अत्र विशिष्टान्युदाहरणानि कानिचित्साध्यन्ते

$$\text{उ. १. भाज्यः } अ + व + क + ३ अ^{\frac{१}{२}} व^{\frac{३}{२}} + ३ अ^{\frac{३}{२}} व^{\frac{३}{२}}$$

$$\text{भाजकः } अ^{\frac{१}{२}} + व^{\frac{१}{२}} + क^{\frac{१}{२}}$$

अत्र घाताङ्कापचयेन स्थापने कृते

$$\left. \begin{array}{l} \text{अ}^1 + \\ (\text{व}^1 + \text{क}^1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{अ} + २\text{अ}^2 \text{ व}^1 + ३\text{अ}^3 \text{ व}^2 + (\text{व} + \text{क}) \left(\text{अ}^2 + \text{अ}^3 (२\text{व}^1 - \text{क}^1) + \right. \\ \left. \text{अ} + \text{अ}^2 (\text{व}^1 + \text{क}^1) \right) \end{array}$$

$$\text{अ}^2 (२\text{व}^1 - \text{क}^1) + ३\text{अ}^3 \text{व}^2 + (\text{व} + \text{क})$$

$$\text{अ}^3 (२\text{व}^1 - \text{क}^1) + \text{अ}^3 (२\text{व}^2 + \text{व}^1 \text{ क}^1 - \text{क}^2)$$

$$\text{अ}^1 (\text{व}^2 - \text{व}^1 \text{ क}^1 + \text{क}^2) + (\text{व} + \text{क})$$

$$\text{अ}^1 (\text{व}^2 - \text{व}^1 \text{ क}^1 + \text{क}^2) + (\text{व} + \text{क})$$

$$\text{अतोऽभीष्टा लब्धिः} = \text{अ}^3 + २\text{अ}^2 \text{ व}^1 - \text{अ}^3 \text{ क}^1 + \text{व}^2 - \text{व}^1 \text{ क}^1 + \text{क}^2$$

$$\text{उ० २. भाव्यः} \text{ य}^२ + \text{अ}^२ \text{ य}^{२-१} + \text{अ}^{२-१}$$

$$\text{भाजकः} \text{ य}^{२-१} - \text{अ}^{२-२} \text{ य}^{२-२} + \text{अ}^{२-१}$$

$$\text{कल्प्यताम् म} = \text{य}^{२-२} \text{ तथा न} = \text{अ}^{२-२}$$

$$\text{तदा म}^२ = \left(\text{य}^{२-२} \right)^२ = \text{य}^{२ \times २-२} = \text{य}^{२-१}$$

$$\text{तथा म}^४ = \left(\text{म}^२ \right)^२ = \left(\text{य}^{२-१} \right)^२ = \text{य}^{२ \times २-१} = \text{य}^{२-१}$$

$$\text{एवम् न}^२ = \text{अ}^{२-१} \text{ तथा न}^४ = \text{अ}^{२-१}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः} & \frac{\text{य}^२ + \text{अ}^{२-१} \text{ य}^{२-१} + \text{अ}^{२-१}}{\text{य}^{२-१} - \text{अ}^{२-२} \text{ य}^{२-२} + \text{अ}^{२-१}} = \frac{\text{म}^४ + \text{म}^२ \text{ न}^२ + \text{न}^४}{\text{म}^२ - \text{म न} + \text{न}^२} \\ & = \frac{(\text{म}^२ + \text{न}^२ + \text{म न}) (\text{म}^२ + \text{न}^२ - \text{म न})}{\text{म}^२ - \text{म न} + \text{न}^२} = \text{म}^२ + \text{म न} + \text{न}^२ \\ & = \text{य}^{२-१} + \text{य}^{२-२} \text{ अ}^{२-२} + \text{अ}^{२-१} \end{aligned}$$

उ० ३. साध्यताम्

$$\frac{१}{१ + \text{य म न} + \text{य म प}} + \frac{१}{१ + \text{य न म} + \text{य न प}} + \frac{१}{१ + \text{य प म} + \text{य प न}} = १$$

$$\text{अत्र प्रथमपदम्} = \frac{य^{-म}}{य^{-म} (१ + य^{-म-न} + य^{-म-प})} = \frac{य^{-म}}{य^{-म} + य^{-न} + य^{-प}}$$

$$\text{द्वितीयपदम्} = \frac{य^{-न}}{य^{-न} (१ + य^{-न-म} + य^{-न-प})} = \frac{य^{-न}}{य^{-न} + य^{-म} + य^{-प}}$$

$$\text{तृतीयपदम्} = \frac{य^{-प}}{य^{-प} (१ + य^{-प-म} + य^{-प-न})} = \frac{य^{-प}}{य^{-प} + य^{-म} + य^{-न}}$$

$$\therefore \text{पूर्वस्वरूपम्} = \frac{य^{-म}}{य^{-म} + य^{-न} + य^{-प}} + \frac{य^{-न}}{य^{-न} + य^{-म} + य^{-प}} + \frac{य^{-प}}{य^{-प} + य^{-म} + य^{-न}}$$

$$= \frac{य^{-म} + य^{-न} + य^{-प}}{य^{-म} + य^{-न} + य^{-प}} = १ \text{ इत्युपपन्नम्}$$

$$\text{उ० ४. } अ^{-य} (अ^{-य} + व^{-य}) = \frac{अ^२ व^२ + १}{अ^२ व^२} \text{ अत्र यमानं साध्यताम्}$$

$$\text{अत्र } अ^{-य} अ^{-य} + अ^{-य} व^{-य} = १ + \frac{१}{अ^२ व^२}$$

$$\text{वा, } १ + (अव)^{-य} = १ + अ^{-२} व^{-२} = १ + (अव)^{-२}$$

$$\text{अतः } (अव)^{-य} = (अव)^{-२}$$

$$\therefore य = २$$

$$\text{उ० ५. यदि } अ^व = व^अ \text{ तदा } \left(\frac{अ}{व} \right)^व = \frac{अ}{अ^व} = अ^{-व} - १, \text{ तथा}$$

$$\text{यदि } अ = २ \text{ व, तदा } व = २ \text{ इति साध्यताम्}$$

$$\text{यतः } अ^व = व^अ$$

$$\therefore अ = व^{\frac{अ}{व}}$$

$$\text{अतः } \left(\frac{अ}{व} \right)^व = \frac{अ}{अ^व} = \frac{अ}{अ^व} = अ^{-व} अ^{-१} = \frac{अ}{अ^व}^{-१}$$

$$\text{यदि } अ = २ \text{ व तदा पूर्वसम्बन्धे उत्थापनेन}$$

$$(२ व)^व = (व)^{२व} = (व^२)^व$$

$$\therefore २ व = व^२ \quad \therefore व = २$$

उ० ६. यदि $y = (a + \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}} + (a - \sqrt{a^2 + b^3})^{\frac{1}{3}}$ तदा

$y^3 + 3by - 2a = 0$ इति साध्यताम्

कल्प्यते $m = a + \sqrt{a^2 + b^3}$ तथा $n = a - \sqrt{a^2 + b^3}$ तदा

$$y^3 = (m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}})^3 = (m^{\frac{1}{3}})^3 + (n^{\frac{1}{3}})^3 + 3m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}})$$

$$= m + n + 3(mn)^{\frac{1}{3}}(m^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{1}{3}}) = m + n + 3(mn)^{\frac{1}{3}}y$$

$$\text{परन्तु } m + n = 2a, \text{ तथा } (mn)^{\frac{1}{3}} = \{a^2 - (a^2 + b^3)\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= (-b^3)^{\frac{1}{3}} = -b,$$

$$\therefore y^3 = 2a - 3by$$

$$\therefore y^3 + 3by - 2a = 0$$

(उ० १९) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. $y^3 + 2y^2 + 3y^2 + 2y^2 + 1$ गुण्यः $y^3 - 2y^2 + 1$ गुणकः

२. $1 + ax + a^2x^2$ गुण्यः $1 - ax + a^2x^2$ गुणकः

३. $a^3 - a^2 + 1 - a - a^2$ गुण्यः $a^3 + 1 + a - a^2$ गुणकः

४. $am + 3bn - 2cp$ गुण्यः $am - 3bn + 2cp$ गुणकः

५. $y^3 - 4y^2 - 2y^2 + 6y - y^2$ भाज्यः, $y^3 + 2 - 4y^2$ भाजकः

६. $ay^2 - ay^2 + 5y^2n - 3y^2n$ भाज्यः, $5y^2n - 3y^2n$ भाजकः

७. $y^2 - 4y^2$ भाज्यः, $y^2 + 4y^2$ भाजकः

रूपटीक्रियताम्

$$८. \left\{ (a-m)^m - \frac{1}{m} \right\} \frac{1}{m+1}$$

$$९. \left(\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}}{a-b} \right)^{-1}$$

$$१०. \frac{y^3 + 3y^2}{y^3 - 3y^2} + \frac{y^3 - 3y^2}{y^3 + 3y^2} + \frac{6y^2}{y^3}$$

११. $\frac{अ^३ - अ य^२ + अ^२ य - य^३}{अ^२ - अ य^२ + ३ अ^३ य - ३ अ य^३ + अ^२ य^२ - य^२}$
१२. $\frac{अ^२ + व^२ - अ^{-२} - व^{-२}}{अ र व^२ - अ^{-२} व^{-२}} + \frac{(अ - अ^{-१})(व - व^{-१})}{अ व + अ^{-१} व^{-१}}$
१३. $(अ + व + क)(अ^{-१} + व^{-१} + क^{-१})$
 $- अ^{-१} व^{-१} क^{-१} (व + क)(क + अ)(अ + व)$

(उ० १६) निम्नलिखितप्रश्नेषु यमानमानीयताम्

१४. $२य+७ = ४य+२$
१५. $(\sqrt{३}) य+५ = (३\sqrt{३}) २य+५$
१६. $(\sqrt[५]{४}) ४य+७ = (\sqrt[११]{६४}) २य+७$
१७. $(\sqrt[३]{२५}) २य+५ = (\sqrt[५]{१२५}) य+६$
१८. $२३ य^{-१} = ४ र^{-१}$
 $३ य - र = ?$ }
१९. $६२ य^{-३} = (\sqrt{३}) २ र^{-५}$
 $२३ य = ४ र$ }
२०. $४३ र^{-१} = १६ य+२$
 $३ य+३ र = ६२ य+३$ }
२१. $२ य+र+ल = ८ य+ल-र$
 $५३ र+२ = २५ य+ल$
 $३२ य+२ल+र = ६३ य+र$
२२. $(\sqrt{अ}) य+र = (\sqrt[३]{अ}) र+ल^{-१}$
 $(\sqrt[३]{व}) य+ल^{-२} = (\sqrt[५]{व}) र+ल$
 $(\sqrt[७]{क}) र = (\sqrt[७]{क}) य+र+ल$ }

करणीगणितम्

करणीयोगवियोगे विशेषरीतिः

$$\text{उ० १. } \sqrt{१४७} + \sqrt{२७} = \sqrt{४९ \times ३} + \sqrt{९ \times ३} \\ = ७\sqrt{३} + ३\sqrt{३} = १०\sqrt{३}$$

$$\text{उ० २. } \sqrt[३]{६२५} - \sqrt[३]{१३५} + \sqrt[३]{४०} \\ = \sqrt[३]{१२५ \times ५} - \sqrt[३]{२७ \times ५} + \sqrt[३]{८ \times ५} \\ = \sqrt[३]{५^३ \times ५} - \sqrt[३]{३^३ \times ५} + \sqrt[३]{२^३ \times ५} \\ = ५\sqrt[३]{५} - ३\sqrt[३]{५} + २\sqrt[३]{५} = ४\sqrt[३]{५}$$

(उ० २०) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. $\sqrt{१२} + \sqrt{७५}$ २. $\sqrt{२०} + \sqrt{१८०}$ ३. $\sqrt{६८} - \sqrt{५०}$
४. $\sqrt[३]{१२८} - \sqrt[३]{५४}$ ५. $\sqrt[४]{८०} + \sqrt[४]{४०५}$
६. $२\sqrt{४०५} - ३\sqrt{१२५} + \sqrt{४५}$
७. $४\sqrt[३]{१६२} - ४\sqrt[३]{३७५} + २\sqrt[३]{२४}$
८. $५\sqrt[३]{-५४} - २\sqrt[३]{-१६} + ४\sqrt[३]{६८६}$
९. $\sqrt{४५} य^३ + \sqrt{८०} य^३ + \sqrt{५} य र^२$
१०. $य \sqrt[३]{य^३ अ} + र \sqrt[३]{८ र^३ अ} - ल \sqrt[३]{-२७ ल^३ अ}$
११. $२\sqrt[३]{३२ अ^४ य} + ३\sqrt[३]{५१२ अ^४ य} - अ \sqrt[३]{१६२ य}$

करणी, घनकरणी, चतुर्घातकरण्यादयः एकस्यां करण्यां परिवर्तितुं शक्यन्ते यथा

$$\text{उ. १. } \sqrt{५} \text{ तथा } \sqrt[३]{४}$$

$$\text{अत्र } \sqrt{५} = ५^{\frac{१}{२}} = ५^{\frac{३}{६}} = \sqrt[६]{५^३} = \sqrt[६]{१२५}$$

$$\sqrt[३]{४} = ४^{\frac{१}{३}} = ४^{\frac{२}{६}} = \sqrt[६]{४^२} = \sqrt[६]{१६}$$

$$\text{अतोऽभीष्टे मूले } \sqrt[६]{१२५}, \sqrt[६]{१२५}$$

अनेनेदं सिद्धं मूलानां लघुतमापवर्त्यरूपमूले तेषां परिवर्तनं भवति

$$\text{उ. २. } \sqrt[६]{३}, \sqrt[६]{२} \text{ एकस्मिन् मूले परिवर्त्यताम्}$$

६, ८ अनयोः लघुतमापवर्तनं १४

$$\text{अतः } \sqrt[6]{3} = 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{12}} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}$$

$$\text{तथा } \sqrt[6]{2} = 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{2^3} = \sqrt[12]{8}$$

$$\text{अतोऽभीष्टे मूले } \sqrt[12]{9}, \sqrt[12]{8}$$

$$\sqrt[3]{9}, \sqrt[4]{20} \text{ अनयोर्महत्तरः कः}$$

$$\sqrt[3]{9} = 9^{\frac{1}{3}} = 9^{\frac{4}{12}} = 9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[12]{9^4} = \sqrt[12]{6561} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{तथा } \sqrt[4]{20} = 20^{\frac{1}{4}} = 20^{\frac{3}{12}} = 20^{\frac{1}{4}} = \sqrt[12]{20^3} = \sqrt[12]{8000} \dots \dots \dots (2)$$

अत्र (1) अस्मात् (2) इदमधिकं तेन $\sqrt[3]{9}$ अस्मात् $\sqrt[4]{20}$

(उ० २१) निम्नस्थोदाहरणानां परिवर्तनं क्रियताम्

$$१. \sqrt[3]{3}, \text{ तथा } \sqrt[3]{2}, \quad २. \sqrt[3]{8} \text{ तथा } \sqrt[4]{4}, \quad ३. \sqrt[6]{2} \text{ तथा } \sqrt[3]{3}$$

$$४. \sqrt[4]{3} \text{ तथा } \sqrt[6]{4}, \quad ५. \sqrt[6]{8} \text{ तथा } \sqrt[4]{6}$$

निम्नस्थोदाहरणेषु महत्तरः कः

$$६. \sqrt[3]{2} \text{ वा } \sqrt[3]{3}, \quad ७. \sqrt[3]{3} \text{ वा } \sqrt[4]{4}, \quad ८. \sqrt[3]{6} \text{ वा } \sqrt[4]{9}$$

करणीगुणनम्

$$\text{उ० १. } \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{9} = 6^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{3}} = (6 \times 9)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{54}$$

$$\begin{aligned} \text{उ० २. } \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{2} &= 4^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{6}} = 4^{\frac{3}{12}} \times 2^{\frac{2}{12}} = (4^3 \times 2^2)^{\frac{1}{12}} \\ &= (128)^{\frac{1}{12}} \times (64)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{128 \times 64} \\ &= \sqrt[12]{8192} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उ० ३. } \sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2} &= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = 2^{\frac{7}{12}} \\ &= \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उ० ४. } ४\sqrt[3]{12} \times \sqrt[4]{15} &= ४^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{12} \times ५^{\frac{1}{4}} \sqrt[4]{15} = ६०^{\frac{1}{12}} \sqrt[12]{2^2 \times 3^2} \\ &= ६०^{\frac{1}{12}} \sqrt[12]{36} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उ० ५. } \sqrt[6]{8} \div \sqrt[4]{6} &= 8^{\frac{1}{6}} \div 6^{\frac{1}{4}} = 8^{\frac{2}{12}} \div 6^{\frac{3}{12}} \\ &= \frac{(8^2)^{\frac{1}{12}}}{(6^3)^{\frac{1}{12}}} = \left(\frac{8^2}{6^3}\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\frac{32}{27}} \end{aligned}$$

$$\text{उ० ६. } \sqrt{५} \div ३\sqrt{३} = \frac{\sqrt{५}}{३\sqrt{३}} = \frac{\sqrt{५} \times \sqrt{३}}{३\sqrt{३} \times \sqrt{३}} = \frac{\sqrt{१५}}{३ \times ३} = \frac{\sqrt{१५}}{९}$$

(उ० २२) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. $\sqrt{१५} \times \sqrt{६}$ २. $\sqrt{२०} \times \sqrt{४५}$ ३. $\sqrt[३]{५} \times \sqrt[३]{२५}$
४. $\sqrt[३]{६} \text{ अ य } \times \sqrt[३]{२७} \text{ अ य }^३$ ५. $\sqrt[३]{२} \times \sqrt[३]{६}$
६. $\sqrt{२} \times \sqrt[३]{३}$ ७. $५\sqrt{८} \times २\sqrt{६}$ ८. $८\sqrt{१२} \times ३\sqrt{२४}$
९. $४\sqrt[३]{७२} \times ५\sqrt[३]{५७६}$ १०. $७\sqrt[३]{८} \text{ अ य }^३ \times ५\sqrt[३]{२७} \text{ व य }^३$
११. $८\sqrt{१०} \div ४\sqrt{१५}$ १२. $\sqrt{१२} \div ६\sqrt{२७}$
१३. $\sqrt[३]{३६} \div \sqrt[३]{४८}$ १४. $\sqrt[५]{८} \div \sqrt[५]{६}$ १५. $\sqrt{२} \div \sqrt{६}$
१६. $\sqrt{७२} \div \sqrt{४०}$ १७. $\sqrt{२७५} \div \sqrt{२२}$
१८. $१०\sqrt{१०८} \div \sqrt{१५}$

मूलशब्देन धातूमूलमवबुध्यते तच्चमूलं वर्गमूलं, धनमूलं चतुर्घात-
मूलं पञ्चधातूमूलमित्यादि यत्किञ्चिद् भवेत् तत्र भिन्नभिन्नमूलानां योगो-
ऽन्तरं वा चेत् तत्र गुणक, भजन, वर्गादीनां क्रिया पूर्ववदेव भवति ।
एतादृशस्वरूपं मूलसमवायशब्देनोच्यते तद्यथा $५\sqrt{२}$ तथा $४\sqrt{३}$
केवलं मूलशब्देन किन्तु $५\sqrt{२} + ४\sqrt{३}$ तथा $५\sqrt{२} - ४\sqrt{३}$ मूल-
समवायशब्देन प्रकाश्यते

$$\begin{aligned} \text{उ० १. } ३\sqrt{५} + २\sqrt{३} \text{ इदं } \sqrt{५} - \sqrt{३} \text{ अनेन गुण्यताम्} \\ (३\sqrt{५} + २\sqrt{३})(\sqrt{५} - \sqrt{३}) = ३\sqrt{५} \sqrt{५} + २\sqrt{३} \sqrt{५} - \\ ३\sqrt{५} \sqrt{३} - २\sqrt{३} \sqrt{३} \\ = ३५ + २\sqrt{१५} - ३\sqrt{१५} - ६ = ३५ - \sqrt{१५} - ६ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उ० २. } ७\sqrt{२} + \sqrt{३} \text{ इदं } ७\sqrt{२} - \sqrt{३} \text{ अनेन गुण्यताम्} \\ (७\sqrt{२} + \sqrt{३})(७\sqrt{२} - \sqrt{३}) = (७\sqrt{२})^2 - (\sqrt{३})^2 \\ = ४९ \times २ - ३ = ९८ - ३ = ९५ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उ० ३. } \sqrt{३} \text{ अ + य } + \sqrt{३} \text{ अ - य } \text{ वर्गीक्रियताम्} \\ (\sqrt{३} \text{ अ + य } + \sqrt{३} \text{ अ - य })^2 = (\sqrt{३} \text{ अ + य })^2 + (\sqrt{३} \text{ अ - य })^2 + \\ २\sqrt{३} \text{ अ + य } \sqrt{३} \text{ अ - य } = ३\text{अ} + ३\text{य} + ३\text{अ - य} + २\sqrt{९\text{अ}^2 - \text{य}^2} \\ = ६\text{अ} + २\sqrt{९\text{अ}^2 - \text{य}^2} \end{aligned}$$

(उ० २३) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. $२\sqrt{५} - ५ \div ४$ गुण्यः $३\sqrt{५} - ५ - ६$ गुणकः
२. $३\sqrt{५} - ४\sqrt{२}$ गुण्यः $२\sqrt{५} + ३\sqrt{२}$ गुणकः
३. $\sqrt{२} + २\sqrt{३} + \sqrt{७}$ गुण्यः $\sqrt{२} + २\sqrt{३} - \sqrt{७}$ गुणकः
४. $३ - \sqrt{५} + \sqrt{८}$ गुण्यः $३ - \sqrt{५} - \sqrt{८}$ गुणकः
५. $\sqrt{११} + \sqrt{६} - \sqrt{३}$ गुण्यः $\sqrt{११} - \sqrt{६} + \sqrt{३}$ गुणकः
६. $\sqrt[३]{४} + \sqrt[३]{६} + \sqrt[३]{४८}$ गुण्यः $\sqrt[३]{२} + \sqrt[३]{३}$ गुणकः

जिम्नस्थस्वरूपाणां वर्गः कार्यः

८. $\sqrt{५+४} - \sqrt{५-४}$ ८. $२\sqrt{८} + ५\sqrt{६}$ ६. $२\sqrt{५} + ३\sqrt{७}$
१०. $\sqrt{अ^२ + २ ब^२} - \sqrt{अ^२ - २ ब^२}$
११. $२\sqrt{य^२ + २ र^२} + ५\sqrt{य^२ - २ र^२}$

द्वे मूलेस्तः ययोर्घातो व्यक्तसंख्यातुल्यो भवेत् ते व्यक्तीकृते प्रोच्येते यथा $\sqrt{५}$ तथा $\sqrt{३} + \sqrt{२}$ यदा $\sqrt{५}$ तथा $\sqrt{३} - \sqrt{२}$ आभ्यां गुण्येते तदा ते व्यक्तीकृते प्रोच्येते यतः $\sqrt{५} \times \sqrt{५} = ५$ एवं $(\sqrt{३} + \sqrt{२})(\sqrt{३} - \sqrt{२}) = ३ - २ = १$ । द्वे द्वियुक्पदवर्गमूले पूरके कथ्येते यदि पदे तथाविधे यत्र केवलं धनऋणचिह्नयोर्व्यत्ययो भवेत् यथा $\sqrt{३} + \sqrt{२}$ अस्य $\sqrt{३} - \sqrt{२}$ एषः पूरकः एवं $२\sqrt{५} - \sqrt{७}$ अस्य $२\sqrt{५} + \sqrt{७}$ अयं पूरकः अतः प्रत्येकं द्वियुक्पदवर्गमूलं तदीय-पूरकेण गुणितं सत् व्यक्तं भवेत् अतो हरे द्वियुक्पदवर्गमूलं चेत् तदा तादृशोहरः व्यक्तीकर्तुं शक्यते । तद्यथा

$$\text{उ० १. } \frac{१ + \sqrt{२}}{३ - २\sqrt{२}} = \frac{(१ + \sqrt{२})(३ + २\sqrt{२})}{(३ - २\sqrt{२})(३ + २\sqrt{२})} \\ = \frac{३ + ३\sqrt{२} + २\sqrt{२} + २\sqrt{२}\sqrt{२}}{९ - ८} = \frac{७ + ५\sqrt{२}}{१} = ७ + ५\sqrt{२}$$

$$\text{उ० २. } \frac{\sqrt{१ + य^२} - \sqrt{१ - य^२}}{\sqrt{१ + य^२} + \sqrt{१ - य^२}} \text{ अत्र हरस्य व्यक्तीकरणं क्रियताम्} \\ \text{तदा स्वरूपं} = \frac{(\sqrt{१ + य^२} - \sqrt{१ - य^२})^२}{(\sqrt{१ + य^२} + \sqrt{१ - य^२})(\sqrt{१ + य^२} - \sqrt{१ - य^२})}$$

$$= \frac{(1+y^2) + (1-y^2) - 2\sqrt{1-y^2}}{(1+y^2) - (1-y^2)}$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{1-y^2}}{2y^2} = \frac{1 - \sqrt{1-y^2}}{y^2}$$

उ० ३. स्पष्टीक्रियताम् $\frac{3+\sqrt{6}}{4\sqrt{3} - 2\sqrt{12} - \sqrt{32} + \sqrt{40}}$

$$= \frac{3+\sqrt{6}}{4\sqrt{3} - 2 \times 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}(4-4) + \sqrt{2}(4-4)}$$

$$= \frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{6} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} \times \sqrt{2}}{3-2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} \times 2}{1} = \frac{9\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3}$$

उ० ४. $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ स्पष्टीक्रियताम्

अत्र प्रथमपदं $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+1}$

$$= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{2-1} = 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$$

द्वितीयपदं $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$$= \frac{2(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{2} = 3\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

तृतीयपदं $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$$= \frac{\sqrt{18}-\sqrt{12}}{3-2} = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

∴ पूर्वोक्तं स्वरूपम् $= 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) + 3\sqrt{2}$

$$= 2\sqrt{3} = 0$$

उ. ५. $\frac{७}{२^{\frac{१}{२}} + २^{\frac{१}{४}} + १}$ इदं स्वरूपं अभिन्नस्वरूपे परिवर्त्यताम्

$$\begin{aligned} \text{उद्दिष्टम्} &= \frac{७}{(२^{\frac{१}{२}} + १) + २^{\frac{१}{४}}} = \frac{७ \{ (२^{\frac{१}{२}} + १) - २^{\frac{१}{४}} \}}{\{ (२^{\frac{१}{२}} + १) + २^{\frac{१}{४}} \} \{ (२^{\frac{१}{२}} + १) - २^{\frac{१}{४}} \}} \\ &= \frac{७ \{ (२^{\frac{१}{२}} + १) - २^{\frac{१}{४}} \}}{(२^{\frac{१}{२}} + १)^2 - २^{\frac{१}{२}}} = \frac{७ \{ (२^{\frac{१}{२}} + १) - २^{\frac{१}{४}} \}}{(२ + २ \cdot २^{\frac{१}{२}} + १) - २^{\frac{१}{२}}} \\ &= \frac{७ \{ (२^{\frac{१}{२}} + १) - २^{\frac{१}{४}} \}}{३ + २^{\frac{१}{२}}} = \frac{७ (१ - २^{\frac{१}{४}} + २^{\frac{१}{२}}) (३ - २^{\frac{१}{२}})}{(३ + २^{\frac{१}{२}}) (३ - २^{\frac{१}{२}})} \\ &= \frac{७ (३ - ३ \cdot २^{\frac{१}{४}} + ३ \cdot २^{\frac{१}{२}} - २^{\frac{१}{४}} + २^{\frac{३}{४}} - २)}{९ - २} = १ - ३ \cdot २^{\frac{१}{४}} + २ \cdot २^{\frac{१}{२}} + २^{\frac{३}{४}} \end{aligned}$$

अत्रेदं स्पष्टमवसीयते एवंविधे स्वरूपे $\frac{य}{\sqrt{अ} + \sqrt{व} + \sqrt{क}}$ हरभाज्यौ प्रथमतः $\sqrt{अ} + \sqrt{व} - \sqrt{क}$ अनेन गुणितौ सन्तौ हरस्वरूपं $(\sqrt{अ} + \sqrt{व})^2 - क$ एवं स्वरूपे परिणतं भवति वा $अ + व - क + २\sqrt{अव}$ एवं स्वरूपे परिणतं भवति ततः पुनः नवीनभाज्यहरौ $(अ + व - क) - २\sqrt{अव}$ अनेन गुणितौ सन्तौ हरे $(अ + व - क)^2 - ४अव$ एवं व्यक्तस्वरूपमायाति अतएव भास्करः “घनर्णताव्यत्ययमीप्सितायाश्छेदे करण्या असकृद्विधाय । तादृक्छिदा भाज्यहरौ निह-न्यादेकैव यावत्करणी हरे स्यात्” इत्युक्तवान्

(उ० २४) अभ्यासार्थं प्रभाः

निम्नलिखितानि स्वरूपाणि तथा परिवर्त्तनीयानि येन हरे व्यक्तीकरणं भवति ।

१. $\frac{५\sqrt{३} + \sqrt{७}}{४\sqrt{३} + २\sqrt{७}}$ २. $\frac{३\sqrt{२} + २\sqrt{३}}{३\sqrt{२} - २\sqrt{३}}$ ३. $\frac{४ + ३\sqrt{२}}{३ - २\sqrt{२}}$ ४. $\frac{३\sqrt{५} + \sqrt{३}}{\sqrt{५} - \sqrt{३}}$
५. $\frac{\sqrt{अ + य} + \sqrt{अ - य}}{\sqrt{अ + य} - \sqrt{अ - य}}$ ६. $\frac{\sqrt{य^2 + १} - \sqrt{य^2 - १}}{\sqrt{य^2 + १} + \sqrt{य^2 - १}}$
७. $\frac{१}{१ + \sqrt{२} + \sqrt{३}}$ ८. $\frac{१२}{३ + \sqrt{५} - २\sqrt{२}}$

$$९. \frac{(\sqrt{३} + \sqrt{५})(\sqrt{५} + \sqrt{२})}{\sqrt{२} + \sqrt{३} + \sqrt{५}}$$

$$१०. \frac{१}{\sqrt{१०} + \sqrt{१४} + \sqrt{१५} + \sqrt{२१}}$$

निम्नस्वरूपाणि स्पष्टीक्रियन्ताम्

$$११. \frac{१}{य + \sqrt{य^२ - १}} + \frac{१}{य - \sqrt{य^२ - १}}$$

$$१२. \frac{१५}{\sqrt{१०} + \sqrt{२०} + \sqrt{४०} - \sqrt{५} - \sqrt{८०}}$$

$$१३. \frac{\sqrt{२}(\sqrt{३} + १)(२ - \sqrt{३})}{(\sqrt{२} - १)(३\sqrt{३} - ५)(२ + \sqrt{२})}$$

$$१४. (३ + २\sqrt{२})^{-३} + (३ - २\sqrt{२})^{-३}$$

$$१५. \frac{य + \sqrt{य^२ - १}}{य - \sqrt{य^२ - १}} - \frac{य - \sqrt{य^२ - १}}{य + \sqrt{य^२ - १}}$$

$$१६. \frac{\sqrt{य^२ + १} + \sqrt{य^२ - १}}{\sqrt{य^२ + १} - \sqrt{य^२ - १}} + \frac{\sqrt{य^२ + १} - \sqrt{य^२ - १}}{\sqrt{य^२ + १} + \sqrt{य^२ - १}}$$

द्वियुक्पदमूलस्य व्यक्तीकरणाय काचिद्विशेषप्रक्रिया ।

प्रथमा स्थितिः । कल्प्यतां द्वियुक्पदमूलस्य स्वरूपं $\sqrt[p]{अ} - \sqrt[k]{व}$

कल्प्यतां $\sqrt[p]{अ} = य$, $\sqrt[k]{व} = र$ तथा कल्प्यतां प, क अनयोः

न लघुतमापवर्त्यस्तदा $य^n$, $र^n$ स्फुटौ संभवाङ्क तुल्यौ

इदानीं $य^n - र^n$ इदं स्वरूपं $य - र$ अनेन निःशेषं विभज्यते न

इत्यस्य यस्मिन्कस्मिन्नपि माने तथा

$$य^n - र^n = (य - र)(य^{n-१} + य^{n-२}र + य^{n-३}र^२ + य^{n-४}र^३ + \dots + र^{n-१})$$

अतो व्यक्तीकरणाय गुणकः $य^{n-१} + य^{n-२}र + य^{n-३}र^२ + \dots + र^{n-१}$

तथा व्यक्तस्वरूपम् $य^n - र^n$

द्वितीया स्थितिः । कल्प्यते द्वियुक्पदमूलस्वरूपम् $\sqrt[p]{अ} + \sqrt[k]{व}$

कल्प्यतां य, र, न पूर्वकल्पितानि मानानि तदा

(१) यदि न समसंख्या तदा $y^n - r^n$ इदं $y + r$ अनेन निःशेषं विभज्यते तथा $y^n - r^n$

$$= (y + r) (y^{n-1} - y^{n-2}r + \dots + y \cdot r^{n-2} - r^{n-1})$$

$$\text{अतो व्यक्तीकरणाय गुणकः} = y^{n-1} - y^{n-2}r + \dots + y \cdot r^{n-2} - r^{n-1} \text{ तथा व्यक्तस्वरूपम्} = y^n - r^n$$

(२) यदि न विषमसंख्या, तदा $y^n + r^n$ इदं $y + r$ अनेन निःशेषं विभज्यते

$$\text{तथा } y^n + r^n$$

$$= (y + r) (y^{n-1} - y^{n-2}r + \dots + y \cdot r^{n-2} + r^{n-1})$$

$$\text{अतो व्यक्तगुणकः} = y^{n-1} - y^{n-2}r + \dots - y \cdot r^{n-2} + r^{n-1}$$

$$\text{तथा व्यक्तस्वरूपम्} = y^n + r^n$$

उ. १. $\sqrt[3]{३} + \sqrt[3]{५}$ अत्र तादृशो गुणकोऽवसेयः येन व्यक्तीकरणं संपद्यते

$$\text{कल्प्यते } y = \sqrt[3]{३}, r = \sqrt[3]{५} \text{ तदा } y^6 \text{ तथा } r^6 \text{ द्वयमपि व्यक्तं तथा } y^6 - r^6 = (y + r) (y^5 - y^4r + y^3r^2 - y^2r^3 + yr^4 - r^5)$$

अतः y, r अनयोर्मानयोरुत्थापनेनाभीष्टगुणकखण्डम्

$$= \sqrt[3]{३}^5 - \sqrt[3]{३}^4 \cdot \sqrt[3]{५} + \sqrt[3]{३}^3 \cdot \sqrt[3]{५}^2 - \sqrt[3]{३}^2 \cdot \sqrt[3]{५}^3 + \sqrt[3]{३} \cdot \sqrt[3]{५}^4 - \sqrt[3]{५}^5$$

$$\text{वा} = \sqrt[3]{३}^5 - ९\sqrt[3]{५} + \sqrt[3]{३} \cdot \sqrt[3]{५}^2 - १५ + \sqrt[3]{३} \cdot \sqrt[3]{५}^4 - \sqrt[3]{५}^5$$

$$\text{तथा व्यक्तफलम्} = \sqrt[3]{३}^5 - \sqrt[3]{५}^5 = \sqrt[3]{३}^3 - \sqrt[3]{५}^3 = २७ - १२५ = २$$

उ० २. $(\sqrt[3]{५} + \sqrt[3]{९}) \div (\sqrt[3]{५} - \sqrt[3]{९})$ इदं भिन्नरूपे परिवर्त्यतां येन हरे व्यक्तीकरणं भवति--

$$\text{हरस्य व्यक्तीकरणाय कल्प्यतां } \sqrt[3]{५} = y, \sqrt[3]{९} = r \text{ तदा}$$

$$\text{यतः } y^3 - r^3 = (y - r) (y^2 + yr + r^2)$$

$$\text{अतोऽभीष्टं गुणकखण्डम्} = \sqrt[3]{५}^2 + \sqrt[3]{५} \sqrt[3]{९} + \sqrt[3]{९}^2$$

$$\text{तथा हरस्वरूपम्} = \sqrt[3]{५}^3 - \sqrt[3]{९}^3 = ५ - २७ = २२$$

$$\text{अतोऽभीष्टं स्वरूपम्} = \frac{(\sqrt[3]{५} + \sqrt[3]{९}) (\sqrt[3]{५}^2 + \sqrt[3]{५} \sqrt[3]{९} + \sqrt[3]{९}^2)}{२२}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot 4^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 4^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 2 \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 3^{\frac{5}{2}}}{22} \\
 &= \frac{98 + 4^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} + 4 \cdot 3^{\frac{3}{2}} + 4^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{99}
 \end{aligned}$$

उ० २५ प्रश्नाः (हरस्य व्यक्तीकरणं क्रियताम्)

१. $\frac{1}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$

२. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4}}$

३. $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a+b}}$

४. $\frac{2\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1} - \sqrt{2a+1} + \sqrt{a+1}}$

५. $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{4} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{10} - \sqrt{4}}$

६. $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{4} + \sqrt{2})}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

करणीमूलानयने प्रकारान्तरम्

उदा० १. $4 + 2\sqrt{3}$ अस्य मूलं साध्यम्

$$\begin{aligned}
 4 + 2\sqrt{3} &= 4 + 2\sqrt{1} = 4 + 2\sqrt{3 \times 1} = 4 + 2\sqrt{3}\sqrt{1} \\
 &= 3 + 2 + 2\sqrt{3}\sqrt{1} \\
 &= (\sqrt{3})^2 + (1)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{1} = (\sqrt{3} + \sqrt{1})^2
 \end{aligned}$$

अतोऽभीष्टमूलम् $= \sqrt{3} + \sqrt{1} =$ वा क ३ + क २

उदा० २. $4 - 2\sqrt{3}$ अस्य मूलं साध्यम्

$$\begin{aligned}
 4 - 2\sqrt{3} &= 4 - 2\sqrt{3 \times 1} = 4 - 2\sqrt{3}\sqrt{1} \\
 &= 3 + 1 - 2\sqrt{3}\sqrt{1} \\
 &= (\sqrt{3})^2 + (1)^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{1} = (\sqrt{3} - 1)^2
 \end{aligned}$$

अतोऽभीष्टमूलम् $=$ क ३ - १

उदा० ३. $2 \pm 2\sqrt{a^2 - c^2}$ अस्य मूलमपेक्षितम्

$$2 \pm 2\sqrt{a^2 - c^2} = (a + c) + (a - c) \pm$$

$$2\sqrt{(a + c)(a - c)} = (\sqrt{a + c} \pm \sqrt{a - c})^2$$

अतो मूलम् $= \sqrt{a + c} \pm \sqrt{a - c}$

उ० २६ निम्नलिखितप्रश्नानां मूलानि साध्यानिः—

$$१. ११ + ६\sqrt{२} \quad २. १४ + ६\sqrt{५} \quad ३. ८ + २\sqrt{१५}$$

$$४. ६ - ४\sqrt{५} \quad ५. ३० + १२\sqrt{६} \quad ६. ४\sqrt{३} - ३\sqrt{३}$$

$$७. २ + \sqrt{३} \quad ८. २ (अ + व + \sqrt{अ^२ + २ अ व})$$

$$९. क + च - २\sqrt{(क + १)(च - १)} \quad १०. १ + \sqrt{१ - क^२}$$

$$११. अ क = २ अ\sqrt{अ क - अ^३} \quad १२. अ^२ + २ क\sqrt{अ^२ - क^२}$$

संभवसंख्यायाः मूलं अंशतः संभवसंख्यातुल्यं अंशतः करणीरूपं च न भवितुमर्हति ।

कल्प्यते $\sqrt{न} = अ + \sqrt{म}$ तदा पक्षयोर्वर्गकरणेन

$$न = अ^२ + म + २ अ\sqrt{म}$$

$$\therefore \sqrt{म} = \frac{न - अ^२ - म}{२ अ} \text{ अतोऽत्र करणी म कस्याश्चित्संभवसंख्या-}$$

यास्तुल्या दृश्यतेऽतः इदमसंभवम् । अर्थात् संभवसंख्याया मूलं संभव-
संख्यातुल्यं करणीरूपं वा भवितुमर्हति ।

यदि $अ + \sqrt{व} = क + \sqrt{य}$ एवं समीकरणं भवेद्यत्र अ, क संभव-
संख्यासमौ तथा $\sqrt{व}, \sqrt{य}$ करणीरूपौ स्तः तदा $अ = क$ तथा $व = य$
भविष्यति ।

यदि अ, क तुल्यौ न चेत्तदा कल्प्यते $अ = क + म$

$$\text{तदा } क + म + \sqrt{व} = क + \sqrt{य}$$

$$\text{अतः } म + \sqrt{व} = \sqrt{य} \text{ इदं पूर्वयुक्त्या असंभवं यतः } \sqrt{य} \text{ अंशतः}$$

संभवसंख्यातुल्यं अंशतः करणीरूपं च सिद्धम् ।

$$\text{अतः } अ = क \text{ फलतः } \sqrt{व} = \sqrt{य}$$

अत्रेदं मनसि ध्येयं यत् पूर्वसाधितफलं तदैव तथ्यं यदा $\sqrt{व}$
तथा $\sqrt{य}$ इमे यथार्थतः करणीरूपे यतः $५ + \sqrt{९} = ३ + \sqrt{२५}$
अस्मात् समीकरणात् एवं कदापि कथयितुं न शक्यते यत् $५ = ३$ एवं $९ = २५$

अ + $\sqrt{व}$ अस्य मूलं साध्यं यत्र $\sqrt{व}$ करणी । कल्प्यतां $\sqrt{अ + \sqrt{व}}$
 $= \sqrt{क + \sqrt{य}}$ तदा पक्षयोर्वर्गकरणेन $अ + \sqrt{व}$

$$= क + य + २\sqrt{क}\sqrt{य} \text{ अतः साधितसिद्धान्तानुसारेण } अ = क + य, \sqrt{व} \\ = २\sqrt{कय} \dots\dots\dots(१)$$

$$\therefore अ^२ - व = (क + य)^२ - ४ क य = (क - य)^२$$

$$\therefore \sqrt{अ^२ - व} = क - य$$

$$\text{तथा } क + य = अ$$

अतः संक्रमणेन क, य अनयोर्माने साध्ये

एतेन विशोधयेद्द्रूपकृतेरित्यादि भास्करीयं करणीमूलानयनमुपपद्यते ।

क, य अनयोर्मानसाधने तदैव सुगमता यदा $\sqrt{अ^२ - व}$ अस्य मूलं मिलति अन्यथा कठिनं मूलानयनं भवति ।

$$\left. \begin{array}{l} \text{पूर्वसाधितस्वरूपे } अ = क + य \\ \sqrt{व} = २\sqrt{कय} \end{array} \right\} \dots\dots\dots(१)$$

$$\text{एतेन } अ - \sqrt{व} = क + य - २\sqrt{कय} = (\sqrt{क} - \sqrt{य})^२$$

$$\therefore \sqrt{अ - \sqrt{व}} = \sqrt{क} - \sqrt{य}$$

$$\text{अत इदं फलितं यदि } \sqrt{अ + \sqrt{व}} = \sqrt{क} + \sqrt{य}$$

$$\text{तदा } \sqrt{अ - \sqrt{व}} = \sqrt{क} - \sqrt{य} \text{ भविष्यति ।}$$

उ० १. $७ + २\sqrt{१०}$ अस्य मूलं साध्यम्

$$\text{कल्प्यतां } \sqrt{७ + २\sqrt{१०}} = \sqrt{य} + \sqrt{र} \text{ तदा वर्गकरणेन}$$

$$७ + २\sqrt{१०} = य + र + २\sqrt{य र}$$

$$\text{अतः पूर्वयुक्त्या } ७ = य + र$$

$$\text{तथा } १० = य र$$

$$\text{अतो य, र माने ५, २}$$

$$\text{अतोऽभीष्टमूलम् } \sqrt{५} + \sqrt{२}$$

$$\text{यद्वा } \sqrt{७ + २\sqrt{१०}} = \sqrt{य} + \sqrt{र} \dots\dots\dots(१)$$

$$\text{अतः } \sqrt{७ - २\sqrt{१०}} = \sqrt{य} - \sqrt{र} \dots\dots\dots(२)$$

(१), (२) अनयोरुण्णेन

$$\sqrt{४९ - ४०} = य - र$$

$$\text{अतः } ३ = य - र, ७ = य + र \text{ अतो य, र माने ५, ३}$$

$$\text{अतो मूले } \sqrt{५} + \sqrt{३}$$

उ० २. १६ - ५√७ अस्य मूलं साध्यम्

$$\text{कल्प्यते } \sqrt{१६ - ५\sqrt{७}} = \sqrt{य} - \sqrt{र}$$

$$\text{तदावश्यं } \sqrt{१६ + ५\sqrt{७}} = \sqrt{य} + \sqrt{र}$$

$$\text{अतः } \sqrt{२५६ - १७५} = य - र$$

$$\sqrt{८१} = ९ = य - र$$

$$\text{तथा } १६ = य + र$$

$$\text{अतो य, र माने } \frac{३५}{२}, \frac{३}{२}$$

$$\text{अतो मूले } \sqrt{\frac{३५}{२}}, \sqrt{\frac{३}{२}}$$

उ० ३. √२७ + √१५ अस्य मूलं किम्

$$\sqrt{२७} + \sqrt{१५} = ३\sqrt{३} + \sqrt{३}\sqrt{५} = \sqrt{३} (३ + \sqrt{५})$$

$$\text{कल्प्यते } \sqrt{३} + \sqrt{५} = \sqrt{य} + \sqrt{क}$$

$$\text{तदा } \sqrt{३} - \sqrt{५} = \sqrt{य} - \sqrt{क}$$

$$\therefore \sqrt{९ - ५} = \sqrt{४} = २ = य - क$$

$$\text{तथा } ३ = य + क$$

$$\therefore य = \frac{५}{२}, क = \frac{१}{२}$$

$$\therefore \sqrt{३} + \sqrt{५} = \sqrt{\frac{५}{२}} + \sqrt{\frac{१}{२}}$$

$$\text{अतोऽभीष्टमूलम्} = \sqrt[४]{३} (\sqrt{\frac{५}{२}} + \sqrt{\frac{१}{२}})$$

उ० ४. २ अ ± २ √अ² - य² अस्य वर्गमूलं किम् ।

$$२ अ ± २ \sqrt{अ² - य²} = (अ + य) + (अ - य)$$

$$\pm २ \sqrt{(अ + य)(अ - य)}$$

$$= \{ \sqrt{(अ + य)} \pm \sqrt{(अ - य)} \}^2$$

$$\text{अतः } २ अ \pm २ \sqrt{अ² - य²} \text{ अस्य मूलम्} = \sqrt{अ + य} \pm \sqrt{अ - य}$$

उ० २७ अभ्यासार्थमुदाहरणानि

निम्नलिखित-प्रश्नानां वर्गमूलमपेक्षितम्

$$(१) १४ - ६\sqrt{५} \quad (२) १७ + १२\sqrt{२} \quad (३) ३१ + ४\sqrt{२१}$$

$$(४) \sqrt{३२} - \sqrt{२४} \quad (५) \sqrt{१८} - \sqrt{१६} \quad (६) \sqrt{२७} + \sqrt{२४}$$

$$(७) ५\sqrt{५} + \sqrt{१२०} \quad (८) अ + ब + \sqrt{२ अ य + ब²}$$

$$(९) य + क + न + २ \sqrt{ब न + क न} \quad (१०) २ब - १ + २ \sqrt{य² - २य - ६}$$

$$(११) २ अ - \sqrt{३ अ^२ - २ अ व - व^२}$$

$$(१२) १ + अ^२ + (१ + अ^२ + अ^४)^{\frac{१}{२}}$$

$$(१३) १ + (१ - अ^२)^{-\frac{१}{२}}$$

त्र्यादिकरणीमूलविचारः ।

$$\text{कल्प्यते } \sqrt{अ + \sqrt{व} + \sqrt{क} + \sqrt{प}} = \sqrt{या} + \sqrt{का} + \sqrt{नी}$$

$$\therefore अ + \sqrt{व} + \sqrt{क} + \sqrt{प} = या + का + नी + २ \sqrt{या} \sqrt{का} \\ + २ \sqrt{या} \sqrt{नी} + २ \sqrt{का} \sqrt{नी}$$

अत्र यदि $\sqrt{व} = २ \sqrt{याका}$, $\sqrt{क} = २ \sqrt{यानी}$, $\sqrt{प} = २ \sqrt{कानी}$
एवं स्यात्तथा $अ = या + का + नी$ तदाभीष्टमूलं प्राप्तुं शक्नुयात् ।

$$\text{उ० १. } २१ - ४\sqrt{५} + ८\sqrt{३} - ४\sqrt{१५} \text{ अस्य मूलानयने}$$

$$\text{कल्प्यते } \sqrt{२१ - ४\sqrt{५} + ८\sqrt{३} - ४\sqrt{१५}} \\ = \sqrt{या} + \sqrt{का} - \sqrt{नी}$$

$$\therefore २१ - ४\sqrt{५} + ८\sqrt{३} - ४\sqrt{१५} = या + का + नी + २ \sqrt{याका} \\ - २\sqrt{यानी} - २\sqrt{कानी} \text{ तथा कल्प्यतां } २ \sqrt{याका} = ८\sqrt{३}, २\sqrt{यानी} \\ = ४\sqrt{१५}, २\sqrt{कानी} = ४\sqrt{५}$$

$$\text{ततो गुणनने } २ \sqrt{याका} \times २ \sqrt{यानी} \times २ \sqrt{कानी} \\ = ८ या का नी = ८\sqrt{३} \times ४\sqrt{१५} \times ४\sqrt{५} = २४० \times ८$$

$$\therefore या का नी = २४०$$

$$\therefore \sqrt{या का नी} = \sqrt{२४०} = ४\sqrt{१५}$$

$$\therefore \sqrt{या} = २\sqrt{३}, \sqrt{का} = २, \sqrt{नी} = \sqrt{५}$$

$$\text{तथा यतोऽत्र } या + का + नी = २१ \text{ दृश्यते}$$

$$\text{अतोऽभीष्टं मूलम्} = २\sqrt{३} + २ - \sqrt{५},$$

$$\text{उ० २. } ६ + \sqrt{१२} - \sqrt{२४} - \sqrt{८} \text{ अत्र वर्गमूलं किम्}$$

$$\text{कल्प्यताम् } \sqrt{६ + \sqrt{१२} - \sqrt{२४} - \sqrt{८}}$$

$$= \sqrt{या} + \sqrt{का} - \sqrt{नी} \text{ तदा}$$

$$६ + \sqrt{१२} - \sqrt{२४} - \sqrt{८} = या + का + नी + २ \sqrt{या का} \\ - २ \sqrt{कानी} - २ \sqrt{यानी}$$

संभवसंख्यासिद्धान्तेनात्र यदि ६ = या + का + नी

तथा $२\sqrt{\text{याका}} = \sqrt{१२}$, $२\sqrt{\text{कानी}} = \sqrt{२४}$, $२\sqrt{\text{यानी}} = \sqrt{८}$

भवेत्तदैव मूलं प्राप्यते

०. $\sqrt{\text{याका}} = \sqrt{३} \dots (१)$ गुणनेन याकानी = $२ \cdot ३ = ६$

$\sqrt{\text{कानी}} = \sqrt{२}\sqrt{३} \dots (२)$ $\sqrt{\text{याकानी}} = \sqrt{६} \dots (४)$

$\sqrt{\text{यानी}} = \sqrt{२} \dots (३)$

(४) इदं (२), (३) तथा (१) एभिः क्रमशो विभजनेन वर्गीकरणेन च या = १, का = ३, नी = २ तथा एभिर्मानैः यतः

या + का + नी = ६ भवति तेनाभीष्टं मूलम् = $१ + \sqrt{३} - \sqrt{२}$,
करणीमूलानयने भास्करविशेषश्चिन्त्यः ।

उ० २८ अभ्यासार्थं प्रभाः

वर्गमूलं साध्यताम्

$$१. ८ + २\sqrt{२} + २\sqrt{५} + २\sqrt{१०}$$

$$२. १० + २\sqrt{६} + २\sqrt{१०} + २\sqrt{१५}$$

$$३. ११ + ६\sqrt{२} + ४\sqrt{३} + २\sqrt{६}$$

$$४. २१ - ४\sqrt{५} + ८\sqrt{३} - ४\sqrt{१५}$$

$$५. ३६ - २\sqrt{२०} - २\sqrt{२८} + २\sqrt{३५}$$

$$६. २४ + ४\sqrt{१५} - ४\sqrt{२१} - २\sqrt{३५}$$

$$७. ६ + \sqrt{१२} - \sqrt{२४} - \sqrt{८}$$

$$८. ५ - \sqrt{१०} - \sqrt{१५} + \sqrt{६}$$

$$९. अ + ३ ब + ४ + ४\sqrt{अ} - ४\sqrt{अ ब} - २\sqrt{३ अ ब}$$

$$१०. २१ + ३\sqrt{८} - ६\sqrt{३} - ६\sqrt{७} - \sqrt{२४} - \sqrt{५६} + २\sqrt{२१}$$

घनकरणी मूलानयनं यथाः—

यदि $\sqrt[३]{अ + \sqrt{ब}} = य + \sqrt{क}$ कल्प्यते तदा पक्षयोर्घनकरणेन

$$अ + \sqrt{ब} = य^३ + क^३ + ३ य^२ \sqrt{क} + ३ य क$$

अतः संभवासंभवयोः समीकरणेन—

$$\left. \begin{aligned} अ &= य^३ + ३ य क \\ \sqrt{ब} &= ३ य^२ \sqrt{क} + \sqrt{क^३} \end{aligned} \right\} \text{अतः } \begin{aligned} अ - \sqrt{ब} &= य^३ + ३ य क - \\ ३ य^२ \sqrt{क} - \sqrt{क^३} \end{aligned}$$

नेनेन स्पष्टमवसीयते यत् $\sqrt[३]{अ - \sqrt{ब}} = य - \sqrt{क}$ अतः सिद्धं

यदा $\sqrt[३]{अ + \sqrt{ब}} = य + \sqrt{क}$ तदा $\sqrt[३]{अ - \sqrt{ब}} = य - \sqrt{क}$

उ० १. $३८ + १७\sqrt{५}$ अस्य घनमूलमपेक्षितम्

कल्प्यते $\sqrt[३]{३८ + १७\sqrt{५}} = य + \sqrt{क}$ तदा पूर्वनियमेन

$$\sqrt[३]{३८ - १७\sqrt{५}} = य - \sqrt{क}$$

$$\text{अतः } (य + \sqrt{क})(य - \sqrt{क}) = य^२ - क = \sqrt[३]{१४४४ - १४४५} \\ = \sqrt[३]{-१} = -१$$

$$\text{पुनर्यतः } \sqrt[३]{३८ + १७\sqrt{५}} = य + \sqrt{क}$$

$$\text{अतः } ३८ + १७\sqrt{५} = य^३ + \sqrt{क}^३ + ३ य^२ \sqrt{क} + ३ य क$$

$$\therefore ३८ = य^३ + ३ य क$$

$$-१ = य^२ - क \therefore क = य^२ + १$$

$$\therefore य^३ + ३ य (य^२ + १) = ३८$$

$$\text{वा, } ४ य^३ + ३ य = ३८$$

$$\text{ततः परीक्षया } य = २ \text{ कल्प्यते तदा } क = य^२ + १ = ५$$

$$\text{अतोऽभीष्टं मूलम्} = २ + \sqrt{५}$$

अत्रेदं स्मर्त्तव्यं यदि $य^२ - क$ इदं संभवसंख्यातुल्यं न चेत्तदा पूर्वप्रदर्शित-
युक्तिर्निष्फला एव ।

वि० प्र० $\sqrt[३]{अ + \sqrt{व}}$ अस्य घनमूलं $य + \sqrt{क}$ इदं कल्पितं न $\sqrt{य} + \sqrt{क}$
यतः $\sqrt[३]{अ + \sqrt{व}} = \sqrt{य} + \sqrt{क}$ कल्पिते

$$अ + \sqrt{व} = य\sqrt{य} + ३ य\sqrt{क} + ३ क\sqrt{य} + क\sqrt{क}$$

अत्र दक्षिणपार्श्वे किमपि खण्डं संभवसंख्यातुल्यं न

अतः अ अस्य तुल्यं किमपि खण्डं न स्यादत इदं न कल्प्यते ।

उदा० २. $२१\sqrt{६} - २३\sqrt{५}$ अस्य घनमूलं किम् ?

$$२१\sqrt{६} - २३\sqrt{५} = ६\sqrt{६} \left(\frac{२१}{६} - \frac{२३\sqrt{५}}{६\sqrt{६}} \right) \\ = (\sqrt{६})^३ \left(\frac{७}{२} - \frac{२३}{६}\sqrt{\frac{५}{६}} \right)$$

$$\text{अतः } \sqrt[३]{२१\sqrt{६} - २३\sqrt{५}} = \sqrt{६} \sqrt[३]{\frac{७}{२} - \frac{२३}{६}\sqrt{\frac{५}{६}}}$$

$$\text{कल्प्यते } \sqrt[३]{\frac{७}{२} - \frac{२३}{६}\sqrt{\frac{५}{६}}} = य - \sqrt{क}$$

$$\text{तदा } \sqrt[३]{\frac{७}{२} + \frac{२३}{६}\sqrt{\frac{५}{६}}} = य + \sqrt{क}$$

$$\text{अतः } य^२ - क = \sqrt[३]{\frac{७}{२} - \frac{२३}{६}\sqrt{\frac{५}{६}}} \sqrt[३]{\frac{७}{२} + \frac{२३}{६}\sqrt{\frac{५}{६}}} = \sqrt[३]{\frac{४९}{४} - \frac{२४२५}{२४}} = \frac{१}{२} \dots (१)$$

$$\text{तथा } \frac{७}{२} - \frac{२३}{६}\sqrt{\frac{५}{६}} = य^३ - ३ य^२ \sqrt{क} + ३ य क - क\sqrt{क}$$

$$\therefore y^3 + 3y = \frac{9}{8} \dots\dots\dots (२)$$

अतः (१), (२) आभ्यां समीकरणाभ्यां

$$y^3 + 3y (y^2 - \frac{9}{8}) = \frac{9}{8};$$

$$\text{वा, } ८y^3 - y = ७$$

$$\text{ततोऽनुमानेन } y = १ \therefore k = \frac{9}{8}$$

$$\text{एवं } \sqrt[3]{\frac{9}{8}} - \frac{3}{8} \sqrt[3]{\frac{9}{8}} = १ - \sqrt[3]{\frac{9}{8}}$$

$$\text{अतोऽभीष्टमूलम्} = \sqrt[3]{६} (१ - \sqrt[3]{\frac{9}{8}}) = \sqrt[3]{६} - \sqrt[3]{५}$$

उ० २९ अभ्यासार्थमुदाहरणानि

निम्नलिखितानां घनमूलं किम् ?

१. $१६ + ६\sqrt{६}$
२. $२६ - १५\sqrt{२}$
३. $११\sqrt{५} + १७\sqrt{२}$
४. $६६\sqrt{२} - ५६\sqrt{५}$
५. $२६४\sqrt{३} + १५०\sqrt{६}$
६. $१० + ६\sqrt{३}$
७. $३८ + १७\sqrt{५}$
८. $६६ - ७०\sqrt{२}$
९. $३८\sqrt{१४} - १००\sqrt{२}$
१०. $५४\sqrt{३} + ४१\sqrt{५}$
११. $१३५\sqrt{३} - ८७\sqrt{६}$

वज्राभ्यासगुणनरीतिः ।

$$\text{कल्प्यते } अ_१ या + व_१ का + र_१ नी = ०$$

$$\text{तथा } अ_२ या + व_२ का + र_२ नी = ० \quad \text{तदा}$$

$$\frac{\text{या}}{व_१ र_२ - व_२ र_१} = \frac{\text{का}}{र_१ अ_२ - र_२ अ_१} = \frac{\text{नी}}{अ_१ व_२ - अ_२ व_१}$$

इति साध्यम् ।

प्रथम समीकरणं $र_२$ इत्यनेन संगुण्य द्वितीय समीकरणं $र_१$ अनेन संगुण्य जातं समीकरणद्वयम्

$$अ_१ र_२ या + व_१ र_२ का + र_१ र_२ नी = ०$$

$$अ_२ र_१ या + व_२ र_१ का + र_१ र_२ नी = ०$$

ततः समशोधनेन

$$\text{या} (अ_२ र_१ - अ_१ र_२) + (व_२ र_१ - व_१ र_२) का = ०$$

$$\therefore \text{या} (अ_२ र_१ - अ_१ र_२) = (व_१ र_२ - व_२ र_१) का$$

$$\therefore \frac{\text{या}}{व_1 र_2 - व_2 र_1} = \frac{\text{का}}{अ_2 र_1 - अ_1 र_2} \dots\dots\dots (१)$$

पुनः प्रथमसमीकरणं $अ_2$ इत्यनेन संगुण्य द्वितीयसमीकरणं च $अ_1$ अनेन संगुण्य पुनर्जातं समीकरणद्वयम्

$$अ_1 अ_2 या + व_1 अ_2 का + र_1 अ_2 नी = 0 \quad \text{समशोधनेन}$$

$$अ_1 अ_2 या + अ_1 व_2 का + र_2 अ_1 नी = 0$$

$$(अ_1 व_2 - व_1 अ_2) का + (र_2 अ_1 - र_1 अ_2) नी = 0$$

$$\therefore (अ_1 व_2 - व_1 अ_2) का = (र_1 अ_2 - र_2 अ_1) नी$$

$$\therefore \frac{\text{का}}{र_1 अ_2 - र_2 अ_1} = \frac{\text{नी}}{अ_1 व_2 - व_1 अ_2} \dots\dots\dots (२)$$

अतः (१), (२) समीकरणाभ्याम्

$$\frac{\text{या}}{व_1 र_2 - व_2 र_1} = \frac{\text{का}}{र_1 अ_2 - र_2 अ_1} = \frac{\text{नी}}{अ_1 व_2 - व_1 अ_2}$$

इदमेव वज्राभ्यासगुणनम्

विशे० नो स्थाने नी अन्यत्वं न चेत् तत्र रूपं ग्राह्यम्

$$उ० १. ५ या + ६ का + ८ नी = ० \quad \text{अत्र या, का, नी मानानि कानीति}$$

$$३ या + ४ का + ६ नी = ० \quad \text{प्रश्ने पूर्वप्रदर्शितवज्राभ्यासगुणन-}$$

$$या + ५ का + १६ नी = ३ \quad \text{युक्त्या (१), (२) समीकरणाभ्याम्}$$

$$\frac{\text{या}}{६ \times ६ - ८ \times ४} = \frac{\text{का}}{८ \times ३ - ६ \times ५} = \frac{\text{नी}}{५ \times ४ - ६ \times ३}$$

$$\text{वा, } \frac{\text{या}}{३६ - ३२} = \frac{\text{का}}{२४ - ३०} = \frac{\text{नी}}{२० - १८}$$

$$\therefore \frac{\text{या}}{४} = \frac{\text{का}}{-६} = \frac{\text{नी}}{२}$$

$$\therefore \frac{\text{या}}{२} = \frac{\text{का}}{-३} = \text{नी} \quad \therefore \text{का} = -३ \text{ नी, या} = २ \text{ नी}$$

$$\text{या} + ५ \text{ का} + १६ \text{ नी} = ३ \quad \text{तत उत्थापनेन}$$

$$\text{वा, } २ \text{ नी} - १५ \text{ नी} + १६ \text{ नी} = ३$$

$$३ \text{ नी} = ३$$

$$\therefore \text{नी} = १ \quad \therefore \text{का} = -३, \text{ या} = २$$

उ० २. २ या + ३ का - ८ = ० अत्र या, का माने के ?

३ या - ४ का + ५ = ० पूर्वयुक्त्या

$$\frac{\text{या}}{(३ \times ५) - (-८ \times -४)} = \frac{\text{का}}{(-८ \times ३) - (५ \times २)} = \frac{१}{(२ \times -४) - (३ \times ३)}$$

$$\text{वा, } \frac{\text{या}}{१५ - ३२} = \frac{\text{का}}{-२४ - १०} = \frac{१}{-८ - ९}$$

$$\frac{\text{या}}{-१७} = \frac{\text{का}}{-३४} = \frac{१}{-१७}$$

$$\therefore \text{या} = \frac{\text{का}}{२} = १$$

$$\therefore \text{या} = १, \text{का} = २$$

उ० ३० अभ्यासार्थमुदाहरणानि

निम्नलिखितप्रश्नेषु अयत्तमानानि साध्यानि ।

$$\begin{array}{l} १. ३ या - ५ का + ६ = ० \\ ५ या + २ का - १६ = ० \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} २. -६ या + ५ का + २ = ० \\ १३ या - ६ का = १६ \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} ३. १५ या + ७ का = २४६ \\ ६ या = ४ का \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} ४. ४ का - ६ = २ \\ \text{या} + \text{का} = २ \\ ६ या - ५ का = ६ \\ \text{का} = \text{या} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} ५. ४ या - ५ का + २ नी = ० \\ २ या - ६ का + ४ नी = ० \\ \text{या} + \text{का} + \text{नी} = ६ \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} ६. ४ या - ५ का + २ नी = ० \\ २ या - ६ का + ४ नी = ० \\ \text{या} + \text{का} + \text{नी} = ६ \end{array} \right\}$$

कुट्टकोदाहरणस्य मानानयने प्रकारान्तरं यथा

को राशिः सप्तभिर्गुणितः त्रिभिर्गुणोऽष्टभिर्भक्तः सन् शुद्धिमेति तं राशिं प्रचक्ष ।

अत्रालापानुसारेण ७ या + ३ = ८ का $\therefore \text{या} = \frac{८ का - ३}{७}$

$$\text{वा } ७ या - ८ का = -३$$

$$\text{या} - \text{का} - \frac{\text{का}}{७} = -\frac{३}{७}$$

$$\text{या} - \text{का} = \frac{-३ + \text{का}}{७} \text{ इयमपि पूर्णालब्धिः}$$

$$\therefore \frac{\text{का} - ३}{७} = \text{नी}$$

$$\text{तदा का} = ७ नी + ३$$

$$\therefore \text{या} = \frac{५६ \text{ नी} + २४ - ३}{७} = \frac{५६ \text{ नी} + २१}{७} = ८ \text{ नी} + ३$$

नी	या	का	अतो नीलकमाने उत्थापनेन यावत् कालकयोर्मानमायाति
०	३	३	अनेनेदं सिद्धं कुट्टकीयं किमप्युदाहरणं
१	११	१०	इ या $\pm$ इ का = ६
२	१९	१७	अस्मिन् स्वरूपे परिवर्तयितुं शक्यते
३	२४	२४	

उ० २. ७ या + १२ का = २२० अत्र यावत्कालकयोः पूर्णे धनमाने अपेक्षिते ।

अत्र प्रथमं लघुगुणकेन सप्तभिः पक्षौ विभजनीयौ तदा

$$\text{या} + \text{का} + \frac{५ \text{ का}}{७} = ३१ + \frac{३}{७}$$

$$\therefore \text{या} + \text{का} + \frac{५ \text{ का} - ३}{७} = ३१ \dots \dots \dots (१)$$

अत्र यतः या + का पूर्णालब्धिरतोऽवश्यं $\frac{५ \text{ का} - ३}{७}$ पूर्णा लब्धिः

अथवा $\frac{१५ \text{ का} - ९}{७}$ इयमपि पूर्णा लब्धिः
त्रिभिर्गुणिते

२ का - १ + $\frac{\text{का} - २}{७}$ इयमपि पूर्णालब्धिः

वा, $\frac{\text{का} - २}{७}$ इयमपि पूर्णालब्धिः

अतः कल्प्यते $\frac{\text{का} - २}{७} = \text{नी}$

तदा का = ७ नी + २ $\dots \dots \dots (२)$

(१) अस्मिन् उत्थापनेन

$$\text{या} + ७ \text{ नी} + २ + ५ \text{ नी} + १ = ३१$$

$$\text{वा, या} = २८ - १२ \text{ नी} \dots \dots \dots (३)$$

अत्र यदि नी मानं द्वाभ्यामधिकं कल्प्यते तदा यावन्मानं ऋणं भविष्यति अतो

नीलकस्य ०, १, २ उत्थापनेन

$$\left. \begin{array}{l} \text{नी} = ०, १, २, \\ \text{या} = २८, १६, ४, \\ \text{का} = २, ९, १६, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{वि० द्र० } \frac{५ \text{ का} - ३}{७} \text{ अत्र त्रिभिर्गुणनस्यायम-} \\ \text{सिप्रायः यत् कालकस्य गुणको रूपतुल्य एव भवेत् ।} \end{array}$$

उ० ३. यदि या + का + नी = ४३..... (१)

$$१० या + ५ का + २ नी = २२९$$

$$तदा २ या + २ का + २ नी = ८६$$

$$१० या + ५ का + २ नी = २२९$$

$$८ या \times ३ का = १४३$$

अनयोरन्तरे कृते

$$ततः का + २ या + \frac{२ या}{३} = ४७ + \frac{३}{३}$$

$$\therefore का + २ या + \frac{२ या - २}{३} = ४७..... (२)$$

$$\therefore \frac{२ या - २}{३} = \text{इयं पूर्णा लब्धिः ।}$$

द्वाभ्यां गुणनेन वा $\frac{४ या - ४}{३} = या - १ + \frac{या - १}{३}$ इयमपि पूर्णा लब्धिः

$$\therefore \frac{या - १}{३} = पी$$

$$\therefore या = ३ पी + १$$

$$ततः (२) अत्रोत्थापनेन का + ६ पी + २ + \frac{६ पी + २ - २}{३} = ४७$$

$$वा, का + ८ पी + २ = ४७$$

$$\therefore का = ४५ - ८ पी$$

अतोऽत्र पीतकमानं पञ्चतोऽधिकं कल्पयितुं न शक्यते

$$\text{अतः पी} = १, २, ३, ४, ५,$$

$$या = ४, ७, १०, १३, १६,$$

$$का = ३७, २९, २१, १३, ५,$$

$$का = २, ७, १२, १७, २२,$$

उ० ३१ अभ्यासार्थमुदाहरणानि

$$(१) ३ या + ८ का = १०३ ।$$

$$(२) ५ या + २ का = ५३$$

$$(३) २३ या + २५ का = ६१५$$

$$(४) ४१ या + ४७ का = २१६१$$

$$(५) ५ या - ७ का = ३$$

$$(६) १६ का - २३ या = ७$$

$$(७) ७७ का - ३० या = २६५$$

“न मूलं क्षयस्यास्ति तस्याकृतित्वात्” एतदाश्रित्य

काल्पनिकपरिमाणव्युत्पत्तिगणितम्

यथा $\sqrt{a}$ इदं किञ्चित्स्वरूपं येन $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ इति द्योत्यते एवं $\sqrt{-a}$ इदमपि किञ्चित्स्वरूपं येन $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$ $\sqrt{-a}$ इदं स्वरूपं सर्वदा $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ अस्य समं यत्र $\sqrt{a}$ इदं कस्या अपि धनसंख्याया मूलं अतोऽत्र काल्पनिकस्वरूपं केवलमिदं $\sqrt{-1}$ यस्य व्युत्पत्तिरपेक्षितास्ति ।

ऋणसंख्याया मूलं न मिलति मिलेच्चेत्काल्पनिकमेव अतः सर्वा ऋण-संख्या मूलद्योतकचिह्नान्तर्गता काल्पनिकपरिमाणात्मिका एव ज्ञेया । पूर्वोक्तयुक्त्या तादृशस्वरूपे विशदीकृते गुण्यगुणकरूपे स्थापिते गुण्यो संभव-संख्याया मूलसमो गुणकश्च $\sqrt{-1}$ इदमेव भवति अतः वस्तुतः सर्वत्र इदमेव स्वरूपं काल्पनिकपरिमाणम् अतएव स्वरूपस्यास्यैव व्याख्याक्रियते

$$\begin{aligned} \text{अतः } \sqrt{-a} \times \sqrt{-b} &= \sqrt{a} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{a \cdot b} \times (\sqrt{-1})^2 \\ &= \sqrt{a \cdot b} \times -1 = -\sqrt{a \cdot b} \end{aligned}$$

$\sqrt{-1}$ अस्य शक्तयः ।

$$\begin{aligned} (\sqrt{-1})^1 &= \sqrt{-1}, (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1, \\ \sqrt[3]{-1} &= (\sqrt{-1})^2 \times \sqrt{-1} = -1 \times \sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \\ \sqrt[4]{-1} &= (\sqrt{-1})^2 \times (\sqrt{-1})^2 = -1 \times -1 = 1 \end{aligned}$$

एषां चतुर्णां फलानां साहाय्येन काल्पनिकस्वरूपस्य सर्वाः शक्तयो सुखेनैव ज्ञातुं शक्याः यथाः—

$$\begin{aligned} (\sqrt{-1})^{13} &= \{ (\sqrt{-1})^8 \}^{13} \times \sqrt{-1} = (1)^{13} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-1} \\ (\sqrt{-1})^{14} &= \{ (\sqrt{-1})^8 \}^{13} \times (\sqrt{-1})^3 = \\ &= (1)^{13} \times -\sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \\ (\sqrt{-1})^{15} &= \{ (\sqrt{-1})^8 \}^{13} \times (\sqrt{-1})^2 = \\ &= (1)^{13} \times -1 = 1 \times -1 = -1 \\ (\sqrt{-1})^{16} &= \{ (\sqrt{-1})^8 \}^{16} = (1)^{16} = 1 \end{aligned}$$

विशेषः— $\sqrt{-1}$ एतच्चिह्नद्योतकमक्षरं सर्वत्र का ज्ञेयम्

(७० ३२) प्रश्नाः ।

स्पष्टीक्रियतां निम्नस्थाः

$$(१) (\sqrt{-१})^{२५} \quad (२) (\sqrt{-१})^{३८} \quad (३) (\sqrt{-१})^{६३} \\ (४) (\sqrt{-१})^{१५} \quad (५) (\sqrt{-१})^{१०५} \quad (६) (\sqrt{-१})^{११०}$$

३. यदि $अ \times व \sqrt{-१} = ०$ तदा $अ = ०$, $व = ०$

यतः यदि $अ \div व \sqrt{-१} = ०$

तदा $व \sqrt{-१} = -अ$

वर्गकरणेन $व^२ \times -१ = -व^२ = अ^२$

$\therefore अ^२ + व^२ = ०$

यतोऽत्र $अ^२$, $व^२$ प्रत्येकं धनात्मकौ अतोऽनयोर्योगः शून्यसमः कदापि न हि भवति केवलमेकां स्थितिं विहाय यत्र $अ^२$, $व^२$ प्रत्येकं शून्यसमः

अतः $अ^२ = ०$ तथा $व^२ = ०$

अतः $अ = ०$ तथा $व = ०$

४. यदि $अ + व \sqrt{-१} = क + ड \sqrt{-१}$ तदा

$अ = क$, तथा $व = ड$

यतः $अ \div व \sqrt{-१} = क \div ड \sqrt{-१}$

अतः पक्षान्तरानयनेन $अ - क + (व - ड) \sqrt{-१} = ०$

अतोऽत्र तृतीयनियमयुक्त्या $अ - क = ०$, तथा $व - ड = ०$

अर्थात् $अ = क$, $व = ड$,

एतेन इदं निर्गलितं यत् काल्पनिकस्वरूपद्वयस्य समीकरणे इदं परमावश्यकं यत् एकस्य पक्षस्य संभवसंख्या परपक्षस्य संभवसंख्या-समा भवति तथा एकस्य पक्षस्य काल्पनिकविभागः परपक्षस्य काल्पनिक-विभागेन समः ।

५. सजातीय काल्पनिकस्वरूपम्

द्वे काल्पनिकस्वरूपे सजातीये उच्येते यदा ते केवलं एतत् $\sqrt{-१}$ गुणकविशिष्ट खण्डे धनश्रुणे भिन्ने भवेतां यथा $अ + व \sqrt{-१}$ तथा $अ - व \sqrt{-१}$ द्वे सजातीये ।

अत्र $(अ + व \sqrt{-१}) + (अ - व \sqrt{-१}) = २ अ$

तथा $(अ + व \sqrt{-१}) (अ - व \sqrt{-१}) = अ^२ - व^२ (\sqrt{-१})^२ \\ = अ^२ + व^२$

अनेनावगम्यते द्वयोः काल्पनिकस्वरूपयोर्योगो घातश्च पूर्णसंख्यासमो भवति ।

$अ^२ + व^२$ अस्य वर्गमूलस्य धनात्मकमानं $अ + व \sqrt{-१}$,
 $अ - व \sqrt{-१}$ स्वरूपयोर्मध्ये प्रत्येकस्य मोद्गलस्य इति व्यवहियते
 (१) नियमः । द्वयोः काल्पनिकस्वरूपयोः घातस्य मोद्गलस्य
 तयोः स्वीयमोद्गलस्योर्घातेन समः ।

कल्प्यतां $अ + व \sqrt{-१}$ तथा $क + ड \sqrt{-१}$ द्वे केचित् काल्पनिकस्वरूपे
 तदा तयोर्घातः $= (अ + व \sqrt{-१}) (क + ड \sqrt{-१})$

$$= अ क + व क \sqrt{-१} + अ ड \sqrt{-१} + व ड (\sqrt{-१})^२$$

$$(अ क - व ड) + (व क + अ ड) \sqrt{-१}, \text{ यस्य}$$

$$\text{मोद्गलस्य} = \sqrt{(अ क - व ड)^२ + (व क + अ ड)^२}$$

$$= \sqrt{अ^२ क^२ + व^२ ड^२ - २ अ क व ड + व^२ क^२ + अ^२ ड^२ + २ व क अ ड}$$

$$= \sqrt{अ^२ क^२ + व^२ ड^२ + व^२ क^२ + अ^२ ड^२}$$

$$= \sqrt{क^२ (अ^२ + व^२) + ड^२ (अ^२ + व^२)}$$

$$= \sqrt{(अ^२ + व^२) (क^२ + ड^२)}$$

$$= \sqrt{अ^२ + व^२} \times \sqrt{क^२ + ड^२} \text{ इत्युपपन्नम्}$$

(२) नियमः । द्वयोः काल्पनिकस्वरूपयोर्मध्ये द्वितीयस्वरूपेण
 प्रथमस्वरूपे भक्ते यत्फलं तस्य मोद्गलस्य द्वितीयमोद्गलस्यविभक्त-
 प्रथममोद्गलस्यसमो भवति ।

कल्प्यते काल्पनिकस्वरूपे $अ + व \sqrt{-१}$, $क + ड \sqrt{-१}$ तदा

$$\frac{अ + व \sqrt{-१}}{क + ड \sqrt{-१}}$$

$$\frac{अ + व \sqrt{-१}}{क + ड \sqrt{-१}}$$

$$= \frac{(अ + व \sqrt{-१}) (क - ड \sqrt{-१})}{(क + ड \sqrt{-१}) (क - ड \sqrt{-१})}$$

$$= \frac{(अ क + व ड) + (व क - अ ड) \sqrt{-१}}{क^२ + ड^२}$$

$$= \frac{अ क + व ड}{क^२ + ड^२} + \frac{(व क - अ ड) \sqrt{-१}}{क^२ + ड^२}$$

$$\text{अस्य मोद्गलस्य} = \sqrt{\left(\frac{अ क + व ड}{क^२ + ड^२}\right)^२ + \left(\frac{व क - अ ड}{क^२ + ड^२}\right)^२}$$

$$= \frac{\sqrt{अ^२ क^२ + व^२ ड^२ + व^२ क^२ + अ^२ ड^२}}{क^२ + ड^२}$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} \quad \text{इत्युपपन्नम्}$$

६. $a + b\sqrt{-1}$ अस्य वर्गमूलमपेक्षितमस्ति ।

कल्प्यतां $\sqrt{a + b\sqrt{-1}} = n + ya\sqrt{-1}$ यत्र n तथा ya संभव-
संख्ये स्तः ।

$$\text{तदा } a + b\sqrt{-1} = (n + ya\sqrt{-1})^2 = n^2 - ya^2 + 2n ya\sqrt{-1}$$

$$\text{अतः पूर्व-नियमानुसारेण } n^2 - ya^2 = a \dots\dots\dots (१)$$

$$2n ya = b \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{यतः } (n^2 + ya^2)^2 = (n^2 - ya^2)^2 + 4n^2 ya^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{अतः } n^2 + ya^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots\dots (३)$$

(१) तथा (३) तः

$$n^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}, \quad ya^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}$$

$$\therefore n = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}, \quad ya = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

विशेषः—यतः n , ya संभवपरिमाणे, $n^2 + ya^2$ धनात्मकम्

अतः (३) स्वरूपे $\sqrt{a^2 + b^2}$ इदं सर्वदा धनात्मकमेव बोध्यम् ।

(२) स्वरूपतः स्पष्टमवसीयते यदि b मानं धनात्मकं तदा na
धनात्मकमन्यथा ऋणात्मकम् ।

७. अनुमानम्—कल्प्यतेऽत्र यदि $a = 0$, $b = \pm 1$ तदा $\sqrt{a + b\sqrt{-1}}$

$$= \sqrt{+ \sqrt{-1}} = n + ya\sqrt{-1}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1} = \pm \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

एवं यदि $b = +1$

तथा यदि $b = -1$ तदा

$$\sqrt{- \sqrt{-1}} = - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-1} = \pm \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

८. रूपस्य घनमूलम् ।

कल्प्यतां $y = \sqrt[3]{9}$ तदा

$$y^3 = 9, \text{ वा } y^3 - 9 = 0,$$

$$\text{वा, } (y - 9)(y^2 + y + 9) = 0,$$

$$\text{अतः } y - 9 = 0 \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{अथवा } y^2 + y + 9 = 0 \dots (२)$$

$$(१) \text{ तः } y = 9$$

$$(२) \text{ तः } y = \frac{-9 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

अतः रूपस्या १ स्य मूलानि:—

$$१, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{2}, \text{ तथा } \frac{-9 - \sqrt{-3}}{2}$$

अन्तिममूलद्वये काल्पनिके लक्ष्येते तथा

$$\begin{aligned} \left(\frac{-9 + \sqrt{-3}}{2} \right)^2 &= \frac{9 + (-3) - 2\sqrt{-3}}{4} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा } \left(\frac{-9 - \sqrt{-3}}{2} \right)^2 &= \frac{9 + (-3) + 2\sqrt{-3}}{4} \\ &= \frac{-2 + 2\sqrt{-3}}{4} \\ &= \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

यध्यनयोर्मूलयोर्मध्ये अन्यतरमूलद्योतकं v कल्प्यते तदान्यत् मूलं $= v^2$ अतः
१ अस्य घनमूलानि १, v , v^2 इति ।

अनुमानम्— v इत्यस्य कियत्परिमाणकमपि धनात्मकं प्रघातमापकं $= १$, v
तथा v^2 एतावदेव भवति ।

$$\text{यतः } v^9 = (v^3)^2 v = (१)^2 v = v$$

$$\text{एवं } v^{27} = (v^3)^9 v^2 = १^9 v^2 = v^2,$$

$$\text{एवं } v^{30} = (v^3)^{10} = १^{10} = १ \text{ इति ।}$$

अनुमानम् (२) एवं मध्यमाहरणयुक्त्या अत्र $v^2 + v + १ = ०$ अतः
रूपस्य त्रयाणां घनमूलानां योगः शून्यसमो भवति ।

अत्र कतिचित्सोत्तराः प्रश्नाः ।

$$\begin{aligned}
 १. (वम + व^२न)(व^२म + वन) &= म^२ - मन + न^२, इति साधयतु । \\
 (वम + व^२न)(व^२म + वन) &= व^३म^२ + व^५मन + व^२मन + \\
 व^३न^२ &= व^३म^२ + मन(व^५ + व^२) + व^३ = म^२ - मन + न^२, यतः \\
 व^३ &= १, तथा व^५ + व^२ = व^३व + व^२ = व + व^२ \\
 &= -१ यतः व + व^२ + १ = ० द्वितीयानुमानतः ।
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 २. (च + वय + व^२ज)(च + व^२य + वज) \\
 &= च^२ + य^२ + ज^२ - यज - जच - चय इति साध्यतम् \\
 (च + वय + व^२ज)(च + व^२य + वज) &= च^२ + चवय + चव^२ज + \\
 व^२यच + व^३य^२ + व^५यज + वजच + व^२यज + व^३ज^२ \\
 &= च^२ + व^३य^२ + व^३ज^२ + चय(व^२ + व) + यज(व^५ + व^२) + जच(व^२ + व) \\
 &= च^२ + य^२ + ज^२ - चय - यज - जच \\
 (यतः व + व^२ &= -१, तथा व^२ + व^५ = व^२ + व^३व = व^२ + व = -१)
 \end{aligned}$$

३. $१ + ४\sqrt{-३}$ अस्य वर्गमूलं किम् ?

$$\begin{aligned}
 \text{कल्प्यते अस्य वर्गमूलं नी + या } \sqrt{-१} \text{ तदा पूर्वोक्तयुक्त्या नी} \\
 = \sqrt{\frac{\sqrt{अ^२ + व^२ + अ}}{२}}, \text{ या} = \sqrt{\frac{\sqrt{अ^२ + व^२ - अ}}{२}}
 \end{aligned}$$

$$\text{अत्रोदाहरणे } अ = १, व = ४\sqrt{३} = \sqrt{४८}$$

$$\text{नी} = \sqrt{\frac{\sqrt{४८ + १ + १}}{२}} = \sqrt{\frac{७ + १}{२}} = २$$

$$\text{या} = \sqrt{\frac{\sqrt{४८ + १ - १}}{२}} = \sqrt{\frac{७ - १}{२}} = \sqrt{३}$$

$$\text{अतः अपेक्षितमूलम्} = २ + \sqrt{३} \sqrt{-१} = २ + \sqrt{-३}$$

(उ० ३३) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. \frac{३ + २\sqrt{-१}}{२ - ५\sqrt{-१}} + \frac{३ - २\sqrt{-१}}{२ + ५\sqrt{-१}} = -\frac{८}{२६} \text{ इति प्रदर्शयतु ।}$$

निम्नलिखितानां वर्गमूलानि साधयन्तु—

$$२. ७ - ३०\sqrt{-२}$$

$$३. ४\sqrt{-५} - १$$

$$४. २\sqrt{-१}$$

$$५. -३ - ४\sqrt{-१}$$

$$६. \sqrt{६ + ४०\sqrt{-१}} + \sqrt{६ - ४०\sqrt{-१}} \text{ अस्य वर्गः कः ?}$$

$$७. \sqrt{५ + ३\sqrt{-२०}} + \sqrt{५ - ३\sqrt{-२०}} \text{ अस्य किं मानम् ।}$$

$$८. \sqrt[३]{-१} \text{ अस्य किं मानम् ।}$$

$$९. \left(\frac{-१ + \sqrt{-३}}{२} \right)^{२६} + \left(\frac{-१ - \sqrt{-३}}{२} \right)^{२६} = -१ \left. \vphantom{\left(\frac{-१ + \sqrt{-३}}{२} \right)^{२६}} \right\} \text{ इति साध्येताम् ।}$$

$$१०. \left(\frac{-१ + \sqrt{-३}}{२} \right)^{२९} + \left(\frac{-१ - \sqrt{-३}}{२} \right)^{२९} = २ \left. \vphantom{\left(\frac{-१ + \sqrt{-३}}{२} \right)^{२९}} \right\}$$

यदि रूपस्य घनमूलानि १, व, व^२ तदा साधयन्तु ।

$$११. (१ + व)^३ - (१ + व^२)^३ = ०$$

$$१२. व^४ + २ व^६ + व^८ = १$$

$$१३. (१ - व + व^२)^३ = (१ + व - व^२)^३ = - ८$$

$$१४. व^३ + य^३ = (व + य)(व - व + व^२ य)(व^२ व + व य)$$

$$१५. (अ + व + क)(अ + व व + क व^२)(अ + व व^२ + क व)$$

$$अ^३ + व^३ + क^३ - ३ अ व क$$

—:—:—

महत्तमापवर्त्तनम्

(महत्तमगुणावयवः)

द्वयोः राश्योः बहूनां राशीनां वा तेष्वपवर्त्तनाङ्काः यैः राश्योः राशीनां वा निःशेषं विभजनं भवेत् । अपवर्त्तनाङ्केषु यो महत्तमस्तदेव महत्तमापवर्त्तनमिति नाम्ना व्यवहृत्यते तस्यानयनमपि “परस्परं भाजितयोर्ययोर्यः शेषस्तयोः स्यादपवर्त्तनं सः” इत्यनेन प्रकारेण भास्करेण कृतम् । यथा २ अ^२व, ३ अ^२व, तथा अ^२व^२ एषां राशीनां अ, अ^२, अ व, अ^२व एभिरपवर्त्तनं भवति एषां मध्ये अ^२व एव महत्तमः ।

विशेषः—कल्प्यते अ, व राशी ययोर्महत्तमापवर्त्तनम् = म तदा म इत्यस्य गुणावयवः अ, व राशयोरपि साधारणगुणावयवो भवति अस्य विलोमेन अ, व अनयोः साधारणगुणावयवः म इत्यस्यापि गुणावयवो भवति ।

बीजगणिते महत्तमापवर्त्तनमित्यस्य स्थाने महत्तमगुणावयवो वाच्यः
यतः $y^2 - अ^2$, $(य + अ)^2$ अनयोर्महत्तमगुणावयवः $= य + अ$
भवति किन्तु यदि $य = १२$, $अ = ४$ तदा राशयोर्महत्तमापवर्त्तनम् १२८
वा $= य^2 - अ^2$ भवति इदमन्तरं पदप्रघातमापकशक्तेर्विशतो भवति ।

अतो महत्तमगुणावयवानयनाय एषा रीतिर्यत्प्रथमं राशीनां सर्वगत-
गुणावयवो निष्काश्यस्तथा तत्र यदि व्यक्ताङ्को गुणकश्चेत्तदा व्यक्तीत्या-
तेषां महत्तमापवर्त्तनाङ्को ग्राह्यः सर्वेषां घातः महत्तमगुणावयवो भवति ।

उ. १. ६० अ^४ व^३ य, ७२ अ^२ व र^२ तथा ८४ अ^३ व^२ ज एषां महत्तम
गुणावयवः साध्यः ।

अत्र सर्वगतगुणावयवौ अ^२, व तथा ६०, ७२, ८४ एषां व्यक्तानां म = १२
तेनाभीष्टमुत्तरम् १२ अ^२व ।

उ. २. २ अ^२ य तथा अ य^२ - अ य र अत्र महत्तमगुणावयवः कः ?

अत्र २ अ^२य = २ अ अ य तथा अ य^२ - अ य र = अ य (य - र)
अतः सार्वत्रिकगुणावयवौ अ, य .°. अभीष्टमुत्तरम् = अ × य = अ य ।

उ. ३. ६ अ^२ - १२ अ य तथा ८ अ य - १६ य^२ अत्र महत्तमगुणावयवः कः ?

अत्र ६ अ^२ - १२ अ य = ६ अ (अ - २ य)

तथा ८ अ य - १६ य^२ = ८ य (अ - २ य) तथा ६, ८ अनयोर्मह-
त्तमापवर्त्तनम् = २ अतोऽभीष्टमुत्तरम् = २ (अ - २ य)

उ. ४. १२ अ^३ (य + १)^२ (य - २)^३ तथा

१५ अ^२ व (य + १)^३ (य - २) अत्र महत्तमगुणावयवः कः ?

अत्र साधारणगुणावयवाः अ^२, (य + १)^२, य - २ तथा व्यक्ताङ्कानां
महत्तमापवर्त्तनम् = ३ अतोऽभीष्टमुत्तरम् = ३ × अ^२ × (य + १)^२ × (य - २)
= ३ अ^२ (य + १)^२ (य - २)

उ. ५. २ अ^४य - ५ अ^३य^२ - ३ अ^२य^३ तथा

४ अ^३य^२ + १४ अ^२य^३ + ६ अ य^४

अत्र महत्तमगुणावयवः कः ?

अत्र २ अ^४य - ५ अ^३य^२ - ३ अ^२य^३

= अ^२य (२ अ^२ - ५ अ य - ३ य^२)

= अ^२य (२ अ + य) (अ - ३ य)

$$\begin{aligned}
 & \text{एवम् } ४ अ^३ य^३ + १४ अ^२ य^३ + ६ अ य^३ \\
 & = २ अ य^२ (२ अ^२ + ७ अ य + ३ य^२) \\
 & = २ अ य^२ (२ अ + य) (अ + ३ य) \\
 & \text{अतोऽभीष्टमुत्तरम्} = अ य (२ अ + य)
 \end{aligned}$$

(उ० ३४) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

(महत्तमगुणावयवः साध्यः)

१. २ अ^३ व तथा ३ अ^२ क
२. अ^२ व^३ क^३ तथा अ व^२ क^३
३. १०५ अ व^२ य तथा ८४ अ य
४. १६ म^२ न^३, ४८ म^३ न तथा ८० म^२ प
५. १२ य^२ र ज, १८ य र^३ ज^३, २७ य^२ र^२ ज^३ तथा ३३ य^२ र ज^३
६. २ अ व^२ य तथा ३ अ^२ य + ३ अ व^२ य
७. ७२ म^३ न^३ य^३ तथा ५४ म^३ न^३ य^३ - ३६ म^२ न^३ र^३
८. २ अ^२ य - २ अ व य तथा २ अ^२ य - ४ अ व य।
९. य^२ + २ क य तथा ३ अ य + ६ अ क
१०. ५ य^२ - १० य र तथा २ य ज - ४ र ज
११. य^२ र + य र^२ - य र ज तथा र^२ ज - र ज^२ + य र ज
१२. ४ अ^२ (अ - व)^२ तथा ५ अ (अ - व)^३
१३. १६ (अ + य)^२ तथा ४० (अ^२ - य^२)
१४. १० (य + १)^२ (य^२ - ४) तथा १५ (य^२ - १) (य + २)^२
१५. ६ (अ^३ + व^३) (अ - व)^३, ६ (अ^३ - व^३) (अ - व)^२
तथा १२ (अ^२ - व^२)^३
१६. ८ (य + १) (य^३ + ८) तथा ४ (य + १) (य^२ - ५ य - १४)
१७. य^२ + ५ य + ६ तथा य^२ - २ य - ८
१८. य^२ + ३ य + २ तथा य^३ + २ य^२ + ३ य + ६
१९. य^२ - य - २, य^२ + य - ६ तथा य^३ - ३ य + २
२०. २ य^२ - ५ य + २, ३ य^२ - २ य - ८ तथा ४ य^२ - ५ य - ६
२१. २० य^३ + य^२ - १ तथा २५ य^३ + ५ य^३ - य - १
२२. य^३ - (म + १) य^३ + (म + १) य - १ तथा य^३ - (न + १) य^३ +
(न + १) य - १।

नियमः १—यदि द्वयोः राश्योरेकः साधारणो गुणावयवो भवेत्तदा तयोः केनचिद्गुणित राश्योर्योगोऽन्तरं वा तेन गुणावयवेन निःशेषं विभाजितं भवेत् ।

कल्प्यते अ, व राशौ ययोः साधारणो गुणावयवः ड तदा कल्प-
नानुसारेण अ = मड, व = नड अतः पअ = मपड,

कव = नकड अतः पअ ± कव = (मप ± नक) ड

अतः ड इत्यनेन प अ ± क व विभक्तो भवति अत इदं स्पष्टं यत् ड
इत्यनेन अ + व वा अ - व विभाजितौ भवतः यतः अ ± व = ड
(म ± न) ।

नियमः २—यदि अ राशिः व राशिना विभक्तः र शेषमुत्पादयति
तदा व, र, अनयोर्महत्तमगुणावयवः अ, व अनयोरपि महत्तमगुणा-
वयवो भवति ।

अ
व अत्र कल्प्यते पूर्णालब्धिः क तदा अ = वक + र इदानीमिदं स्पष्टं
यत् व, र अनयोः प्रत्येकं साधारणो गुणावयवः वक + र वा अ एनं
निःशेषं विभाजयति अर्थात् व, र अनयोः प्रत्येकं साधारणगुणावयवः
अ तथा व राशिं निःशेषं विभाजयति ।

एवमेव पक्षान्तरानयनेन र = अ - वक अतः अ, व अनयोः प्रत्येकं
साधारणो गुणावयवः अ-वक वा र निःशेषं विभाजयति अर्थात् अ, व
इत्यनयोः प्रत्येकं साधारणगुणावयवः व तथा र राशिं विभाजयति अतः
व, र अनयोस्त एव गुणावयवः यथा अ, व इत्यनयोः अतोऽभीष्टं
सिद्धम् ।

बहुपदराश्योः महत्तमगुणावयवानयने भास्कररीतिरेव सुगमा तद्यथा—

उ. १. य^२ - ३ य + २ तथा य^३ - ४ य^२ + ६ य - ४ अत्र

य^२ - ३ य + २) य^३ - ४ य^२ + ६ य - ४ (य - १

$$\begin{array}{r} \text{य}^3 - ३ \text{य}^2 + २ \text{य} \\ - \text{य}^2 + ४ \text{य} - ४ \\ \hline - \text{य}^2 + ३ \text{य} - २ \\ \hline \text{य} - २ \end{array}$$

इदं शेषं भाजकं कृत्वा पुनन्यासः ।

$$य - २) य^२ - ३ य + २ (य - १$$

$$य^२ - २ य$$

$$- य + २$$

$$- य + २$$

$$\text{अतोऽभीष्टगुणावयवः} = य - २$$

अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. य^२ - २ य - ३ \text{ तथा } य^३ - २ य^२ - २ य - ३$$

$$२. ३ य^२ - ११ य - ४ \text{ तथा } ६ य^३ - २५ य^२ + ३$$

$$३. ६ य^३ - १६ य^२ + १३ य - २ \text{ तथा } १२ य^३ - ३२ य^२ + १६ य - २$$

$$४. य^४ + य^३ - य^२ - २ य - २ \text{ तथा } य^४ + २ य^३ - य^२ = २ य - ३$$

$$५. य^४ - ४ य^३ - ३० य^२ - २८ य + १७ \text{ तथा}$$

$$३ य^४ - ११ य^३ - ८६ य^२ - ८१ य + ४६$$

लघुतमापवर्त्यः

यस्मिन् कस्मिन्नपि राशौ ययोर्येषां वापवर्त्तनं भवेत्तयोस्तेषां वा स राशिरपवर्त्य इति । यथा २, ४, ८ एषां षोडश १६ अपवर्त्य इति । तथा ५, ७, ११ एषां ५ अ व अपवर्त्यः । तादृशा अपवर्त्याः बहवो भवन्ति परञ्च तत्र यः सर्वेभ्यो लघुरपवर्त्यः स एव लघुतमापवर्त्यः । यथा २, ४, ८ एषां ८, १६, २४, ३२, ४० इत्यादयो बहवोऽपवर्त्याः परञ्चैषु ८ एव एतेषां लघुतमापवर्त्यः यतोऽपवर्त्येषु स एव लघुतमः । इह बीजगणिते लघुतमापवर्त्यानयनाय एष एव विधिर्यत् सर्वेभ्यो राशिभ्यो गुणावयवान् संगृह्य तेभ्यो राशिस्थमहत्तमं प्रघातमापकं दत्त्वा व्यक्ताङ्काश्चेत्तदा तेषामपि पाटीरीत्या लघुतमापवर्त्यं गृहीत्वा सर्वेषां घात एव लघुतमापवर्त्यः । यथा ८ य^३ र, १२ र^२ ज तथा १६ य ज^३ एषां लघुतमापवर्त्यसाधने प्रथममत्रय, र, ज अव्यक्ताङ्काः तत्र महत्तमाः घातमापकाः क्रमशः २, २ तथा ३ । तथा व्यक्तानां ८, १२, १६ एषां लघुतमापवर्त्यः ४८ अतः सर्वेषां घातः ४८ य^३ र^२ ज^३ लघुतमापवर्त्यः ।

उ० १. ४ अ^२ य^२, ६ (अ^२ + अ य) तथा ८ (अ य - य^२) एषां लघुतमापवर्त्यः कः ?

अत्र $६ (अ^२ + अ य) = ६ अ (अ + य)$, तथा $८ (अ य - य^२) = ८ य (अ - य)$ अतोऽत्र गुणावयवाः अ, य, अ + य, अ - य येषां क्रमतो महत्तमाः प्रघातमापकाः २, २, १ तथा १ तथा व्यक्ताङ्कानां लघुतमापवर्त्यः २४ अतोऽभीष्टो लघुतमापवर्त्यः $= २४ अ^२ य^२ (अ + य) (अ - य) = २४ अ^२ य^२ (अ^२ - य^२)$

(उ० ३५) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

(निम्नस्थानां लघुतमापवर्त्यः कः)

१. २ अ^२ य^२, अ य^३ तथा अ^३ य २. अ व^३, २० तथा १५ अ^२ य^२
३. १२, ३ अ^२, ६ अ य तथा ८ य^२
४. २ अ^३ य, ३ अ^२ य^२, ४ अ य^३ तथा ५ य^४
५. य^२ + य र तथा र^२ + य र
६. १५ र (अ - य) तथा २० (अ^२ य - य^३)
७. अ^३ + य^३ तथा अ^२ + अ^२ य^२ + य^४
८. १४ (य^३ - र^३) तथा २१ (य^३ + य^२ र + य र^२)
९. २ (य^३ - य^२ र), ३ (य र^२ + र^३) तथा ४ (य^३ र - य र^३)
१०. अ य^२ - य^३ तथा अ य^२ - अ^३
११. ६ (य^२ + य र), ८ (य र - र^२) तथा १० (य^२ - र^२)
१२. ३ (य + र) (य + २ र), १५ (य + २ र) (य + ३ र) तथा २४ (य + र) (य + ३ र)
१३. य + १, य - १, य^२ + य + १ तथा य^२ - य + १
१४. य^२ - र^२, ४ (य + र)^२, ६ (य - र)^२ तथा १५ (य^३ + र^३)
१५. य^३ (य - र)^२, र^२ (य + र)^२, य^४ - य र^३, य^३ र + र^४ तथा य^२ र^३ - र^५

नि० १ बहुपदराशयोर्घातः तयोर्महत्तमगुणावयवेन भक्तः लघुतमापवर्त्यो भवति । कल्प्यते अ, व राशी ययोर्महत्तमगुणावयवः = म तथा तयोर्लघुतमापवर्त्यश्च = ल, तथा कल्प्यते $\frac{अ}{म} = अ', \frac{व}{म} = व'$ अतः $अ = म अ', व = म व'$ ।

अत्र यतः अ, व अनयोर्महत्तमगुणावयवः म तेन अ', व' अनयोः साधारणगुणावयवो न भवितुमर्हति अतः अ, व अनयोर्लघुतमा-

पवर्त्यः अर्थात् म अ', म व' इत्यनयोर्लघुतमापवर्त्यः = म अ' व'
 = $\frac{म अ' \cdot म व'}{म} = \frac{अ \cdot व}{म}$ इत्युपपन्नम् ।

अतः ल • म = अ • व अतः महत्तमगुणावयव लघुतमापवर्त्ययो-
 र्घातः राश्योर्घातसमो भवति ।

उ. ६ य^३ - ५ य^२ - २२ य + २४ तथा ६ य^३ - २३ य^२ + २९ य - १२
 अनयोर्लघुतमापवर्त्यः कः ?

पूर्वसाधितप्रकारेण राश्योर्महत्तमगुणावयवः = ६ य^२ - १७ य + १२

तथा (६ य^३ - ५ य^२ - २२ य + २४) ÷ म • गु • = य + २

(६ य^३ - २३ य^२ + २९ य - १२) ÷ म • गु = य - १

अतोऽभीष्टलघुतमापवर्त्यः = (६ य^२ - १७ य + १२) (य + २) (य - १)
 = (२ य - ३) (३ य - ४) (य + २) (य - १)

(उ० ३६) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

लघुतमापवर्त्यः कः

१. २ य^२ - १३ य + २१ तथा ३ य^२ - २३ य + ४२

२. य^३ - ३ य^२ + ३ य - १ तथा य^३ - य^२ - य + १

३. ३ य^२ - ५ य + २ र^२ तथा ४ य^३ - ४ य^२ र - य र^२ + र^३

४. म य^२ - ६ म य + ५ म तथा न य^२ + ५ न य - ६ न

५. य^३ + ३ य^२ - ४ य - १२ तथा य^३ + २ य^२ - य - २

६. य^४ - ४ य^३ + २ य^२ + ४ य - १५ तथा य^४ - ४ य^३ + ३ य^२ + २ य - १२

७. २ य^४ + ४ य^३ - ६ य^२ - २ य + ४ न तथा ६ य^४ + ११ य^३ - ४३ य^२ - ५६ य + २०

नियमः २ । द्वयोः राश्योः प्रत्येकं साधारणापवर्त्यः तयोर्लघुतमा-
 पवर्त्यस्याप्यपवर्त्ति भवेत् ।

कल्प्यते राशी क, व तयोर्लघुतमापवर्त्यश्च = ल तथा कल्प्यते
 राश्योः साधारणापवर्त्यः = अ अतः अ, ल इत्यस्यापि अपवर्त्यः
 स्यात्, यद्येवं न तदा कल्प्यते अ = ल • गु + शे . ∴ शे = अ - ल • गु
 अत्र अ तथा ल द्वावपि कल्पनया क, व राशिभ्यां निःशेषमपवर्त्तितौ
 भवतः अतो राशिभ्यां ल • गु तथा अ - ल गु यद्वा शे अपवर्त्तितौ
 भवति परन्तु शेषः लघुतमापवर्त्याद्धीनस्तेनेयं कल्पना असंभाव्या
 अतस्तत्र न शेषस्तेन अ, लघुतमापवर्त्यस्याप्यपवर्त्यः सिद्धः ।

बहूनां बहुपदराशीनां लघुतमापवर्त्यसाधने नियमः—

द्वयोः राश्योर्लघुतमापवर्त्तनं संसाध्य तस्य तथा तृतीयराशेयो लघु-
तमापवर्त्यः स एवाभीष्टलघुतमापवर्त्यः स्यात् एवमग्रे ।

अत्र युक्तिः । कल्प्यते राशयः अ, व, क तथा अ, व इत्यनयोः
लघुतमापवर्त्यश्च कल्प्यते = ल । इदानीं ल इत्यस्य प्रत्येकमपवर्त्यः अ, व
अनयोरप्यपवर्त्यः अतः ल, क अनयोरपि प्रत्येकमपवर्त्यः अ, व, क
एतेषामप्यपवर्त्यः तेन ल, क अनयोर्लघुतमापवर्त्यः अ, व, क एतेषा-
मपि लघुतमापवर्त्यः सिद्धः । एवं चतुरादीनां राशीनामपि लघुतमा-
पवर्त्यः साध्यः ।

उ. ६ य^२ + ५ य - ६, १२ य^२ + ७ य - १० तथा ४ य^२ + य - ५ एतेषां
लघुतमापवर्त्यः साध्यः

पूर्वोक्तयुक्त्या ६ य^२ + ५ य - ६ तथा १२ य^२ + ७ य - १० अनयोर्लघुतमा-
पवर्त्यः = (३ य - २) (२ य + ३) (४ य + ५) अतोऽभीष्टलघुतमापवर्त्यः
साधितलघुतमापवर्त्यस्य तथा ४ य^२ + य - ५ अनयोर्लघुतमापवर्त्यो भवति ।

$$\begin{aligned} \text{तेनाभीष्टलघुतमापवर्त्यः} &= (३ य - २) (२ य + ३) (४ य + ५) (य - १) \\ &= २४ य^४ + २६ य^३ - ४९ य^२ - ३ य + ३० \end{aligned}$$

(उ० ३७) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. २ य^२ - ७ य + ३, ४ य^२ - ७ य - ११ तथा ८ य^२ + ६ य - ५
२. ३ य^२ - १४ य - ८०, ३ य^२ + १७ य - ६० तथा य^३ - ७ य^२ - ८० य + ५७६
३. १ + ४ य + ८ य^२ + ८ य^३, १ + ४ य + ४ य^२ - १६ य^४ तथा १ + २ य - ८ य^३ - १६ य^४
४. ६ य^४ - २८ य^२ + ३, २७ य^४ - १२ य^२ + १, २७ य^४ + ६ य^२ - १
तथा य^४ - ६ य^२ + ६

सच्छेदकराशिगणितम्

सच्छेदकराशौ भाज्ये भाजके वा ऋणत्वं चेत् फलमृणमेव,
द्वयोर्ऋणत्वे फलं धनमेव यथा $\frac{-अ}{व} = -\frac{अ}{व}$, $\frac{अ}{-व} = -\frac{अ}{व}$ तथा
 $\frac{-अ}{-व} = \frac{अ}{व}$ ।

लघूकरणम्

सच्छेदकराशौ सति संभवे भाज्यभाजकयोर्महत्तमगुणावयवेन तौ
विभज्य स्वरूपस्य लघूकरणं कार्यम् ।

उ० १ $\frac{५४ अ^३ व क}{२६ अ व^३ क}$ अत्र लघूकरणमपेक्षितम्

$$\text{निर्दिष्टस्वरूपम्} = \frac{१८ अ व क ३ अ^२}{१८ अ व क २ व^२} = \frac{३ अ^२}{२ व^२}$$

उ० २. $\frac{६ अ व^३ (अ^२ + अ व)}{८ अ^२ व (अ^२ व - व^३)}$ अत्र लघूकरणमपेक्षितम्

$$\begin{aligned} \text{नि० स्व०} &= \frac{६ अ^२ व^३ (अ + व)}{८ अ^२ व^२ (अ^२ - व^२)} = \frac{६ अ^२ व^३ (अ + व)}{८ अ^२ व^२ (अ + व) (अ - व)} \\ &= \frac{३ व}{४ (अ - व)} \end{aligned}$$

उ० ३. $\frac{२ य^२ - य - ६}{३ य^२ - ८ य + ४}$ लघूक्रियताम्

$$\text{नि० स्व०} = \frac{(य - २)(२ य + ३)}{(य - २)(३ य - २)} = \frac{२ य + ३}{३ य - २}$$

उ० ४. $\frac{य^३ - ३९ य + ७०}{य^३ + १४ य^२ + ३९ य - ७०}$ लघूक्रियताम् ।

अत्र प्रथमं भाज्यभाजकयोर्महत्तमगुणावयवः साधनीयः सचात्र य + ७

ततः $(य^३ - ३९ य + ७०) \div (य + ७) = य^२ - ७ य + १०$

$(य^३ + १४ य^२ + ३९ य - ७०) \div (य + ७) = य^२ + ७ य - १०$

$$\therefore \text{सि० स्व०} = \frac{य^२ - ७ य + १०}{य^२ + ७ य - १०}$$

उ० ५. $\frac{२ अ^४ - ५ अ^२ व + ३ अ^२ व^२ - ५ अ व^२ - ३ व^४}{३ अ^४ - ७ अ^३ व + अ^२ व^२ - ३ अ व^३ - २ व^४}$ लघूक्रियताम्

अत्रापि भाज्यभाजकयोर्महत्तमगुणावयवः = $अ^२ - २ अ व - व^२$

∴ भाज्यः ÷ ($अ^२ - २ अ व - व^२$) = $२ अ^२ - अ व + ३ व^२$

भाजकः ÷ ($अ^२ - २ अ व - व^२$) = $३ अ^२ - अ व + २ व^२$

∴ सि० स्वरूपम् = $\frac{२ अ^२ - अ व + ३ व^२}{३ अ^२ - अ व + २ व^२}$

(उ० ३८) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

निम्नस्थराशीनां लघूकरणमपेक्षितम्

१. $\frac{२८ अ^३ व^२ य^४}{४२ अ व य^३ र}$ २. $\frac{८ म^२ - २ न^२}{८ म + ४ अ न}$ ३. $\frac{स क + क^२}{अ^२ क^२ - य^२ अ^२}$

४. $\frac{२४ अ^२ य^२ - १६ अ य^३}{२४ अ^२ य^२ - ५४ अ^४}$ ५. $\frac{अ^२ + व^२ - क^२ + २ अ व}{अ^२ - व^२ - क^२ + २ व क}$

६. $\frac{६ अ^२ + ५ अ क - ६ य^२}{६ अ^२ + १३ अ य + ६ य^२}$

७. $\frac{(अ + व) य^२ - (२ अ + व) व य + अ व^२}{(अ - व) य^२ - (२ अ - व) व य + अ व^२}$

८. $\frac{अ^३ + २ अ^२ व - अ व^२ - २ व^३}{अ^३ - ३ अ व^२ + २ व^३}$ ९. $\frac{य^३ + २ य^२ - २ य + ३}{य^३ - १३ य - १२}$

१०. $\frac{१८ य^३ - ११ अ^२ य - २ अ^३}{१८ य^२ - ६ अ य - १२ अ^२}$ ११. $\frac{४ य^४ + ११ य^२ + १५}{४ य^४ - ६ य^२ + ३० य - २५}$

१२. $\frac{३ अ^५ व - २७ अ^४ व^२ + ७८ अ^३ व^३ - ७२ अ^२ व^४}{२ अ^४ व^२ + १० अ^३ व^३ - ४ अ^२ व^४ - ४८ अ व^५}$

सच्छेदकराशीनां योगेऽन्तरे वा कर्त्तव्ये भाजकाः तेषां लघुतमा-

पवर्त्ये परिणेतव्याः यथा $\frac{अ}{अ-य} + \frac{३ अ}{अ+य} - \frac{२ अ य}{अ^२-य^२}$ अस्य स्पष्टीकरणे

भाजकानां

लघुतमापवर्त्यः = $अ^२ - य^२$

अतोऽभीष्टमानम् = $\frac{अ (अ + य)}{अ^२ - य^२} + \frac{३ अ (अ - य)}{अ^२ - य^२} - \frac{२ अ य}{अ^२ - य^२}$

= $\frac{अ^२ + अ य + ३ अ^२ - ३ अ य - २ अ य}{अ^२ - य^२} = \frac{४ अ^२ - ४ अ य}{अ^२ - य^२}$

$$= \frac{४ अ (अ - य)}{अ^२ - य^२} = \frac{४ अ}{अ + य}$$

$$उ० २. \frac{य}{३ (अ-१)} + \frac{५ य}{६ (अ+१)} + \frac{अय-१}{४ (१-अ^२)}$$

अत्रान्तिखण्डे चिह्नव्यत्यये कृते

$$= \frac{य}{३ (अ-१)} + \frac{५ य}{६ (अ+१)} + \frac{१-अय}{४ (अ^२-१)}$$

$$\text{भाजकानां लघुतमापवर्त्यः} = १२ (अ^२-१)$$

$$\begin{aligned} \text{अतोऽभीष्टं मानम्} &= \frac{४ य (अ+१)}{१२ (अ^२-१)} + \frac{१० य (अ-१)}{१२ (अ^२-१)} + \frac{३ (१-अय)}{१२ (अ^२-१)} \\ &= \frac{११ अ य - ६ य + ३}{१२ (अ^२-१)} \end{aligned}$$

$$उ० ३. \frac{१}{(व-क)(क-अ)} + \frac{१}{(क-अ)(अ-व)} + \frac{१}{(अ-व)(व-क)}$$

अत्र हराणां लघुतमापवर्त्यः (व-क)(क-अ)(अ-व)

$$\text{अतोऽभीष्टं स्वरूपम्} = \frac{(अ-व) + (व-क) + (क-अ)}{(व-क)(क-अ)(अ-व)} = \frac{०}{हर} = ०$$

(उ० ३९) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

(स्पष्टीक्रियताम्)

$$१. \frac{य-२}{य२} + \frac{२-अ}{२.अ} + \frac{अ-य}{अय} \quad २. \frac{३अय}{७} + \frac{१३वर}{१४} - \frac{२अय+१५वर}{२१}$$

$$३. \frac{म}{म-न} + \frac{न}{म+न} + \frac{२मन}{न^२-म^२} \quad ४. \frac{१}{य-१} - \frac{३}{य+१} + \frac{२(य-२)}{य^२+१}$$

$$५. \frac{य+अ}{य-अ} + \frac{य-अ}{य+अ} + २ \frac{य^२-अ^२}{य^२+अ^२}$$

$$६. \frac{अ}{व} - \frac{(अ^२-व^२)य}{व^२} + \frac{अ(अ^२-व^२)य^२}{व^२(व+अय)}$$

$$७. \frac{१}{२(अ-व)} + \frac{१}{२(अ+व)} + \frac{अ}{अ^२+व^२} - \frac{अ^३}{अ^४-व^४}$$

$$८. \frac{अ+क}{(अ-व)(य-अ)} - \frac{व+क}{(अ-व)(य-व)}$$

$$१०. \frac{१+२य}{(३-य)(१+य)} + \frac{७}{(२+य)(१-३य)} + \frac{य}{(१+य)(२+य)}$$

$$१०. \frac{१}{(य+१)(य+२)} - \frac{१}{(य+१)(य+२)(य+३)}$$

अत्र विशिष्टप्रश्नाः

$$उ० १. \frac{अ^२}{(अ-व)(अ-क)} + \frac{व^२}{(व-क)(व-अ)} + \frac{क^२}{(क-अ)(क-व)}$$

अत्र स्पष्टीकरणे पारिधिकनियमव्यवस्था संरक्षया अर्थात् अ परं व ततः क ततः पुनः अ एवं वर्णव्यवस्था हरस्वरूपे यथा भवेत्तथा यत्नः कर्तव्यः अतोऽत्र चिह्नव्यत्यासे कृते तदेवेष्टस्वरूपम्

$$= \frac{अ^२}{-(अ-व)(क-अ)} + \frac{व^२}{-(व-क)(अ-व)} + \frac{क^२}{-(क-अ)(व-क)}$$

$$\text{अत्र हराणां लघुतमापवर्त्यः} = -(अ-व)(व-क)(क-अ)$$

$$\text{अतो निर्दिष्टस्वरूपम्} = \frac{अ^२(व-क) + व^२(क-अ) + क^२(अ-व)}{-(अ-व)(व-क)(क-अ)}$$

$$= \frac{-(व-क)(क-अ)(अ-व)}{-(अ-व)(व-क)(क-अ)} = १$$

(१७९ पृष्ठस्थसिद्धान्तेन)

$$उ० १. \text{ यदि } य = \frac{४अव}{अ+व} \text{ तदा } \frac{य+२अ}{य-२अ} + \frac{य+२व}{य-२व} \text{ अस्य किं मानम् ?}$$

$$\text{नि० स्वं} = \frac{(य+२अ)(य-२व) + (य-२अ)(य+२व)}{(य-२अ)(य-२व)}$$

$$= \frac{य^२ + २(अ-व)य - ४अव + य^२ - २(अ-व)य - ४अव}{य^२ - २(अ+व)य + ४अव}$$

$$= \frac{२(य^२ - ४अव)}{य^२ - २(अ+व)य + ४अव} = \frac{२\{य^२ - (अ+व)य\}}{य^२ - २(अ+व)य + (अ+व)य}$$

$$\text{यतः } (अ+व)य = ४अव$$

$$= \frac{२\{य^२ - (अ+व)य\}}{य^२ - (अ+व)य} = २$$

$$\text{उ० ३.} \frac{(अ-व)^2}{(व-क)(क-अ)} + \frac{(व-क)^2}{(क-अ)(अ-व)} + \frac{(क-अ)^2}{(अ-व)(व-क)} \text{ लघूक्रियताम्}$$

$$\text{अत्र हराणां लघुतमापवर्यः} = (व-क)(क-अ)(अ-व)$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{नि० स्व०} &= \frac{(अ-व)^3 + (व-क)^3 + (क-अ)^3}{(व-क)(क-अ)(अ-व)} \text{ गुणावयवसाधनप्रक्रियया} \\ &= \frac{३(व-क)(क-अ)(अ-व)}{(व-क)(क-अ)(अ-व)} = ३. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{उ० ४. यदि } २ \text{ स} &= अ + व + क \text{ तदा } १ - \left\{ \frac{अ^2 + व^2 - क^2}{२ अ व} \right\}^2 \\ &= \frac{४ \text{ स } (स-अ)(स-व)(स-क)}{अ^२ व^२} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{नि० स्व०} &= \left\{ १ + \frac{अ^2 + व^2 - क^2}{२ अ व} \right\} \left\{ १ - \frac{अ^2 + व^2 - क^2}{२ अ व} \right\} \\ &= \frac{२ अ व + अ^2 + व^2 - क^2}{२ अ व} \times \frac{२ अ व - अ^2 - व^2 + क^2}{२ अ व} \\ &= \frac{(अ + व)^2 - क^2}{२ अ व} \times \frac{क^2 - (अ-व)^2}{२ अ व} \\ &= \frac{(अ + व + क)(अ + व - क)}{२ अ व} \times \frac{(क + अ-व)(क - अ + व)}{२ अ व} \\ &= \frac{(अ + व + क)(व + क - अ)(क + अ - व)(अ + व - क)}{४ अ^२ व^२} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{पुनः } २ \text{ स} &= अ + व + क, २ \text{ स} - २ \text{ अ} = अ + व + क - २ \text{ अ, वा } २(स-अ) \\ &= व + क - अ, \text{ एवमेव } २(स-व) = क + अ - व \text{ तथा } २(स-क) = अ + व - क, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{नि० स्व०} &= \frac{२ \text{ स } २(स-अ) २(स-व) २(स-क)}{४ अ^२ व^२} \\ &= \frac{४ \text{ स } (स-अ)(स-व)(स-क)}{अ^२ व^२} \end{aligned}$$

(उ० ४०) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

(स्पष्टीक्रियताम्)

$$१. \frac{य + अ}{(अ-व)(अ-क)} + \frac{य + व}{(व-क)(व-अ)} + \frac{य + क}{(क-अ)(क-व)}$$

$$२. \frac{अ - व}{(व + क)(क + अ)} + \frac{व - क}{(क + अ)(अ + व)} + \frac{क - अ}{(अ + व)(व + क)}$$

$$३. \frac{य^२ - रज}{(य + र)(य + ज)} + \frac{र^२ - जय}{(र + ज)(र + य)} + \frac{ज^२ - यर}{(ज + य)(ज + र)}$$

$$४. \frac{य^२ - रज}{(य - र)(य - ज)} + \frac{र^२ + जय}{(र + ज)(र - य)} + \frac{ज^२ + वर}{(ज - य)(ज + र)}$$

$$५. \frac{य + र}{(य^२ - रज)(र^२ - जय)} + \frac{र + ज}{(र^२ - जय)(ज^२ - यर)} + \frac{ज + य}{(ज^२ - यर)(य^२ - रज)}$$

$$६. \frac{य^२ + \left(\frac{अ}{व} + \frac{व}{अ}\right) यर + र^२}{य^२ + \left(\frac{अ}{व} - \frac{व}{अ}\right) यर - र^२}$$

$$७. \text{यदा } य = \frac{अ^२}{अ + व} \text{ तदा } \frac{य - अ}{व} + \frac{य - व}{अ} \text{ अस्य मानं किम् ।}$$

$$८. \text{यदा } य = \frac{अ - व}{अ + व} \text{ तथा } र = \frac{अ + व}{अ - व} \text{ तदा } \frac{य^२ - र^२ + य}{र^२ - य^२ + र} \text{ अस्य मानं किम् ।}$$

$$९. \frac{य^२ + १}{य^२ - १} - १ \div \left(\frac{२य}{२य - १} - \frac{२}{२ - य} \right)$$

$$१०. \frac{(१ - अ व)^२ + (अ + व - २)(अ + व - २ अ व)}{(१ + अ व)^२ - (अ - व)^२} \left. \vphantom{\frac{(१ - अ व)^२ + (अ + व - २)(अ + व - २ अ व)}{(१ + अ व)^२ - (अ - व)^२}} \right\} \text{स्पष्टी कियेताम् ।}$$

निष्पत्तिः सम्बन्धो वा

एकः पदार्थस्तत्सजातीयद्वितीयपदार्थेन यद्गुणितः स एव सम्बन्धो निष्पत्तिर्वा ।

यथा अ, व अनयोः सम्बन्धः $\frac{अ}{व}$, वा अ : व एवं लिख्यते ।

यदि हरभाज्यौ केनचिदेकेन पदार्थेन गुण्यते विभज्यते वा तथापि सम्बन्धः अविकृत एव तिष्ठति ।

$$\text{यथा } \frac{अ}{व} = \frac{अम}{वम} = \frac{अ \div म}{व \div म}$$

उ० १. यदि $५ य + २ र = ८ र - ३ य$ अत्र $य : र$ सम्बन्धः क इति प्रश्ने ।

$$\text{पक्षान्तरानयनेन } ८ य = ६ र \quad \therefore \frac{य}{र} = \frac{६}{८} = \frac{३}{४}$$

उ० २. यदि $\frac{य}{र} = \frac{२}{३}$ तदा $६ य - र : ३ य + २ र$ अत्र $कः$ सम्बन्धः ।

अत्र हरभाज्यौ यदि क अनेन गुण्यते तदा $य = २ क, र = ३ क$ ।

$$\therefore \frac{६ य - र}{३ य + २ र} = \frac{१२ क - ३ क}{६ क + ६ क} = \frac{९ क}{१२ क} = \frac{३}{४}$$

$$\text{अथवा } \frac{६ य - र}{३ य + २ र} = \frac{६ \left(\frac{य}{र} \right) - १}{३ \left(\frac{य}{र} \right) + २} = \frac{६ \times \frac{२}{३} - १}{३ \times \frac{२}{३} + २} = \frac{३}{४}$$

उ० ३. यदि $२ य^२ - ११ य र + १५ र^२ = ०$ तदा $य : र$ सम्बन्धः कः

$$\text{पक्षौ } र^२ \text{ विभज्य जातौ } २ \frac{य^२}{र^२} - ११ \frac{य}{र} + १५ = ०$$

$$\text{वा } २ क^२ - ११ क + १५ = ० \text{ यदि } \frac{य}{र} = क$$

$$\text{अर्थात् } (क - ३)(२ क - ५) = ०,$$

$$\therefore क = ३ \text{ अथवा } क = \frac{५}{२}$$

$$\text{अतोऽभीष्टसंबन्धः } = ३ : १ \text{ वा } ५ : २$$

उ० ४. $५ : ७$ अत्र तादृशी संख्या का यस्याः योजनेन स एव संबन्धः

$$= १३ : १४ \text{ भवति, कल्प्यतामभीष्टसंख्या य}$$

$$\text{तदा } \frac{५ + य}{७ + य} = \frac{१३}{१४}; \text{ अस्मात् } य = २१$$

उ० ५. $२ : ३$ एतत्सम्बन्धिन्ये द्वे संख्येऽन्वेष्टव्ये ययोर्वर्गयोगः १०५३ भवेत्

$$\text{कल्प्यतां संख्ये य, र } \therefore \frac{य}{र} = \frac{२}{३}, \text{ वा } य = २ क, र = ३ क$$

$$\text{समीकरणेन } य^२ + र^२ = १०५३, \text{ अर्थात् } (२ क)^२ + (३ क)^२ = १०५३$$

$$\text{अस्मात् } १३ क^२ = १०५३ \text{ वा } क = ९$$

$$\text{अतोऽभीष्टसंख्ये य } = २ क = १८, र = ३ क = २७$$

उ० ४१ अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. यदि $७ य - ३ र = २४ र - य$ तदा य, र अनयोः संबन्धः कः ?
२. यदि $\frac{४ अ - ३}{४ (व - १)} = \frac{अ + ६}{व + १२}$ तदा अ : व संबन्धः कः ।
३. यदि $(य + २)^२ = अ (य - २)^२$ तदा य : र संबन्धः कः ।
४. यदि य : र = म : न तदा $३ र = य : २ य + २$ संबन्धः कः ।
५. यदि $१२ य^२ - ७ य र = १२ र^२$, तदा य : र संबन्धः कः ।
६. यदि $११ : १८$ अत्र काचित्संख्या योज्यते तदा संबन्धः २ : ३ भवति तादृशी संख्या का ?
७. १३५ अस्व तथा आगद्वयं कर्त्तव्यं येन आगद्वयोः संबन्धः ४ : ५ तुल्यो भवेत् ।
८. ५ : ७ एतत्संबन्धस्य संख्येऽन्वेष्टव्ये ययोर्वर्गयोगः ११८४ तुल्यो भवेत् ।
९. ३ : ४ एतत्संबन्धस्य संख्याद्वयं गवेषितव्यं ययोर्वर्गान्तरं २५२ तुल्यं भवेत् ।

नि० १. यदि चत्वारो राशयः सम्बन्धिनो भवेयुस्तदा आद्यान्त्योर्घातः द्वितीयतृतीयराशयोर्घाततुल्यो भवेत् । कल्प्यन्ते राशयः अ, व, क, ड तदा अ : व = क : ड अर्थात् $\frac{अ}{व} = \frac{क}{ड}$ पक्षौ व ड अनेन गुण्यते तदा अ ड = व क

नि० २. यदि अ, व, क, ड संबन्धिनस्तदा अ + व : व = क + ड : ड यतः अ : व = क : ड वा $\frac{अ}{व} = \frac{क}{ड}$

$$\therefore \frac{अ}{व} + १ = \frac{क}{ड} + १ \text{ वा, } \frac{अ + व}{व} = \frac{क + ड}{ड}$$

अर्थात् अ + व : व = क + ड : ड इयं योगनिष्पत्तिसंज्ञया व्यवहियते ।

नि० ३. यदि अ : व = क : ड तदा अ - व : व = क - ड : ड यतः $\frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} \therefore \frac{अ}{व} - १ = \frac{क}{ड} - १$ वा, $\frac{अ - व}{व} = \frac{क - ड}{ड}$

यद्वा अ - व : व = क - ड : ड इयमन्तरनिष्पत्तिसंज्ञया व्यवहियते ।

नि० ४. यदि अ : व = क : ड तदा अ + व : अ - व = क + ड : क - ड अत्र योगनिष्पत्त्या $\frac{अ + व}{व} = \frac{क + ड}{ड}$ तथान्तरनिष्पत्त्या $\frac{अ - व}{व} = \frac{क - ड}{ड}$

$$\therefore \frac{अ + व}{अ - व} = \frac{क + ड}{क - ड} \text{ इयं योगान्तरनिष्पत्तिसंज्ञया व्यवहियते ।}$$

अथवा कल्प्यते $\frac{अ}{व} = च$, $\therefore अ = च व$, एवं $क = च ड$

$$\therefore \frac{अ + व}{अ - व} = \frac{च व + व}{च व - व} = \frac{व (च + १)}{व (च - १)} = \frac{च + १}{च - १} \dots (१)$$

$$\text{तथा } \frac{क + ड}{क - ड} = \frac{च ड + ड}{च ड - ड} = \frac{ड (च + १)}{ड (च - १)} = \frac{च + १}{च - १} \dots (२)$$

$$\therefore (१), (२) \text{ आभ्यां } \frac{अ + व}{अ - व} = \frac{क + ड}{क - ड}$$

विलोमनिष्पत्त्या निम्नस्था अपि नियमाः सिद्धा भवन्ति एतेऽध्यसनीयाः

१. यदि $अ : व = क : ड$ तदा $अ : अ + व = क : क + ड$

२. यदि $अ : व = क : ड$ तदा $अ : अ - व = क : क - ड$

३. यदि $अ : व = क : ड$ तथा $म : न = प : फ$ तथा $अ म : व न = क प : ड फ$

उ० १. यदि वस्यचित् संबंधस्य द्वितीयादित्रयो राशयः ४, ५ तथा ६ तदा प्रथमराशिः कः ? कल्प्यते प्रथमराशिः = या तदा $यः ४ = ५ : ६$ अस्मात् $६ य = ४ \times ५$, वा $य = ३\frac{१}{३}$

उ० २. १०, १२, १५ एषु राशिषु चतुर्थसंबन्धी कः ? कल्प्यते चतुर्थसंबन्धी = य, तदा $१० : १२ = १५ : य$ यस्मात् $१० य = १८०$, वा $य = १८$

उ० ३. ३, ४, १५, १८ आसु संख्यासु काचित्तादृशी संख्या योज्या येन ताः संबन्धिन्यो भवेयुः, कल्प्यते तादृशी संख्या य

$$\text{तदा } \frac{३ + य}{४ + य} = \frac{१५ + य}{१२ + य} \text{ यस्मात् } य = ३$$

उ० ४. यदि $२ य + ३ र : २ य - ३ र = २३ : ५$ तदा $य : र$ तथा

$४ य - ५ र : ४ य + ५ र$ सम्बन्धौ कौ ?

$$\text{प्रश्नोक्त्या } \frac{२ य + ३ र}{२ य - ३ र} = \frac{२३}{५}$$

$$\therefore \text{योगान्तरनिष्पत्त्या } \frac{(२ य + ३ र) + (२ य - ३ र)}{(२ य + ३ र) - (२ य - ३ र)} = \frac{२३ + ५}{२३ - ५}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{२ य}{३ र} = \frac{१४}{९} \text{ वा } \frac{य}{र} = \frac{७}{३}$$

$$\text{पुनः } \frac{य}{र} = \frac{७}{३} \therefore \frac{४ य}{५ र} = \frac{४}{५} \times \frac{७}{३} = \frac{४}{५} - \frac{७}{३} \text{ अतः } \frac{४ य}{५ र} = \frac{२८}{१५}$$

$$\text{अतः } \frac{४य + ५र}{४य - ५र} = \frac{२८ + १५}{२८ - १५} = \frac{४३}{१३} \text{ योगान्तरनिष्पत्त्या}$$

$$\therefore \frac{४य - ५र}{४य + ५र} = \frac{१३}{४३} \text{ विलोमनिष्पत्त्या}$$

$$\text{उ० ५. } \frac{य - ३}{२} : \frac{२य + १}{३} = १ : ६ \text{ अत्र य मानं किम् ।}$$

आद्यन्तयोर्घातो मध्यघाततुल्यो भवेत् ।

$$\frac{य - ३}{२} \times ६ = \frac{२य + १}{३} \times १$$

$$\therefore ९य - २७ = २य + १ \therefore य = ४ ।$$

(उ० ४२) अध्यासार्थं प्रश्नाः

१. यदि कस्यापि संवन्धस्य प्रथम द्वितीय चतुर्थराशयः २, ३ तथा ६ तदा तृतीयराशिः कः ?
२. $व + य^२$, $अ - अय$ तथा $य^२ - १$ अत्र चतुर्थ संवन्धः कः ?
३. ३, ५, ७, १० आसु संख्यासु का संख्या योज्या येन ताः सम्वन्धिन्यो भवन्ति ।
४. ८, १३, १८, २३ आसु का संख्याऽपनेया येन ताः निष्पत्तिकाः भवन्ति ।
५. यदि $अय + वर$: $अय - वर$ = $म$: १ तदा $य$: $र$ संवन्धः कः
६. यदि $७य - ३र$: $७य + ३र$ = १३ : ४३ तदा $८य + ६र$: $८य - ६र$
७. यदि $(अ + व + क + ड)$ $(अ - व - क + ड)$
= $(अ - व + क - ड)$ $(अ + व - क - ड)$ तदा
अ, व, क, ड निष्पत्तिकाः इति प्रदर्शयताम्

$$\text{८. } \frac{१० + य}{५} : \frac{४य - ६}{७} = १४ : ५ \text{ अत्र य मानं किम्}$$

$$\text{९. } \frac{१० - ४य}{४} : \frac{१५ + २य}{३} - २य = ५ : ४ \text{ अत्रापि यमानं किम्}$$

$$\text{उ० १. यदि अः व = कः ड तदा म अ + न कः प अ + कु क = म व + न डः प व + कु ड}$$

$$\text{कल्प्यतां } \frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} = च \text{ अतः अ = च व, क = च ड (१)}$$

$$\text{इदानीं } \frac{मअ + नक}{पअ + कुक} = \frac{मचव + नचड}{पचव + कुचड} \text{ (१) अस्मात्}$$

$$\text{उ० २. यदि अः व = कः ड तदा अः क = } \sqrt[३]{मअ^३ + नव^३} : \sqrt[३]{मक^३ + नड^३}$$

$$\text{कल्प्यतां } \frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} = च, \text{ तदा } अ = च व, क = च ड$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{मअ^3 + नव^3}}{\sqrt[3]{मक^3 + नड^3}} = \frac{\sqrt[3]{मच^3 व^3 + नव^3}}{\sqrt[3]{मच^3 ड^3 + नड^3}} = \frac{व \sqrt[3]{मच^3 + न}}{ड \sqrt[3]{मक^3 + च}} = \frac{व}{ड} = \frac{अ}{क}$$

$$\text{उ० ३. यदि } \frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} \text{ तदा } \frac{(अ+क)^3}{(व+ड)^3} = \frac{अ(अ-क)^2}{व(व-ड)^2} \text{ इति साध्यताम्}$$

$$\text{कल्प्यतां } \frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} = च, \text{ तदा } अ = च व, क = च ड,$$

$$\text{अतः } \frac{(अ+क)^3}{(व+ड)^3} = \frac{(चव+चड)^3}{(व+ड)^3} = \frac{च^3 (व+ड)^3}{(व+ड)^3} = च^3,$$

$$\text{तथा } \frac{अ(अ-क)^2}{व(व-ड)^2} = \frac{चव(चव-चड)^2}{व(व-ड)^2} = \frac{च^3 व(व-ड)^2}{व(व-ड)^2} = च^3,$$

$$\therefore \frac{(अ+क)^3}{(व+ड)^3} = \frac{अ(अ-क)^2}{व(व-ड)^2}$$

$$\text{उ० ४. यदि } म : न = प : क \text{ तदा } \frac{(म-न)(म-क)}{म} = (म+क) - (न+प)$$

इति साध्यताम्

$$\frac{(म-न)(म-क)}{म} = \frac{म^2 - म(न+प) + नप}{म} = म - (न+प) + \frac{नप}{म}$$

$$= म - (न+प) + \frac{मक}{म} \quad \because नप = मक$$

$$= म - (न+प) + क = (म+क) - (न+प)$$

च, कल्पनयाप्यस्योदाहरणस्य सिद्धिर्भवति ।

$$\text{उ० ५, यदि } ३ अ + ४ व : ५ अ + ६ व = ३ क + ४ ड : ५ क + ६ ड$$

$$\text{तदा } अ : व = क : ड$$

$$\text{अत्र } (३ अ + ४ व) (५ क + ६ ड) = (५ अ + ६ व) (३ क + ४ ड)$$

$$\text{वा } १५ अक + २० वक + १८ अड + २४ वड = १५ अक + १८ वक$$

$$+ २० अड + २४ वड$$

$$\text{यस्मात् वक} = \text{अड अर्थात् } अ : व = क : ड$$

$$\text{उ० ६. यदि } \frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} = \frac{इ}{फ} \text{ तदा } \frac{अ+क+इ}{व+ड+फ} = \frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} = \frac{इ}{फ}$$

कल्प्यतां $\frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} = \frac{इ}{फ} = च$, तदा अ = वच, क = डच, इ = फच

$$\therefore \frac{अ + क + इ}{व + ड + फ} = \frac{वच + डच + फच}{व + ड + फ} = \frac{च (व + ड + फ)}{व + ड + फ} = च$$

$$= \frac{अ}{व} = \frac{क}{ड} = \frac{इ}{फ}$$

उ० ४३ अभ्यासार्थं प्रश्नाः

१. यदि अ : व = क : ड तदा साध्यन्ताम्

$$१. अ + ४ व : ३ क + ४ ड = ५ अ + ६ व : ५ क + ६ ड$$

२. $अ^२ + व^२ : अ^२ - व^२ = अक + वड : अक - वड$

३. $अ^२ + अ व + व^२ : अ^२ - अ व + व^२ = क^२ + कड + ड^२ : क^२ - कड + ड^२$

४. $अ + \sqrt{अ^२ + व^२} : अ - \sqrt{अ^२ + व^२} = क + \sqrt{क^२ + ड^२} :$

$$क - \sqrt{क^२ + ड^२}$$

५. $(अ^३ + अ^२ व + व^३) (अ + व) : (क^३ + क^२ ड + ड^३) (क + ड) = अ^४ + व^४ : क^४ + ड^४$

६. यदि $अ^२ + क^२ : अ व + क ड = अ व + क ड : व^२ + ड^२$ तदा

$$अ : व = क : ड ।$$

७. यदि $\frac{अ + व + २ क + २ ड}{२ अ - व + ४ क = २ ड} = \frac{३ अ + ३ व + ४ क + ४ ड}{६ अ - ३ व + ८ क - ४ ड}$

तदा अ : व = क : ड

८. यदि अ : व = क : ड = इ : फ तदा साध्यन्ताम् क : ड = अ व + क ड + इ फ : व^२ + ड^२ + फ^२

९. $इ : फ = \sqrt{म^४ अ^४ + न^४ क^४ + प^४ इ^४} : \sqrt{म^४ व^४ + न^४ ड^४ + प^४ फ^४}$

१०. $अ^२ + क^२ + इ^२ : अ व + क ड + इ फ = अ व + क ड + इ फ : अ^२ + ड^२ + फ^२$

११. यदि $\frac{अ - व}{ड - इ} = \frac{व - क}{इ - फ}$ तदा प्रत्येकं संबन्धः = $\frac{(अ - व) फ + (व - क) ड}{(ड - फ) इ}$

समीकरणेऽपि संबन्धसिद्धान्ताः परमोपकारकाः तद्यथाः—

उ० १. $\frac{२ य + ३ अ}{३ य - ३ अ} = \frac{५}{३}$ अत्र य मानं किम् ?

योगान्तरनिष्पत्तिसाहाय्येन

$$\frac{(२य + ३अ) + (२य - ३अ)}{(२य + ३अ) - (२य - ३अ)} = \frac{५ + ३}{५ - ३}$$

$$\text{वा, } \frac{४य}{६अ} = \frac{८}{२} = ४ \therefore य = ६अ$$

$$\text{उ० २. } \frac{\sqrt{य} + \sqrt{अ-य}}{\sqrt{य} - \sqrt{अ-य}} = \text{क अत्र य मानं किम्?}$$

$$\frac{\sqrt{य} + \sqrt{अ-य}}{\sqrt{य} - \sqrt{अ-य}} = \text{क} = \frac{\text{क}}{१} \text{ अहारराशेः हरः रूपं कल्प्यस्ततो}$$

योगान्तरनिष्पत्त्या—

$$\frac{\sqrt{अ-य}}{\sqrt{य}} = \left(\frac{\text{क}-१}{\text{क}+१}\right)^2, \frac{अ}{य} - १ = \left(\frac{\text{क}-१}{\text{क}+१}\right)^2$$

$$\therefore \frac{अ}{य} = १ + \left(\frac{\text{क}-१}{\text{क}+१}\right)^2 = \frac{२(\text{क}^2+१)}{(\text{क}+१)^2} \therefore \frac{य}{अ} = \frac{(\text{क}+१)^2}{२(\text{क}^2+१)}$$

$$\therefore य = \frac{अ(\text{क}+१)^2}{२(\text{क}^2+१)}$$

उ० ४४ अभ्यासार्थं प्रश्नाः

निम्नस्थेषु प्रश्नेषु य मानं किम्

$$१. \frac{\sqrt{५य} - \sqrt{७-५य}}{\sqrt{५य} + \sqrt{७-५य}} = \frac{१}{४},$$

$$२. \frac{\sqrt{य+१} - \sqrt{य-१}}{\sqrt{य+१} + \sqrt{य-१}} = \frac{१}{२}$$

$$३. \frac{\sqrt{अ} - \sqrt{अ-य}}{\sqrt{अ} + \sqrt{अ-य}} = अ$$

$$४. \frac{१-अय}{१+अय} \sqrt{\frac{१+वय}{१-वय}} = १$$

$$५. \left(\frac{१+य}{१-य}\right)^2 = १ + \frac{\text{कय}}{\text{अव}}$$

$$६. \frac{अ - \sqrt{२अय - य^2}}{अ + \sqrt{२अय - य^2}} = व$$

$$७. \sqrt{\frac{य+अ}{य}} + २\sqrt{\frac{अ}{य+अ}} = व\sqrt{\frac{य}{य+अ}}$$

$$८. \sqrt{अ^2 - य^2} + य\sqrt{अ^2 - १} = अ^2\sqrt{१ - य^2}$$

$$९. (अ+व)\sqrt{१+अ} + (अ-व)\sqrt{१-अ} = २\sqrt{अ^2+य^2}$$

$$१०. \frac{१+y-\sqrt{२य+y^२}}{१+y+\sqrt{२य+y^२}} = \frac{\sqrt{२+y}+\sqrt{य}}{\sqrt{२+y}+\sqrt{य}}$$

$$११. \frac{(१+अ^२)(१+य^२)}{(१+अय)^२} = \frac{१}{४} \left(\frac{य}{अ} + \frac{अ}{य} + २ \right)$$

विशेषाः सोत्तराः प्रश्नाः

उ० १. यदि $\frac{य}{व+क-अ} = \frac{र}{क+अ-व} = \frac{ज}{अ+व-क}$, तदा

(व-क)य + (क-अ)र + (अ-व)ज = ० इति साध्यताम् ।

कल्प्यतां प्रत्येकं संबन्धः = च तदा

य = च (व+क-अ) ... (१) र = च (क+अ-व) ... (२)

ज = च (अ+व-क) ... (३)

(१) व-क इत्यनेन (२) क-अ इत्यनेन (३) अ-व इत्यनेन संगुण्य
योगे च कृते (व-क)य + (क-अ)र + (अ-व)ज = च
{ व^२ - क^२ - अ(व-क) + क^२ - अ^२ - व(क-अ)
+ अ^२ - व^२ - क(अ-व) } = च × ० = ०

उ० २. साध्यतां यदि $\frac{अर-वय}{क} = \frac{कय-अज}{व}$
 $= \frac{वज-कर}{अ}$ तदा $\frac{य}{अ} = \frac{र}{व} = \frac{ज}{क}$

कल्प्यतां $\frac{अर-वय}{क} = \frac{कय-अज}{व} = \frac{वज-कर}{अ} = च$

∴ $\frac{अकर-वकय}{क^२} = \frac{वकय-अवज}{व^२} = \frac{अवज-अकर}{अ^२} = च$

अतः पूर्वसिद्धान्तानुसारेण प्रत्येकं संबन्धः = ०

अतः अर-वय = ०, कय-अज = ०, वज-कर = ०

अस्मात् $\frac{य}{अ} = \frac{र}{व} = \frac{ज}{क}$

उ० ३. यदि अ(र+ज) = व(ज+य) = क(य+र)

तदा $\frac{र-ज}{अ(व-क)} = \frac{ज-य}{व(क-अ)} = \frac{य-र}{क(अ-व)}$

$$\text{अत्र अ (र + ज) = व (ज + य) = क (य + र)}$$

एते अवक अनेन विभक्ताः ।

$$\text{तदा } \frac{र + ज}{व क} = \frac{ज + य}{क अ} = \frac{य + र}{अ व} = \text{च कल्प्यताम्}$$

$$\text{तदा च} = \frac{(य + र) - (ज + य)}{अ व - क अ} = \frac{र - ज}{अ (व - क)} \text{ अन्तरनिष्पत्त्या}$$

$$\text{एवमेव च} = \frac{(य + ज) - (र + ज)}{क अ - व क} = \frac{य - र}{क (अ - व)}$$

$$\text{एवमेव च} = \frac{(ज + र) - (य + र)}{व क - क अ} = \frac{ज - य}{क (व - अ)}$$

$$\text{अस्मात् } \frac{र - ज}{अ (व - क)} = \frac{ज - य}{व (क - अ)} = \frac{य - र}{क (अ - व)}$$

$$\text{उ० ४. यदि अ : व = क : ड तदा ४ (अ + व) (क + ड)}$$

$$= व ड \left(\frac{अ + व}{व} + \frac{क + ड}{ड} \right)^2$$

$$\text{कल्प्यतां प्रत्येकं संबन्धः = च तदा अ = च व, क = च ड,}$$

$$\therefore ४ (अ + व) (क + ड) = ४ (च व + व) (च ड + ड)$$

$$= ४ व ड (च + १)^2 = व ड \{ २ (च + १) \}^2$$

$$= व ड \{ (च + १) + (च + १) \}^2$$

$$= व ड \left\{ \left(\frac{अ}{व} + १ \right) + \left(\frac{क}{ड} + १ \right) \right\}^2 = व ड \left(\frac{अ + व}{व} + \frac{क + ड}{ड} \right)^2$$

उ० ४५ अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. \text{ यदि अ : व = क : ड तदा}$$

$$\frac{(अ^२ - क^२) व^२ (क^२ - ड^२)}{(अ^२ - व^२) क^२ (व^२ - ड^२)} = १$$

$$२. \text{ यदि } \frac{व + क}{अ} = \frac{क + अ}{व} = \frac{अ + व}{क} \text{ तदा अ = व = क इति साध्यताम् ?}$$

$$३. \text{ यदि } \frac{य}{व + क} = \frac{र}{क + अ} = \frac{ज}{अ + व} \text{ तदा}$$

$$(व - क) य + (क - अ) र + (अ - व) ज = ०$$

$$४. \text{ यदि } \frac{य}{अ (व - क)} = \frac{र}{व (क - अ)} = \frac{ज}{क (अ - व)}$$

तदा वक (व + क) य + कअ (क = अ) र + अव (अ + व) ज = ०

$$४. \text{ यदि } \frac{अ}{र + ज} = \frac{व}{ज + य} = \frac{क}{य + र} = \text{तदा } \frac{अ(व-क)}{र^2-ज^2} = \frac{व(क-अ)}{ज^2-य^2} = \frac{क(अ-व)}{य^2-र^2}$$

$$३. \text{ यदि } \frac{वज + कर}{व-क} = \frac{कय + अज}{क-अ} = \frac{अर + वय}{अ-व}, \text{ तदा}$$

$$(अ + व + क) (य + र + ज) = अय + वर + कज$$

$$७. \text{ यदि } \frac{य + र}{३ व-क} = \frac{ज + य}{३ क-अ} = \frac{य + र}{३ अ-व} \text{ तदा}$$

$$\frac{य + र + ज}{अक + वर + कज} = \frac{अ + व + क}{अ^2 + व^2 + क^2} \text{ इति साध्यताम्}$$

प्रकीर्णाः सोत्तराः प्रश्नाः

१. यदि २ स = अ + व + क तदा

$$स^2 + (स - अ)^2 + (स - व)^2 + (स - क)^2$$

$$= अ^2 + व^2 + क^2 \text{ इति साध्यताम्}$$

$$\text{अत्र वामपक्षः} = स^2 + (स^2 - २ सअ + अ^2) + (स^2 - २ सव + व^2) + (स^2 - २ सक + क^2)$$

$$= ४ स^2 - २ स (अ + व + क) + अ^2 + व^2 + क^2$$

$$= ४ स^2 - २ स २ स + अ^2 + व^2 + क^2$$

$$= अ^2 + व^2 + क^2 \quad \because २ स = अ + व + क$$

२. यदि (अ + व - क - ड) य = क ड - अव, तदा

$$(अ + य) (व + य) = (क + य) (ड + य)$$

अत्र (अ + व) य = (क + ड) य = क ड - अव, पक्षान्तरानयनेन

∴ (अ + व) य + अव = (क + ड) य + क ड पक्षयोः य^२ योजनेन

$$य^2 + (अ + व) य + अव = य^2 + (क + ड) य + क ड;$$

$$\therefore (य + अ) (य + व) = (य + क) (य + ड)$$

३. यदि २ य = अ + व + क तदा

$$अ (स - व) (स - क) + व (स - क) (स - अ) + क (स - अ) (स - व)$$

$$= अ (स - अ)^2 + व (स - व)^2 + क (स - क)^2 \text{ इति साध्यताम् ।}$$

$$\text{प्रदत्तसम्बन्धेन } अ = (स - व) + (स - क), व = (स - क) + (स - अ)$$

$$क = (स - अ) + (स - व),$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{अ (स-व) (स-क)} &= (\text{स-व})^2 (\text{स-क}) + (\text{स-व}) (\text{स-क})^2, \\
\text{व (स-क) (स-अ)} &= (\text{स-क})^2 (\text{स-अ}) + (\text{स-क}) (\text{स-अ})^2, \\
\text{क (स-अ) (स-व)} &= (\text{स-अ})^2 (\text{स-व}) + (\text{स-अ}) (\text{स-व})^2, \text{ ततो योगेन} \\
\text{अ (स-व) (स-क)} &+ \text{व (स-क) (स-अ)} + \text{क (स-अ) (स-व)} = \\
&(\text{स-अ})^2 (२ \text{ स-व-क}) + (\text{स-व})^2 (२ \text{ स-क-अ}) + \\
&(\text{स-क})^2 (२ \text{ स-अ-व}) = \text{अ (स-अ)}^2 + \text{व (स-व)}^2 + \text{क (स-क)}^2
\end{aligned}$$

नियमः १. यदि केषांचन वास्तवधनराशीनां योगः शून्यसमः तद् प्रत्येकं राशिः शून्यसमो भवति ।

कल्प्यते $\text{अ}^2 + \text{व}^2 + \text{क}^2 = ०$ यत्र अ, व, क राशयो वास्तवा धनात्मकाश्च ।
इदानीं धनात्मकराशीनां योगः कदाचिदपि शून्यसमो न हि भवति यदि तत्र प्रत्येकं शून्यसमो न स्यात् ।

$$\text{अतः } \text{अ}^2 = ०, \text{ व}^2 = ०, \text{ क}^2 = ० \text{ अस्मात् } \text{अ} = ०, \text{ व} = ०, \text{ क} = ०$$

४. यदि $\text{अ}^2 + \text{व}^2 + \text{क}^2 = २$ अव, तदा $\text{अ} = \text{व}$ तथा $\text{क} = ०$ इति साध्यताम्
पक्षान्तरानयनेन $(\text{अ} - \text{व})^2 + \text{क}^2 = ०$, यस्मात् $(\text{अ} - \text{व})^2$
 $= ०$ तथा $\text{क}^2 = ०$ १ नियमेन
 $\therefore \text{अ-व} = ०$ वा $\text{अ} = \text{व}$, तथा $\text{क} = ०$,

नियमः २. यदि य र = ० तदा य = ० वा, र = ०

$$\text{अथवा } \text{य} = ० \text{ तथा } \text{र} = ०$$

अतोऽत्र यदि य = अ तदा र = ० वा यदि र = ० तदा य = अ,
अथवा य = ०, र = ० तदापि य र = ०

अतः य × र शून्यसमः कदापि न यदि तत्र एकोऽपि शून्यसमो न स्यात् ।

उ० ५. यदि $\text{य}^3 + \text{र}^3 + \text{ज}^3 - ३ \text{ यरज} = ०$ तदा य + र + ज अवश्यं शून्यसमः
यदि य, र, तथा ज तुल्याः न स्युः

$$\begin{aligned}
\text{अथ } \text{य}^3 + \text{र}^3 + \text{ज}^3 - ३ \text{ यरज} &= \frac{१}{२} (\text{य} + \text{र} + \text{ज}) \{ (\text{र} + \text{ज})^2 + \\
&(\text{ज} - \text{य})^2 + (\text{य} - \text{र})^2 \}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{१}{२} (\text{य} + \text{र} + \text{ज}) \{ (\text{र} - \text{ज})^2 + (\text{ज} - \text{य})^2 + (\text{य} - \text{र})^2 \} = ०$$

अतः प्रथमगुणावयवो द्वितीयगुणावयवो वा अवश्यं शून्यसमः यदि कल्प्यते
द्वितीयः शून्यसमस्तदा $(\text{र} - \text{ज})^2 + (\text{ज} - \text{य})^2 + (\text{य} - \text{र})^2 = ०$

$\therefore (\text{र} - \text{ज})^2 = ०, (\text{ज} - \text{य})^2 = ०, (\text{य} - \text{र})^2 = ०$ वा, $\text{र} - \text{ज} = ०, \text{ज} - \text{य} = ०$
 $\text{य} - \text{र} = ०$ वा $\text{य} = \text{र} = \text{ज}$ परन्तु तदं कल्पनाया विरुद्धं तेन $\text{य} + \text{र} + \text{ज} = ०$

$$६. \left(\frac{य - अ}{य - व} \right)^3 = \frac{य - २ अ + व}{य - २ व + अ} \text{ अत्र यमानं किम् ? पक्षयोः रूपं योजनेन}$$

$$\frac{(य - अ)^3 + (य - व)^3}{(य - व)^3} = \frac{२ य - अ - व}{य - २ व + अ} \text{ अस्मात् } (२ य - अ - व)$$

$$\left\{ \frac{(य - अ)^2 - (य - अ)(य - व) + (य - व)^2}{(य - व)^3} - \frac{१}{य - २ व + अ} \right\} = ०;$$

$$\text{वा, } (२ य - अ - व) \frac{(अ - व)^2}{(य - व)^3 (य - २ व + अ)} = ०,$$

अतोऽत्र प्रथमगुणावयवः शून्यसमः द्वितीयो वा, परञ्च द्वितीयोऽत्र शून्यसमो न हि भवति यतस्तत्र तथा कल्पिते $(अ - व)^2$ शून्यसमः स्यात् अथवा

अ-व शून्यसमः स्यात् तदा $अ = व$ भविष्यति परञ्चेदं कल्पनायाः विरुद्धं तेनावश्यं $२ य - अ - व = ०$ $\therefore य = \frac{अ + व}{२}$

$$७. \text{ यदि } य = (व - क)(अ - ड), र = (क - अ)(व - ड), ज = (अ - व)(क - ड) \text{ तदा } य^3 + र^3 + ज^3 - ३ य र ज \text{ अस्य मानं किम्}$$

$$\text{अत्र } य + र + ज = (व - क)(अ - ड) + (क - अ)(व - ड) + (अ - व)(क - ड)$$

$$= अ(व - क) + व(क - अ) + क(अ - व) - ड\{(व - क) + (क - अ) + (अ - व)\} = ०$$

य + र + ज अभीष्टराशेरेको गुणावयवः स च शून्यसमः सिद्धस्तेनाभीष्ट-
राशिरपि शून्यशमः ।

$$८. \text{ कल्प्यते } \frac{अ + व - क}{अ + व} = \frac{व + व - अ}{व + क} = \frac{क + अ - व}{क + अ} \text{ तथा } अ + व + क$$

शून्यसमः न तदा $अ = व = क$ इति साध्यताम्

$$\text{प्रदत्तसंबन्धेन } २ - \frac{अ + व - क}{अ + व} = २ - \frac{व + क - अ}{व + क} = २ - \frac{क + अ - व}{क + अ},$$

$$\text{वा } \frac{अ + व + क}{अ + व} = \frac{अ + व + क}{व + क} = \frac{अ + व + क}{क + अ}, \text{ अ + व + क अनेन विभक्ते}$$

$$\text{तदा } \frac{१}{अ + व} = \frac{१}{व + क} = \frac{१}{क + अ}, \text{ यस्मात् } अ + व = व + क = क + अ,$$

अर्थात् $अ = व = क$

$$९. \text{ यदि } \frac{अ - व}{क} + \frac{व - क}{अ} + \frac{क + अ}{व} = १ \text{ तथा } अ - व + क \text{ शून्यसमः न तदा}$$

$$\frac{१}{अ} = \frac{१}{व} + \frac{१}{क}$$

प्रदत्तसंबन्धेन $\frac{अ-व}{क} + १ + \frac{व-क}{अ} - १ + \frac{क+अ}{व} - १ = ०,$

वा $\frac{अ-व+क}{क} + \frac{व-क-अ}{अ} + \frac{क+अ-व}{व} = ०$

वा $(अ-व+क) \left\{ \frac{१}{क} - \frac{१}{अ} + \frac{१}{व} \right\} = ०,$

अतः अ-व+क शून्यसमः अथवा $\frac{१}{क} - \frac{१}{अ} + \frac{१}{व} = ०$

परञ्च अ-व+क

न शून्यसमस्तेन $\frac{१}{क} - \frac{१}{अ} + \frac{१}{व} = ०$ वा $\frac{१}{अ} = \frac{१}{क} + \frac{१}{व}$

१०. यदि $य+र+ज=०$ तदा $\frac{य^२}{२य^२+रज} + \frac{र^२}{२र^२+जय} + \frac{ज^२}{२ज^२+यर} = १$

प्रदत्तसंबन्धेन $य = -(र+ज)$, $\therefore य^२ = -य(र+ज)$

अतः $२य^२+रज = य^२+य^२+रज = य^२-य(र+ज)+रज$
 $= (य-र)(य-ज)$

एवमेव $२र^२+जय = (र-ज)(र-य)$, तथा $२ज^२+यर$
 $= (ज-य)(ज-र)$

$\therefore$ वामपक्षः $= \frac{य^२}{(य-र)(य-ज)} + \frac{र^२}{(र-ज)(र-य)}$
 $+ \frac{ज^२}{(ज-य)(ज-र)} = १$ पूर्वोक्तविधिना

११. यदि $\frac{वय-अर}{कर-अज} = \frac{कय-अज}{वर-अय} = \frac{ज+र}{ज+य}$ तदा प्रत्येकं संबन्धः $= \frac{य}{र}$

यदि व+क शून्यसमो न स्यात् कल्प्यते प्रत्येकं संबन्धः = च

तदा $च = \frac{वय-अर}{कर-अज} = \frac{कय-अज}{वर-अय} = \frac{अ(ज+र)}{अ(ज+य)}$
 $= \frac{(वय-अर)+(कय-अज)+(अज+अर)}{(कर-अज)+(वर-अय)+(अज+अय)}$

योगान्तरनिष्पत्त्या

$$\frac{(व+क)य}{(व+क)र} = \frac{य}{र} \text{ यतः } व+क \text{ न शून्यसमः }$$

१२. यदि $अ+व+क=०$ तथा $अ(वर+कज-अय)$

$$= व(कज+अय-वर) = क(अय+वर-कज), \text{ तदा } य+र+ज=० \text{ इति साध्यताम् ।}$$

प्रथमद्वितीययोः पक्षान्तरानयनेन

$$अ(अ+व)य-व(अ+व)र+क(व-अ)ज=०$$

द्वितीयतृतीययोः पक्षान्तरानयनेन च

$$अ(व-क)य-व(व+क)र+क(व+क)ज=०$$

ततो वज्राभ्यासगुणनरीत्या

$$\begin{aligned} & \frac{य}{-वक(अ+व)(व+क)+वक(व+क)(व-अ)} \\ &= \frac{र}{कअ(व-क)(व-अ)-कअ(अ+व)(व+क)} \\ &= \frac{ज}{-अव(अ+व)(व+क)+अव(अ+व)(व-क)} \\ \text{वा } & \frac{य}{-१अवक(व+क)} = \frac{र}{-२अवक(क+अ)} \\ &= \frac{ज}{-२अवक(अ+व)} \end{aligned}$$

$$\text{यस्मात् } \frac{य}{व+क} = \frac{र}{क+अ} = \frac{ज}{अ+व} = च \text{ कल्प्यते}$$

$$\text{तदा } य=च(व+क), र=च(क+अ), ज=च(अ+व);$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } य+र+ज &= च(व+क)+च(क+अ)+च(अ+व) \\ &= २च(अ+व+क)=० \because अ+व+क=० \end{aligned}$$

(च० ४६) अभ्यासार्थं प्रश्नाः

$$१. \text{ यदि } य^२+र^२+ज^२+अ^२+व^२+क^२=२(अय+वर+कज)$$

तदा $य=अ, र=व, ज=क$ इति प्रदर्शयताम्

$$२. \text{ यदि } अ^२+व^२+क^२=अय+वर+कज=य^२+र^२+ज^२=१,$$

$$\text{तदा } \frac{य}{अ} = \frac{र}{व} = \frac{ज}{क} = १ \text{ इति साध्यताम्}$$

$$३. \text{ यदि } \left\{ y - \frac{m^2}{k-n} \right\}^2 + \left\{ y - \frac{n^2}{k-m} \right\}^2 = 0 \text{ तदा } y = m+n$$

साध्यताम् ।

$$४. \text{ यदि } २स = अ + व + क \text{ तदा साध्यताम्}$$

$$(स - अ)(स - व) + (स - व)(स - क) +$$

$$(स - क)(स - अ) = स^2 - \frac{१}{३}(अ^2 + व^2 + क^2)$$

$$५. अ^3(व - क)^3 + व^3(क - अ)^3 + क^3(अ - व)^3 =$$

$$३अवक(व - क)(क - अ)(अ - व) \text{ प्रदर्श्यताम्}$$

$$६. \text{ यदि } y \pm \frac{१}{y} = r, \text{ तदा } y^3 \pm \frac{१}{y^3} = r^3 \mp ३r \text{ प्रदर्श्यताम्}$$

$$७. \text{ यदि } \frac{१ - २अय + अ^२}{१ - अ^२} = \frac{१ - अ^२}{१ + २अर + अ^२} \text{ तदा } \frac{य - र}{१ - यर} = \frac{२अ}{१ + अ^२}$$

$$८. \text{ यदि } २स = अ + व + क, \text{ तदा } (स - अ)^3 + (स - व)^3 + (स - क)^3 + ३अवक = स^3$$

$$९. \text{ यदि } \frac{अ}{य}(व - क) + \frac{व}{र}(क - अ) + \frac{क}{अ}(अ - व) = ०,$$

$$\text{तदा } \frac{य}{अ}(र - अ) + \frac{र}{व}(अ - य) + \frac{अ}{क}(य - र) = ०$$

$$१०. \text{ यदि } \left(अ + \frac{१}{अ} \right)^२ = ३, \text{ तदा } अ^३ + \frac{१}{अ^३} = ० \text{ प्रदर्श्यताम्}$$

$$११. \text{ यदि } य = \frac{१}{२}(\sqrt{२१} - ३) \text{ तदा } २७य + ४८य^२ - ८य^४ \text{ अस्य किं मानम्?}$$

$$१२. \text{ यदि } २स = अ + व + क + ड \text{ तदा प्रदर्श्यताम्}$$

$$४(वक + अड)^२ - (व^२ + क^२ - अ^२ - ड^२)^२$$

$$= १६(स - अ)(स - व)(स - क)(स - ड)$$

$$१३. \text{ साध्यताम् } \left(य + \frac{१}{य} \right)^२ + \left(र + \frac{१}{र} \right)^२ + \left(यर + \frac{१}{यर} \right)^२$$

$$= ४ + \left(य + \frac{१}{य} \right) \left(र + \frac{१}{र} \right) \left(यर + \frac{१}{यर} \right)$$

$$१४. \text{ यदि } \frac{अ - व}{१ + अव} = \frac{य - र}{१ + यर} \text{ तदा } \frac{अ - य}{१ + अय}$$

$$= \frac{व - र}{१ + वर} \text{ तथा } \frac{अ + र}{१ - अर} = \frac{व + य}{१ - वय} \text{ प्रदर्श्यताम्}$$

$$१५. \text{ यदि } य + र + अ = ०,$$

$$\text{अ य + व र + क ज} = ० \text{ तदा } \frac{य}{व - क} + \frac{र}{क - अ} + \frac{ज}{अ - व} = ३$$

१६. यदि $स = अ + व + क$ तदा साध्यताम्

$$(स - ३ अ)^२ + (स - ३ व)^२ + (स - ३ क)^२ \\ = ३ \{ (अ - व)^२ + (व - क)^२ + (क - अ)^२ \}$$

$$१७. \text{यदि } य = \frac{अ + व}{क - ड} \text{ तदा } (अ - क य)^२ + (य^२ - र)(व^२ - ड^२)$$

एयः पूर्णवर्गः इति प्रदर्शयताम्

१८. यदि $स = अ + व + क$, तदा साध्यताम्

$$(अ स + व क)(व स + क अ)(क स + अ व) \\ = (व + क)^२ (क + अ)^२ (अ + व)^२$$

१९. यदि $अ + व + क = ०$ तदा

$$\frac{अ^२ + व^२ + क^२}{अ^३ + व^३ + क^३} + \frac{२}{३} \left(\frac{१}{अ} + \frac{१}{व} + \frac{१}{क} \right) = ० \text{ साध्यताम्}$$

$$२०. \text{यदि } ३ स = अ + व + क \text{ तदा } (स - अ)^५ + (स - व)^५ + (स - क)^५ = \\ २ \{ (स - अ)^२ (स - व)^२ + (स - व)^२ (स - क)^२ + (स - क)^२ (स - अ)^२ \}$$

$$२१. \text{साध्यताम् } \frac{१}{अ + य} + \frac{२ य}{अ^२ + य^२} + \frac{४ य^३}{अ^४ + य^४} + \frac{८ य^७}{अ^८ + य^८} \\ = \frac{१}{अ - य} - \frac{१६ य^{१५}}{अ^{१६} - य^{१६}}$$

$$२२. \text{यदि } य = \frac{१}{\sqrt{अ^२ + व^२}}, \text{ तदा}$$

$$\frac{अ^३}{१ + व य} + \frac{व^३}{१ + अ य} = (अ + व)(अ^२ + व^२)$$

२३. यदि $अ + व + क = ०$, तदा

$$\frac{(व - क)^२ (व + क - अ)}{अ (अ - व) (अ - क)} + \frac{(क - अ)^२ (क + अ - व)}{व (व - क) (व - अ)} + \frac{(अ - व)^२ (अ + व - क)}{क (क - अ) (क - व)} = ६$$

$$२४. \text{यदि } य = \frac{२ अ क}{अ + क} \text{ तदा } \frac{(य - अ)^२ + (य - क)^२}{अ^२ + क^२} + \frac{४ अ क}{(अ + क)^२}$$

अस्य मानं स्थिरं अ, क अनयोर्यत्किमपि मानं भवेत् ।

$$२५. \text{यदि } य + र = य र = १ \text{ तदा } य^३ + र^३ = - १ \text{ इति साध्यताम् ।}$$

२६. यदि $अ : व = य : र = प : क$, तदा $\frac{अ^३ + य^३}{व^३ + र^३} = \frac{प^६}{क^६}$

२७. (क) यदि $\frac{य}{व + क - अ} = \frac{र}{क + अ - व} = \frac{ज}{अ + व - क}$ तदा साध्यताम्

(अ + व + क) (य + र + ज) = (य + र + ज) (अ + व + क)

(ख) यदि $क = अ\sqrt{१-व^२} + व\sqrt{१-अ^२}$ तदा साध्यताम्

(अ + व + क) (व + क - अ) (क + अ - व) (अ + व - क) = ४ अ^२ व^२ क^२

२८. यदि $\frac{य}{व - क + अ} = \frac{र}{क - अ + व} = \frac{ज}{अ - व + क}$ तदा प्रत्येकं

$$= \frac{अ(र + ज) + व(ज + य) + क(य + र)}{२(वक + कअ + अव)}$$

२९. अ, व राशोर्यदि य लघुतमापवर्त्यः, र महत्तमापवर्त्तनं तथा

$य + र = मअ + \frac{व}{म}$, तदा $य^३ + र^३ = म^३अ^३ + \frac{व^३}{म^३}$

३०. यदि $य + र + अ = ०$, $य - र - व = ०$, तदा

$(१ + य^२)(१ + र^२) = अ^२ + (१ - व)^२$

३१. यदि $\frac{य}{र} - \frac{र}{य} = अ$, तथा $\frac{य^२}{र^२} - \frac{र^२}{य^२} = व$, तदा $अ^४ + ४अ^२ = व^२$

३२. यदि $र = \frac{अय - व}{अ - वय}$, तदा $\frac{य - र}{१ - यर} = \frac{व}{अ}$ इति प्रदर्शयताम्

३३. यदि $\frac{य}{अ} = \frac{र}{व} = \frac{ज}{क}$ तदा साध्यताम्

$$\frac{अय - वर}{(अ - व)(य + र)} + \frac{वर - कज}{(व - क)(र + ज)} + \frac{कज - अय}{(क - अ)(ज + य)} = ३$$

३४. यदि $अ^२ + व^२ = १ = क^२ + ड^२$ तदा साध्यताम्

$(अक + वड)(अक - वड) = (अ + ड)(अ - ड)$

३५. यदि $२स = अ + व + क$ तदा $\{(स - अ) + (स - व)\}^३$

$= (स - अ)^३ + (स - व)^३ + ३(स - अ)(स - व)क$

३६. यदि $य = \frac{अव - कड}{(अ - व) - (क - ड)}$ तदा $(य + अ)(य - व)$

$= (य + क)(य - ड)$ तथा $\frac{य + अ}{य - व} = \frac{(अ - क)(अ + ड)}{(व + क)(व - ड)}$

३७. यदि $y = v + k$, $r = k + a$, $j = a + v$, तदा साध्यताम्

$$\frac{y^3 + r^3 + j^3 - 3 y r j}{a^3 + v^3 + k^3 - 3 a v k} = 2$$

३८. यदि $a + v + k = 0$ तदा

$$3 + \frac{v^2 + k^2 - a^2}{2 v k} + \frac{k^2 + a^2 - v^2}{2 k a} + \frac{a^2 + v^2 - k^2}{2 a v} = 0 \text{ साध्यताम्}$$

३९. यदि $\frac{y^2}{r^2} = \frac{2 a^2}{v^2} + 1$, तदा $\frac{2 r^2}{y^2 + r^2} + \frac{a^2}{a^2 + v^2} = 1$

४०. यदि $r + \frac{1}{j} = 1$, $j + \frac{1}{y} = 1$, तदा $y + \frac{1}{y} = 1$ साध्यताम्

४१. यदि $y + r + j = 0$ तदा साध्यताम्

$$\frac{1}{r^2 + j^2 - y^2} + \frac{1}{j^2 + y^2 - r^2} + \frac{1}{y^2 + r^2 - j^2} = 0$$

४२. यदि $y = a + v + \frac{(a - v)^2}{4(a + v)}$, $r = \frac{a + v}{4} + \frac{a v}{a + v}$,

तदा $(y - a)^2 - (r - v)^2 = v^2$ इति साध्यताम् ।

४३. यदि $y = \frac{v - k}{a}$, $r = \frac{k - a}{v}$, $j = \frac{a - v}{k}$,

तदा $y r j + y + r + j = 0$ साध्यताम्

४४. यदि $y = \frac{a + v - k}{a + v + k}$ तदा $\frac{a + v + k}{v + a y} = \frac{(a - v + k)^2 + 4 a v}{(v + k - a)^2 + 4 a v}$

४५. यदि $v + r + j = 0$, तथा $\frac{a}{y} + \frac{v}{r} + \frac{k}{j} = 0$, तदा $v y^2 +$

$$(a + v - k) y r + a r^2 = 0$$

४६. यदि $y + r + j = 0$, तदा $\frac{y(r^3 - j^3)}{r - j} + \frac{r(j^3 - y^3)}{j - y} + \frac{j(y^3 - r^3)}{y - r} = 0$

४७. यदि $y = \frac{2 a v + v^2}{a^2 + a v + v^2}$, $r = \frac{a^2 - v^2}{a^2 + a v + v^2}$, तदा $y^3 + r = r^3 + y$

४८. यदि $2 s = a + v + k$ तदा $\frac{1}{s - a} + \frac{1}{s - v} + \frac{1}{s - k} - \frac{1}{s}$

$$= \frac{a v k}{s(s - a)(s - v)(s - k)}$$

४९. यदि $(य + अ)(य + व) = (अ + व)^2$, तदा $\frac{अय - व^2}{य - अ} = \frac{वय - अ^2}{य - व}$

साध्यताम्

५०. यदि $(य + अ)(य + व) = (अ + व)^2$, तदा $\frac{अय - व^2}{य - अ} = \frac{वय - अ^2}{य - व}$

५१. साध्यताम् $\frac{(अ^2 - व^2)^3 + (व^2 - क^2)^3 + (क^2 - अ^2)^3}{(अ - व)^3 + (व - क)^3 + (क - अ)^3}$
 $= (अ + व)(व + क)(क + अ)$

५२. यदि $\frac{१}{य} + \frac{१}{र} + \frac{१}{ज} = ०$, तदा $\frac{१}{य^२ - रज} + \frac{१}{र^२ - जय} + \frac{१}{ज^२ - यर} = ०$

५३. यदि $अ + व + क = ०$, तदा $\left(\frac{व - क}{अ} + \frac{क - अ}{व} + \frac{अ - व}{क}\right)$

$\left(\frac{अ}{व - क} + \frac{व}{क - अ} + \frac{क}{अ - व}\right) = ९$

इति पूर्वार्धपरिशिष्टम्

अथैकवर्णसमीकरणम्

यावत्तावत्कल्प्यमव्यक्तराशेर्मानं

तस्मिन् कुर्वतोद्दिष्टमेव ।

तुल्यौ पक्षौ साधनीयौ प्रयत्नात्

त्यक्त्वा क्षिप्वा वाऽपि संगुण्य भक्त्वा ॥ १ ॥

एकाव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षाद्रूपाण्यन्यस्येतरस्माच्च पक्षात् ।

शेषाव्यक्तेनोद्धरेद्रूपशेषं व्यक्तं मानं जायतेऽव्यक्तराशेः ॥ २ ॥

अव्यक्तानां द्व्यादिकानामपीह यावत्तावद् द्व्यादिनिघ्नं हतं वा ।

युक्तोर्न वा कल्पयेदात्मबुद्ध्या मानं कापि व्यक्तमेवं विदित्वा ॥ ३ ॥

प्रथममेकवर्णसमीकरणं बीजम् । द्वितीयमनेकवर्णसमीकरणं बीजम् ।

यत्र वर्णस्य द्वयोर्वा बहूनां वा वर्गादिगतानां समीकरणं तन्मध्यमाहरणम् ।

यत्र भावितस्य तद्भावितमिति बीजचतुष्टयं वदन्त्याचार्याः । तत्र प्रथमं

तावदुच्यते पृच्छकेन पृष्टे सत्युदाहरणे योऽव्यक्तराशिस्तस्य मानं याव-

त्तावदेकं द्व्यादि वा प्रकल्प्य तस्मिन्नव्यक्तराशौ उद्देशकत्वात् पवत्सर्व

गुणनभजनत्रैराशिकपञ्चराशिश्चद्वीफलक्षेत्रव्यवहारादि गणकेन कार्यम् ।

तथा कुर्वता द्वौ पक्षौ प्रयत्नेन समौ कार्यौ । यद्यालापे समौ पक्षौ न स्तः

तदैकतरे न्यूने पक्षे किञ्चित्प्रक्षिप्य ततः अधिकपक्षात्तावदेव विशोध्य

वा न्यूनं पक्षं केनचित्संगुण्य बाधिकं पक्षं तावतैव भक्त्वा समौ कार्यौ ।

ततस्तयोरेकस्य पक्षस्याव्यक्तमन्यपक्षस्याव्यक्ताच्छोध्यं अव्यक्तवर्गादिक-

मपि । अन्यपक्षरूपाणि इतरपक्षरूपेभ्यः शोध्यानि । यदि करण्यः सन्ति

तदा ता अपि उक्तप्रकारेण शोध्याः ततोऽव्यक्तराशिशेषेण रूपशेषे

भक्ते यल्लभ्यते तदेकस्याव्यक्तस्य मानं व्यक्तं जायते । तेन कल्पितो-

ऽव्यक्तराशिरुत्थाप्यः । यत्रोदाहरणे द्व्यादयोऽव्यक्तराशयो भवन्ति तदा

तस्यैकं यावत्तावत्प्रकल्प्य अन्येषां द्व्यादिभिरिष्टैर्गुणितं भक्तं वा इष्टैः

रूपैरूतं युतं वा यावत्तावदेव कल्प्यम् । अथ वा एकस्य यावत्तावदन्येषां

व्यक्तान्येव मानानि प्रकल्प्यानि । सर्वं विदित्वेति यथा क्रिया निर्वहति
तथा बुद्धिमता ज्ञात्वा शेषाणामव्यक्तानि व्यक्तानि वा कल्प्यानीत्यर्थः ।

व्याख्या—उदाहरणे योऽव्यक्तराशिस्तस्यमानं यावत्तावदेकं द्वयादि
वा प्रकल्प्य तस्मिन्नव्यक्तराशिवुद्देशकालापवदेव सर्वं गुणनभजनत्रैरा-
शिकश्रेढीक्षेत्रादि गणकेन कार्यम् । तथा कुर्वता गणकेन द्वौ पक्षौ प्रयत्नेन
समौ कार्यौ । यद्यालापपक्षौ समौ नस्तस्तदैकतरे न्यूनं पक्षे किञ्चित्-
प्रक्षिप्याधिकपक्षात्तावदेव विशोध्य वा न्यूनं पक्षं केनचित्संगुण्य वा
ऽधिकं पक्षं तावतैव भक्त्वा वा समौ कार्यौ । एवं गुणनक्षेपाभ्यां गुणन
शुद्धिभ्यां वा भजनक्षेपाभ्यां भजन शुद्धिभ्यां वा पक्षयोः समता कार्या ।
एवं वर्गादिकरणेनापि स्वबुद्ध्या पक्षौ समौ कार्यौ । ततस्तयोरेकस्य
पक्षस्याव्यक्तमन्यपक्षस्याव्यक्ताच्छोध्यम् । अव्यक्तवर्गादिकमपि । अन्य-
पक्षरूपाणीतरपक्षरूपेभ्यः शोध्यानि । यदि करण्यः सन्ति तदोक्तप्रकारेण-
शोध्याः । ततोऽव्यक्तराशिशेषेण रूपशेषे भक्ते यल्लभ्यते तदेकस्याव्यक्तस्य
मानं व्यक्तं जायते । तेन कल्पितोऽव्यक्तराशिरुत्थाप्यः । यत्रोदाहरणे-
द्वयादयोऽव्यक्तराशयो भवन्ति तदा तस्यैकं यावत्तावत्प्रकल्प्य, अन्येषां
द्वयादिभिरिष्टैर्गुणितं भक्तं वा इष्टैरूपैरुनयुक्तं वा यावत्तावदेव प्रकल्प्यम् ।

अथवा, एकस्य यावत्तावदन्येषां व्यक्तान्येव मानानि कल्यानि ।
एवं विदित्वेति यथा क्रिया निर्वहति तथा बुद्धिमता ज्ञात्वा शेषाणामव्यक्ता-
नि व्यक्तानि वा मानानि कल्प्यानि, इत्यर्थः—

- समीकरणों में निम्नलिखित सिद्धान्तों पर पूर्ण ध्यान रखना चाहिये ।
- सिद्धान्त (१) यदि बराबर संख्याओं में बराबर संख्याएँ जोड़ी जायँ तो योगफल आपस में बराबर होंगे ।
- सिद्धान्त (२) यदि बराबर संख्याओं में बराबर संख्याएँ घटाई जाँयँ तो शेषफल आपस में बराबर होंगे ।
- सिद्धान्त (३) यदि बराबर संख्याओं को बराबर संख्याओं से गुणा किया जाय तो गुणनफल आपस में बराबर होंगे ।
- सिद्धान्त (४) यदि बराबर संख्याओं को बराबर संख्याओं से भाग दिया जाय तो भजनफल आपस में बराबर होते हैं ।

उदाहरणम्—

एकस्य रूपत्रिशती षडश्वा अश्वा दशान्यस्य तु तुल्यमूल्याः ।

ऋणं तथा रूपशतं च तस्य तौ तुल्यवित्तौ च किमश्वमूल्यम् ॥१॥

यदाद्यवित्तस्य दलं द्वियुक्तं तत्तुल्यवित्तो यदि वा द्वितीयः ।

आद्यो धनेन त्रिगुणोऽन्यतो वा पृथक् पृथक् मे वद वाजिमौल्यम् ॥२॥

व्याख्या—एकस्य वाणिज्यशालिनो मनुष्यस्य रूपत्रिशती, “त्रयाणां शतानां समाहारस्त्रिशती, रूपाणां त्रिशती, इति रूपत्रिशती, रूप्यस्य नाम रूपमिति प्रतीयते “आहतं रूपमस्यास्तीति रूप्यः कार्षापणः” इति “रूप्यः कार्षापणः कार्षिकः” इति पर्यायवाचिकशब्दाः, इति षडश्वास्तुरङ्गाः एता-
वद्धनम्, अन्यस्य व्यापारिणस्तु दशाश्वास्तथा रूपशतं ऋणं वर्त्तते, उभयोरश्वास्तुल्यमूल्याः, एवं तौ समानधनौ, तदा अश्वमूल्यम् किमिति । अथ यदि, एकस्य षट् अश्वाः रूपशतत्रयं चास्ति, परस्य दश अश्वाः रूपशतमृणं चास्ति । परमनयोर्वित्तं समं नास्ति, किन्तु प्रथमस्य वित्तार्धं द्वियुक्तं यावद्भवति तावदपरस्य सर्वधनमस्ति । अथवा अन्यतः सकाशादाद्यो धनेन त्रिगुणो वर्त्तते । एवं स्थिते पृथक् पृथक् मे वाजिमौल्यं वद इति, प्रश्नद्वयेऽपि, अश्वमूल्येनान्यथाभाव्यमिति ।

अत्राश्वमौल्यमज्ञातं तस्य मानं यावत्तावदेकं प्रकल्पितं या १ । तत्र त्रैराशिकं यद्येकस्य यावत्तावन्मूल्यं तदा षण्णां किमिति न्यासः १। या १ ६। फलमिच्छागुणं प्रमाणभक्तं लब्धं षण्णामश्वानां मूल्यम् = या ६ ।

अत्र रूपशतत्रये प्रक्षिप्ते जातमाद्यस्य धनं या ६ रू ३०० एवं दशानां मौल्यं या १० । अत्र रूपशते चर्णगते प्रक्षिप्ते जातं द्वितीयस्य धनं या १० । रू १०० एतौ समधनाविति पक्षौ स्वत एव समौ जातौ । समशोधनार्थं न्यासः या ६ । रू ३००

या १० रू १००

अथ एकाव्यक्तं शोधयेदन्यपक्षादिति आद्यपक्षाव्यक्तेऽन्यपक्षाव्यक्ता-
च्छोषिते शेषं या ४ । द्वितीयपक्षरूपेषु आद्यपक्षरूपेभ्यः शोधितेषु

शेषं रू ४०० अव्यक्तराशिर्शेषेण या ४ । रूपशेषे रू ४०० उद्धृत्ये
लब्धमेकस्य यावत्तावतो मानं व्यक्तं १०० । यद्येकाश्चस्येदं १०० मौल्यं
तदा षण्णां किमिति त्रैराशिकेन लब्धं षण्णां मौल्यम् ६०० । रूपशत-
त्रययुतं ९०० । जातमाद्यस्य धनं । एवं द्वितीयस्यापि ९०० ।

अथ द्वितीयोदाहरणे प्रथमद्वितीययोस्ते एव धने या ६ रु ३०० ।
या १० । रू १०० । अत्राद्यपक्षधनार्धेन द्वियुक्तेन तुल्यमन्यस्य धनमुदा-
हृतमत आद्यधनार्धे द्वियुक्ते अथवाऽन्यधने द्विहीने द्विगुणे कृते पक्षौ
समौ भवतस्तथा कृते शोधनार्थं न्यासः या ३ । रू १५२

या १० । रू १००

अथवा या ६ । रु ३०० ।

या २० । रु २०४

उभयोरपि शोधनाद्ये कृते लब्धं यावत्तावन्मानं ३६ ।

अनेन पूर्ववदुत्थापने कृते जाते धने ५१६ । २६० ।

अथ तृतीयोदाहरणे ते एव धने आद्यधनत्रयंशः परधनमिति परं
त्रिगुणीकृत्य न्यासः या ६ । रू ३०० ।

या ३० । रू ३०० ।

समक्रियया लब्धं यावत्तावन्मानम् २५ । अनेनोत्थापिते जाते
धने ४५० । १५० ।

भाषा—उदाहरण (१) एक व्यापारीके पास तीनसौ रुपये और छ घोड़े हैं
दूसरे के पास ऋण सौ रुपये और दश घोड़े हैं । दोनों के घोड़े एक मोल के हैं
और वे दोनों भी आपसमें बराबर धन वाले हैं । तो बतलाओ घोड़ों का मोल
क्या होगा ।

उदाहरण (२) यदि पहिले व्यापारी के आधे धन में दो जोड़ने से दूसरे का
सर्व धन है (३) और दूसरे से पहिले का तिगुना धन है तो इस अवस्था में घोड़े
का मूल्य क्या होगा ।

अब यहां घोड़े का मूल्य मालूम नहीं है इसलिये घोड़े का मूल्य यावत्तावत्
कल्पना किया । फिर त्रैराशिक की यदि एक घोड़े का मूल्य या है तो ६ घोड़े का
मूल्य क्या आया ६ या इसमें ३००) रुपये जोड़ देने से एक व्यापारी का धन = ६ या

+ ३००, इसी प्रकार दूसरे का धन भी यदि एक घोड़े का मूल्य या है तो १० घोड़े का क्या १० या हुए इसमें १००) ऋण हैं इसलिये दूसरे व्यापारी का धन = १० या - १०० अब दोनों का धन बराबर है ।

$$\begin{aligned} \therefore ६ या + ३०० &= १० या - १०० \\ ३०० + १०० &= १० या - ६ या \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \therefore ६ या + ३०० &= १० या - १०० \\ ३०० + १०० &= १० या - ६ या \end{aligned}} \right\} \text{यह समीकरण हुआ}$$

$$\begin{aligned} ४०० &= ४ या \\ १०० &= या = १ घोड़े का मूल्य \end{aligned}$$

उदाहरण नं० (२) दोनों का धन

$$६ या + ३०० = १० या - १००$$

अब यहां पहिले धन का आधा दो से जोड़ा हुआ दूसरे के धन के बराबर है । तब अश्व का मूल्य

$$३ या + १५२ = १० या - १००$$

$$१५२ + १०० = १० या - ३ या$$

$$२५२ = ७ या$$

$$३६ = या = \text{एक घोड़े का मूल्य}$$

द्वितीय उदाहरण के अन्तर्गत तीसरे उदाहरणार्थ वही धन यहां पहिले के

$$\begin{aligned} या ६ + ३०० &= १० या - १०० \\ या २ + १०० &= १० या - १०० \\ १०० + १०० &= ८ या \\ २०० &= ८ या \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} या ६ + ३०० &= १० या - १०० \\ या २ + १०० &= १० या - १०० \\ १०० + १०० &= ८ या \\ २०० &= ८ या \end{aligned}} \right\} \text{धन का तीसरा हिस्सा दूसरे का धन कहा है ।}$$

$$२५ = या = \text{यह एक घोड़े का मूल्य हुआ ।}$$

विशेष उदाहरण नं० (१) ३ या + ५ = या + १९ है यहां अज्ञात राशि या का मान मालूम करना है ।

$$\begin{aligned} ३ या + ५ &= या + १९ \\ ३ या - या &= १९ - ५ \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} ३ या + ५ &= या + १९ \\ ३ या - या &= १९ - ५ \end{aligned}} \right\} \text{समशोधन करने में}$$

$$२ या = १४, या = ७$$

उदाहरण नं० (२) (या + २) (३ या + ४) - ६ या =

$$१० + (३ या + २) (या + १) \text{ यहां या का मान जानना है}$$

$$\therefore (या + २) (३ या + ४) - ६ या = १० + (३ या + २) (या + १)$$

$$\text{वा, } ३ या^२ + १० या + ८ - ६ या = ३ या^२ + ४ या + ८$$

$$\text{तथा } १० + ३ या^२ + ५ या + २ = ३ या^२ + ५ या + १२$$

उपरोक्त समीकरण का स्वयं यह स्वरूप हुआ:—

$$३ या^२ + ४ या + ८ = ३ या^२ + ५ या + १२$$

$$वा, ४ या + ८ = ५ या + १२$$

$$४ या - ५ या = १२ - ८, - या = ४$$

$$- ४ = या \quad \text{के समान हो गया।}$$

$$\text{उदाहरण नं० (३)} \quad \frac{या - ६}{८} - \frac{२ या - १५}{९} + १ = \frac{या}{१५} - \frac{या - १२}{६}$$

या का मान निकालो।

$$\frac{या - ६}{८} - \frac{२ या - १५}{९} + १ = \frac{या}{१५} - \frac{या - १२}{६}$$

दोनों पक्षों के हरों का लघुतम समापवर्त्य निकाल कर समीकरण किया इस लिये लघुतम समापवर्त्य = ३६०

$$\frac{३६० (या - ६)}{८} - \frac{३६० (२ या - १५)}{९} + ३६० =$$

$$\frac{३६० या}{१५} - \frac{३६० (या - १२)}{६}$$

$$४५ (या - ६) - ४० (२ या - १५) + ३६० = २४ या - ६० (या - १२)$$

$$४५ या - २७० - ८० या + ६०० + ३६० = २४ या - ६० या + ७२०$$

$$- ३५ या + ६९० = - ३६ या + ७२०$$

$$= - ३५ या + ३६ या = ७२० - ६९०$$

$$\therefore या = ३०$$

$$\text{उदाहरण नं० (४) यदि } \frac{या}{क+ख} + १ = \frac{या}{क-ख} + \frac{क-ख}{क+ख}$$

यहां पर या का मान निकालना है।

यहां पर $क^२ - ख^२$ यह हरों का लघुतम समापवर्त्य हुआ

$$\therefore (क-ख) या + क^२ - ख^२ = (क+ख) या + (क-ख)^२$$

$$\therefore (क-ख) या - (क+ख) या = (क-ख)^२ - (क^२ - ख^२)$$

$$\text{अथवा } या \{ (क-ख) - (क+ख) \} = -२ क ख + २ ख^२$$

$$\text{अथवा } (-१) या = -(क-ख)$$

$$\therefore या = (क-ख)$$

(७) समीकरण के अभ्यासार्थ उदाहरणमाला

निम्नलिखित प्रश्नों में y का मान जानना है ।

$$१. २ (या - १५) = ५ (या - ११) + ४$$

$$२. १६ - ३ या = ५ या + ३५$$

$$३. ३ या - १३ (२ या - १३) = ४ या - २०$$

$$४. (या - ५) (या + ३) = (या - ७) (या + ४)$$

$$५. \frac{या + १}{४} - \frac{या - १}{५} = १$$

$$६. \frac{२ या}{५} + \frac{या - २}{३} = २ य - ७$$

$$७. \frac{३ य}{४} - \frac{२ य - ६}{३} = \frac{५ य + ८}{३} + \frac{य}{२}$$

$$८. \frac{१}{३} (य + १) + \frac{१}{३} (य - १) - \frac{१}{३} (३ य - ७) = २$$

$$९. \frac{य}{७} - य - \frac{१ - य}{२} + १ = ०$$

$$१०. \frac{२ य + ७}{३} - \frac{३ य + ५}{७} = १० - \frac{३ य}{५}$$

$$११. \frac{३ य - २}{५} + \frac{४ य - १}{७} - \frac{१० य}{६} = ५ (य - ६) + ३ - \frac{य}{३}$$

$$१२. \frac{य + ५}{६} + \frac{१}{६} \left(\frac{य}{२} + \frac{३}{३} \right) - \frac{१}{३} (३ + २ य)$$

$$= \frac{४ य - १४}{३} + \frac{य + १०}{१०}$$

y की क्या कीमत रखो जाय कि निम्नलिखित मानशून्य हो जाय ।

$$१३. \frac{य - ३}{४} = \frac{२ (य - ७)}{३} + \frac{य + ६}{१२}$$

$$१४. \frac{२ य + १}{३} - \frac{य + ६}{५} = (य - ३)$$

$$१५. \frac{७ य - १}{४} = \frac{१}{३} \left(२ य - \frac{१ - य}{२} \right) + \frac{१}{३}$$

उदाहरणम्—

माणिक्यामलनीलमौक्तिकमितिः पञ्चाष्ट सप्त क्रमा-

देकस्यान्यतरस्य सप्त नव षट् तद्रत्नसंख्या सखे ।

रूपाणां नवतिर्द्विषष्टिरनयोस्तौ तुल्यवित्तौ तथा

बीजज्ञ प्रतिरत्नजानि सुमते मौल्यानि शीघ्रं वद ॥ ३ ॥

अत्राव्यक्तानां बहुत्वे कल्पितानि माणिक्यादीनां मौल्यानि *
या ३ । या २ । या १ । यद्येकस्य रत्नस्येदं मौल्यं तदोद्दिष्टानां किमिति
लब्धानां यावत्तावतां योगे स्वस्वरूपयुते जातौ पक्षौ ।

या १५ । या १६ । या ७ । रु ९०

या २१ । या १८ । या ६ । रु ६२

एते अनयोर्धने इति समशोधने कृते लब्धं यावत्तावन्मानम् ४ ।

अनेनोत्थापितानि माणिक्यादीनां मौल्यानि १२।८।४ । एवं सर्वधने २४२ ।

अथवा माणिक्यमानं यावत्तावन्नीलमुक्ताफलयोर्मौल्ये व्यक्ते एव
कल्पिते ५।३ । अतः समीकरणेन लब्धं यावत्तावन्मानं १३ । अनेनो-
त्थापिते जातं समधनं २१६ । एवं कल्पनावशादनेकधा ।

भाषा—एक व्यापारी के पास पांच माणिक्य, आठ नीलम, सात मोती और
नब्बे रुपये हैं । दूसरे के पास सात माणिक्य, नौ नीलम, छ मोती और बासठ
रुपये हैं, परन्तु वे दोनों व्यापारी धन में समान हैं, तो कछो हर एक रत्न का
क्या मूल्य है ।

यहाँ पर अनेक अव्यक्त हैं, इसलिये माणिक्य आदिक रत्नों के मूल्य क्रम से
३ या, २ या, १ या कल्पना किये । यदि एक माणिक्य का ३ या मोल है तो

• संशो • श्यं कल्पना न साध्वी । एतादृशी कल्पना तदैव समुचिता यदा मौक्तिकमिते-
द्विगुणं मानं नीलस्य तथा त्रिगुणितं मानं माणिक्यस्य भवति परञ्चोदाहरणे तथा किमपि नोच्यते ।
यदि एतेषां रत्नानां स्वतन्त्रं मूल्यं तदेदमुदाहरणं नैकवर्णसमीकरणस्य विषयः अत्रापवानेकवर्ण-
समीकरणेऽपि इदमुदाहरणमुपस्थाप्याऽऽचार्येण वास्तवप्रकारेण मानानयनं कृतम् । खत्र तु बुद्धि-
धनैर्मास्त्राचार्यैर्नैकवर्णसमीकरणस्यापि विषयः एकवर्णसमीकरणभाजेन संसाधितः यतो
बुद्धिरेव पारमार्थिकं बीजम् ।

५ का क्या होगा। इस प्रकार पाँच माणिक्य का मोल या १५ हुआ, इसी प्रकार त्रैराशिक के द्वारा आठ नीलम और सात मोती, इनके मोल या १६, या ७ हुए, इन अव्यक्तों के योग या $३८ + ९० = १२८$ हुए यह पहिले का धन हुआ। इसी प्रकार यदि एक माणिक्य का दाम ३ या है तो सात का क्या इसलिये सात माणिक्य का मूल्य २१ या हुआ। इसी प्रकार नौ नीलम का १८ या हुआ, ६ मोती का, ६ या हुआ। इन अव्यक्तों का योग करने से ४५ या $+ ६२ = १०७$ यह दूसरे का धन हुआ, ये दोनों पक्ष समान हैं।

$$\text{या } ३८ + ९० = \text{या } ४५ + ६२$$

$$९० - ६२ = \text{या } ४५ - \text{या } ३८ = \text{या } ७$$

$$\therefore ४ = \text{या}$$

इसलिए यहाँ समीकरण किया से यावत्तावत् का मान ४ आया, अब इससे माणिक्य आदि के मोलों में उत्थापन देने से यदि एक अव्यक्त का मूल्य ४ है तो यावत्तावत् ३ का क्या, इसलिए माणिक्य का १२ हुआ, इसी प्रकार यावत् दो और यावत् के मोल क्रमशः ८४ हुए इसलिए क्रमशः १२।८४ हुए, पुनः यदि एक माणिक्य का १२ मोल है तो ५ का क्या तो ६० मोल आया, आठ नीलम का ६४ हुआ और सात मोतियों का मूल्य २८ हुआ। इनके योग $१५२ + ९० = २४२$ हुए और इसी प्रकार दूसरे के रत्नों के मोल क्रमशः या ८४ नी ७२, मोती २४ इनका योग १८० हुआ इसमें ६२ ६० जोड़ने से २४२ हुए यह दूसरे का धन आया, अब पहिले का धन और दूसरे का धन बराबर है।

अथवा माणिक्य का मान यावत्तावत् एक कल्पना किया था और नीलम, मोती के मान क्रमशः व्यक्त ५।३ कल्पना किये। अब यदि एक माणिक्य का या १ मूल्य है तो पाँच का क्या, इस प्रकार ५ या मूल्य हुआ, इस प्रकार नीलम और मोती के दाम, क्रमशः ४०।२१ हुए इनका योग ६१ रूप हुआ, यदि एक माणिक्य का या १ तो सात का क्या ७ या हुआ, तथा नीलम और मोती के मोल ४५।१८ हुए इनका योग ६३ हुआ रूप जोड़ने से दोनों पक्ष बराबर हैं।

$$\therefore ५ \text{ या } + \text{रु } ६१ + ९० = \text{या } ७ \text{ रु } ६३ + ६२$$

$$५ \text{ या } + १५१ = ७ \text{ या } + १२५$$

$$१५१ - १२५ = ७ \text{ या } - ५ \text{ या}$$

$$२६ = २ \text{ या}$$

$$१३ = \text{या}$$

उदाहरणम्

एको ब्रवीति मम देहि शतं धनेन

त्वत्तो भवामि हि सखे द्विगुणस्ततोऽन्यः ।

ब्रूते दशार्पयसि चेन्मम षड्गुणोऽहम्

त्वत्तस्तयोर्वद धने मम किं प्रमाणे ॥ ४ ॥

व्याख्या—हे सखे, यदि शतं शतसंख्याकं धनं मम देहि तदा त्वत्तो धनेन द्विगुणोऽहं भवामि । हि, इति पाद पूरणे इत्येको ब्रवीति, ततोऽन्यस्तं प्रति ब्रूते यदि त्वं मम दशार्पयसि तदा त्वतः षड्गुणोऽहं भवामि, इति तयोः किं प्रमाणे धने इति वद ।

न्यासः—अत्र कल्पिते आद्यधने* या २ रु १०० ।

या १ रु १००°

अनयोः परस्य शते गृहीते आद्यो द्विगुणितः स्यादित्येकालोपो घटते । अथाद्यादशपनीय दशभिः परधनं युतं षड्गुणं स्यादित्याद्यं षड्गुणीकृत्य न्यासः—

या १२ । रु ९६०

या १ । रु ११०

* संशो श्यमपि प्रथमाणापयुक्तकल्पना न युक्ता । समीकरणे कल्पना तादृशी समुचिता यस्या कुत्रापि न व्यभिचारः । यथात्र कल्प्यते आद्यद्वितीयधने या, का ।

तदाऽऽपादानुसारेण प्रथमसमीकरणम् या + १०० = २ (का - १००)

तथा द्वितीयसमीकरणम् का + १० = ६ (या - १०)

प्रथमसमीकरणात् या = २ का - २०० (१)

द्वितीयसमीकरणात् या = $\frac{का + ७०}{६}$ (२)

ततः (१), (२) अनयोः समीकरणेन का = १७०

ततः या = ४०

अत्रान्यक्तद्वयकल्पनां दृष्ट्वैव अन्यकारेण सुकरः पन्थाः परित्यक्तः । अनेकवर्णसमीकरणे यतादृशस्योदाहरणस्य स्थापनमनुक्रमेण कृतत्वेन न कुट्टस्य प्रवृत्तिः ।

अतः समीकरणेन लब्धं यावत्तावन्मानम् ७० ।

अनेनोत्थापिते जाते धने ४०।१७०

भाषा—एक मनुष्य दूसरे से कहता है कि हे मित्र ? यदि तुम सौ रुपये मुझे दे दो तो मैं तुमसे धन में दुगुना हो जाऊँगा। फिर दूसरे ने कहा कि हे मित्र ? यदि तुम मुझे १० दश ही रुपये दे दो तो मैं तुम्हारे धन से छ गुना हो जाऊँ। तो बताओ उन दोनों के धन क्या हैं।

यहाँ पर दोनों का धन इस प्रकार कल्पना किया कि जिससे एक आलाप स्वतः ही घटता रहे। जैसे या २ - रु १०० तथा या १ + रु १००

इसमें यह बात स्पष्ट है कि पहिले मनुष्य के पास यदि १०० रुपये दूसरे के पास से आ जाते हैं तो पहिले का १०० रु का ऋण निकल जाता है और दूसरे के पास से १०० रु चल जाने पर केवल या १ ही रह जाता है तो पहिला धन दूसरे धन से दूना हो जाता है। अब यदि पहिले के पास से १० रु निकल जाते हैं और दूसरे के पास जमा हो जाने से पहिले का धन २ या - ११० होता है और दूसरे का धन या + ११० होता है। इस अवस्था में पहिले धन से दूसरा धन छ गुना होता है, इसलिए समीकरण

$$६ (२ या - ११०) = या + ११०$$

$$१२ या - ६६० = या + ११०$$

$$११ या - या = ११० + ६६०$$

$$११ या = ७७० अतः या = ७०$$

अब यहाँ समीकरण करने से यावत्तावत् का मान ७० आया, यदि एक यावत्तावत् का व्यक्तमान ७० है तो दो का क्या, तो १४० आया इसमें १०० घटाये तो ४० हुए। इसी प्रकार दूसरे पक्ष में उत्थापन देने से १७०। ये दोनों के धन क्रमशः ४०।१७०। यहाँ १७० में से १०० निकालने से ७० बचा दूसरे में जुड़ जाने से १४० हुआ, यह ७० से दूना है। तथा पहिले में से १० घटाया ३० हुए दूसरे १० जोड़ा १८० हुए ये ३० से छ गुना है।

अथवा, जिस प्रकार दूसरा आलाप घटित होवे वैसे दोनों के धन कल्पना किये। इसलिये, या १ रु १०, या ६ - १० रु यहाँ पर पहिले धन में १० घटाने से दूसरे का धन पहिले धन छ गुना हो जाता है। यह आलाप यहाँ स्वतः ही घट गया, अब दूसरे आलाप के लिये न्यास—

$$या १ + रु ११० = (या ६ - रु ११०) २$$

$$या १ + ११० = १२ या - २२०$$

$$११० + २२० = १२ या - या$$

$$३३० = ११ या अतः ३० = या$$

यावत् का मान ३० आया, इससे दोनों पक्षों में उत्थापन दिया तो क्रमशः ४०।१७० ये धन आये ।

उदाहरणम्—

माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं
यत्ते कर्णविभूषणे समधनं क्रीतं त्वदर्थे मया ।
तद्रत्नत्रयमूल्यसंप्रुतिमितिस्त्वनं शतार्धं प्रिये
मौल्यं ब्रूहि पृथग्यदीह गणिते कल्यासि कल्याणिनि ॥५॥

अत्र समधनं यावत्तावत् १ । यदाष्टानां माणिक्यानामिदं
मौल्यं तदैकस्य किमिति एवं त्रैराशिकेन सर्वत्र मौल्यानि ।

या $\frac{१}{८}$ । या $\frac{१}{१०}$ । या $\frac{१}{१००}$ । एषां योगः सप्तचत्वारिंशता सम

इति संमशोधनार्थं न्यासः । या $\frac{४७}{२००}$ । ६०

या ९ । ६० ४७

एतौ पक्षौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे समीकरणेन लब्धं यावत्ताव-
न्मानं २०० । अनेनोत्थापितानि जातानि रत्नमौल्यानि २५ । २० । २ ।
समधनं २०० । एवं कर्णभूषणे रत्नमौल्यं ६०० ।

अत्र समच्छेदीकृत्य शोधनार्थमाद्यपक्षेण परपक्षे द्वियमाणे छेदांश-
विपर्यासे कृते परस्य छेदो गुणोऽशो हरश्चेति तुल्यत्वाच्चयोर्नाशो भवि-
ष्यतीति छेदगमः क्रियते ।

व्याख्या—हे कल्याणि, कल्याणविशिष्टे, त्वं चेत् अव्यक्तगणिते
कल्या चतुरासि तर्हि तेषां रत्नानां मध्ये एकैकस्य रत्नस्य मूल्यं पृथग्
भिन्नं ब्रूहि आख्याहि, यत् रत्नत्रयं ते तव कर्णविभूषणे, कर्णयोरलङ्कारे
माणिक्यानामष्टकमिन्द्रनीलानां दशकं मुक्ताफलानां शतं वर्तते । किं
लक्षणम्, त्वदर्थे समधनं समानमूल्यं मया क्रीतम्, समधनमित्यस्या-

शयस्तु यन्माणिक्याष्टकस्य मूल्यं तदेवेन्द्रनीलदशकस्य तदेव मुक्ताफल-
शतस्येति, हे प्रिये ? तेषां रत्नानां यत्त्रयं तस्य यानि मूल्यानि, तेषां
युतिः त्र्यूनं शतार्धं सप्तचत्वारिंशत् वर्तते ।

भाषा—किसी ने समान मूल्यका आठ माणिक्य, दश नीलम और सौ मोती
खरीदे और उन तीनों रत्नों के मोल का योग सैंतालीस है तो बताओ हर एक
रत्नों का मोल क्या होगा ।

यहां क्रिया में माणिक्य आदिकों के मूल्य कल्पना करने से किया का निर्वाह
नहीं होता है, इसलिए समघन का मान यावत्तावत् कल्पना किया । यदि आठ
माणिक्य का या १ मोल है तो एक का क्या इस प्रकार त्रैशिक से हर एक
रत्नों के मोल कम से—

$\frac{या}{८}, \frac{या}{१०}, \frac{या}{१००}$ इनका योग किया तो $\frac{४७ या}{२००}$ हुआ यह सैंतालीसके
समान है ।

$$\frac{४७}{२००} या = ४७ \quad \therefore ४७ या = २०० \times ४७ \text{ अतः } या = २००$$

समीकरण करनेसे यावत्तावत् का मान २०० हुआ यदि आठ माणिक्य का
२०० तो एक का क्या $= \frac{३००}{८} = २५$ आया एवं १० नीलम का २०० समघन है
तो एक का क्या $= २०$ हुआ । एवं यदि सौ मोती का २०० समघन है तो १
का क्या २ हुआ । इस प्रकार कम से २५, २०, २ इनका योग ४७ आया । एक
माणिक्य का २५ मूल्य है तो ८ का क्या २०० आया इसी प्रकार १ नीलम का
२० मोल है तो १० का क्या यों दश का मूल्य २०० आया, इसी प्रकार एक
मोती का मूल्य २ है तो १०० मोती का क्या २०० आया इस प्रकार ये समान
घन आते हैं । इनका योग ६०० सब रत्नों का मोल हुआ ।

उदाहरणम्—

पञ्चांशोऽलिकुलात्कदम्बमगमत् त्र्यंशः शिलीन्ध्रं तयो-
र्विश्लेषस्त्रिगुणो मृगाक्षि कुटजं दोलायमानोऽपरः ॥

कान्ते केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रिया—

दूताहृत इवस्ततो भ्रमति खे भृङ्गोऽलिसंख्यां वद ॥६॥

व्याख्या—स्पष्टोऽयमर्थः—

अत्रालिकुलप्रमाणं यावत्तावत् १ । अतः कदम्बादिगताल्लिप्रमाणं यावत्तावत् $\frac{१५}{३}$ एतददृष्टेन भ्रमरेण युतमलिप्रमाणमिति ।

न्यासः । या $\frac{१५}{३}$ । रू १

या १ । रू०

एतौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे पूर्ववल्लब्धं यावत्तावन्मानं १५ । एतदलिप्रमाणम् ।

भाषा—एक भ्रमरों के समुदाय में से उसका पञ्चमांश कदम्ब को गया, और तृतीयांश शिलीन्ध्र नामक पुष्प पर गया, और इन दोनों भागों का अन्तर त्रिगुणित कुटज नामक पुष्प पर चला गया केवल एक भ्रमर केतकी और मालती की सुगन्धि में लुब्ध हुआ, आकाश में भ्रमण कर रहा था तो बताओ भ्रमरों की संख्या क्या है ।

न्यास—यहां अब भ्रमरों के समुदाय का मान यावत्तावत् १ कल्पना किया ।

इसलिये या १ का पञ्चमांश = $\frac{\text{या}}{५}$ कदम्ब को गया, $\frac{\text{या}}{३}$ शिलीन्ध्र को गया ।

∴ $\frac{\text{या}}{३} - \frac{\text{या}}{५} = \frac{५ \text{ या} - ३ \text{ या}}{१५} = \frac{२ \text{ या}}{१५}$ यह उपरोक्त भागों का अन्तर

आया, इसको ३ से गुणा किया $\frac{३ \times २ \text{ या}}{१५} = \frac{२ \text{ या}}{५}$ यह कुटज पर चला गया ।

∴ तीनों का योग = $\frac{\text{या}}{५} + \frac{\text{या}}{३} + \frac{२ \text{ या}}{५}$
 $= \frac{३ \text{ या} + ५ \text{ या} + ६ \text{ या}}{१५} = \frac{१४ \text{ या}}{१५}$

∴ $\frac{१४ \text{ या}}{१५} + १ = \text{या}$

• संशो० । कदम्बस्य पुष्पं कदम्बम् । शिलीन्ध्रयाः पुष्पं शिलीन्ध्रम् । (चोरसदृश) कोषधिविशेषः) । कुटजो गिरिमल्लिका । तस्य पुष्पं कुटजम् । केतक्याः पुष्पं केतकम् । मालत्याः पुष्पं मालती । तयोः परिमलौ । प्राप्त एककालौ याभ्यां तौ प्राप्तैककालौ तौ च तौ प्रियादूतौ च प्राप्तैककालप्रियादूतौ केतकमालतीपरिमलौ प्राप्तैककालप्रियादूताविष केतकमालतीपरिमलप्राप्तैककालप्रियादूतौ । ताभ्यामाहृतः स तथा ।

$$१४ या + १५ = १५ या$$

$$१५ = १५ या - १४ या = या १$$

यावत्तावत् का मान १५ आया यही भ्रमरोंके समूह की संख्या है ।

अथान्योक्तमप्युदाहरणं क्रियालाघवार्थं प्रदर्श्यते ।

पञ्चकशतदत्तधनात्फलस्य वर्गं विशोध्य परिशिष्टम् ।

दत्तं दशकशतेन तुल्यः कालः फलं च तयोः ॥७॥

न्यासः— अत्र काले यावत्तावत्कल्पिते क्रिया न निर्वहति* इत्यतः

कल्पिताः पञ्चमासाः मूलधनं यावत्तावत् १ ।

* संशो० । कालस्य माने यावत्तावत्कल्पिते क्रियायाः न निर्वाह इति तावत्प्रदर्श्यते ।

कल्प्यते काळमानं या, प्रथमधनप्रमाणं च का तदा पञ्चराशिकेन

$$\frac{१ या}{१०० का छव्यं फलम्} = \frac{५ या'का}{१००} = \frac{या'का}{२०} \text{ अत्य वर्गः } \frac{या^२का^२}{४००}$$

$$\text{प्रथमधनप्रमाणे विशोध्य जातं द्वितीयं धनम्} = का - \frac{या^२का^२}{४००}$$

$$= \frac{४०० का - या^२का^२}{४००} \text{ तदा द्वितीयपरः राशिकम् } \frac{१}{१००} \frac{या}{४०० का - या^२का^२}$$

$$\text{छव्यं द्वितीयफलम्} = \frac{१० या \frac{४०० का - या^२का^२}{४००}}{१००}$$

$$= \frac{४०० या का - या^३का^२}{४०००} \text{ इदं प्रथमफलसमं तेन}$$

$$\frac{४०० या का - या^३का^२}{४०००} = \frac{या का}{२०}$$

वा, $४०० - या^२ का = २००$ $\therefore २०० = या^२ का$ अतोऽत्रे याक्तावन्माना-
नयनाय षड्कल्पनमेवोपायः अतोऽत्र यदि या = ५ तदा का = ८ अतएव आदावेवाचार्येण
काळमानं ५ प्रकल्पितम् ।

१ ५

अस्मात्पञ्चराशिकेन न्यासः । १०० या १ लब्धं फलं याव-

५ ०

चावत् $\frac{१}{४}$ । अस्य वर्गः यावत् $\frac{१}{४}$ । मूलधनात्समच्छेदेन शोधिते जातं
द्वितीयमूलधनं $\frac{\text{यावत् } १ \text{ या } १६}{१६}$ अत्रापि मासपञ्चकेन पञ्चराशिके कृते

१ ५

न्यासः । १०० यावत् १ या १६ लब्धं फलं यावत् १ या १६ । एत-

१० ० १६ ३२

त्पूर्वफलस्यास्य या $\frac{१}{४}$ सममिति पक्षौ यावत्चावत्तापवर्त्य समशोधनाय

पक्षयोर्न्यासः । $\frac{\text{या } १ \text{ रू } १६}{३२}$

या ० । रू $\frac{१}{४}$

प्राग्वल्लब्धं यावत्चावन्मानं ८ एतन्मूलधनम् ।

* अथवा प्रथमप्रमाणफलेन द्वितीयप्रमाणफले विभक्ते यल्लभ्यते तद्-

० संशो० । अत्रोपपत्तिः । प्रथमधनं पञ्चराशितव्यवस्थया दत्तं द्वितीयञ्च दशराशितव्यवस्थया
द्वयोः काल एक एव फलं च सममित्यनेन स्पष्टमवबुध्यते यत् प्रथमद्वितीयप्रमाणफलयोः यः संबन्धः
स एव द्वितीयप्रथमधनयोः । अत्रद्वयोः कयोरपि धनयोर्ज्ञानं नास्ति केवलमेतदेव ज्ञायते यत् प्रथम-
द्वितीय प्रमाणफलयोः संबन्धेन यदि द्वितीयं धनं गुण्यते तदा प्रथमधनसमं भवति । तथा च
प्रथमफलवर्गो यदि द्वितीयधने योज्यते तथापि प्रथमधनसमं भवति तेन कल्प्यते प्रथमधनम् =
प्र०ध, द्वितीयधनम् = द्वि०ध, प्रमाणफलयोः संबन्धः = गु, तदा प्र०ध = द्वि०ध × गु
तथा प्र०ध - द्वि०ध = फलवर्गः अथवा फ^२ = द्वि०ध × गु - द्वि०ध (गु - १)
∴ द्वि०ध = $\frac{\text{फ}^२}{\text{गु} - १}$ अत्र फलवर्गमिदं प्रकलय द्वितीयधनं प्रसाध्य पुनस्तत्र फलवर्गे
संयोज्य प्रथमधनं ज्ञेयम् । अत उपपन्नं मूलोक्तं गद्यम् । अत्र प्रकारयोर्मध्ये न विरिष्टं वैलक्षण्यं
यतः प्रकारयोरपि स्पष्टकल्पनां विहाय न निर्वाहः । केवलं द्वितीयप्रकारे यावत्कल्पनां विहाय
व्यक्तगणितवत्सिद्धिर्भवतीत्येव पूर्वस्माद्विशेषः ।

गुणगुणितेन द्वितीयमूलधनेन तुल्यमेव प्रथममूलधनं स्यात् । कथमन्यथा समे काले समं फलं स्यात् । अतो द्वितीयस्यायं गुणः २ । एकगुणं द्वितीयमूलधनमेकोनगुणगुणितं फलवर्गे वर्त्तते अत एकोनगुणेन दृष्ट-कल्पितकलान्तरस्य वर्गे भक्ते द्वितीयमूलधनं स्यात् तत्फलवर्गयुतं प्रथममूलधनं स्यात् । अतः कल्पितफलवर्गः ४ । अतः प्रथम द्वितीयमूलधने ८।४ । फलं २ । यदि शतस्य पञ्च कलान्तरं तदाष्टानां किमिति लब्धमेकमासेऽष्टानां फलम् $\frac{३}{५}$ । यद्यनेनैको मासस्तदा द्विकेन किमिति लब्धा मासाः ५ ।

व्याख्या—प्रतिमासं पञ्चवृद्धिर्यस्येति पञ्चकम् । तादृशं यच्छतं तेन प्रमाणेन दत्तं यत्नं तस्य यत् किमपि कालजं फलं कलान्तरमित्यर्थः, तस्य कलान्तररूपफलस्य वर्गं मूलधनाद्विशोध्य यद्विशिष्टं धनं तद्विशक-शतेन, प्रतिमासं दशवृद्धिर्यस्येति दशकम्, दशकं च तच्छतं च दशक-शतं तेन प्रमाणेन दत्तम्, तयोः प्रथमद्वितीययोर्मूलद्रव्ययोस्तुल्ये काले तुल्यमेव च फलम् । अस्यां परिस्थितौ ते के धने इति वद,—

भाषा—सौ रुपये पर ५ पांच रुपये व्याज की दर से दिये हुए धन का व्याज जो होता है उसके वर्गको मूलधन में घटा देने से जो शेष धन बचा उसको दश रुपये सैकड़े के व्याज पर दिया और उन दोनों मूलधनों का काल और व्याज समान है तो बताओ उनका प्रमाण क्या है ।

क्रिया—यहाँ काल का मान यावत्तावत् कल्पना करने से क्रिया का निर्वाह नहीं होता इसलिये काल का मान ५ पांच मास और मूलधन यावत्तावत् १ कल्पना किया, फिर यदि एकमास में सौ का पांच व्याज मिलता है तो पांच महीने में यावत्तावत् एक का क्या मिलेगा ।

∴ १००) पर १ मास में = ५) रुपये व्याज है ।

∴ १००) ,, ५ = २५) व्याज हुआ ।

∴ या ,, = $\frac{२५}{१००}$ या = $\frac{१}{४}$ हुआ ।

∴ यावत्तावत् का ५ मास का व्याज = $\frac{५}{४}$ भागा ।

$$\therefore \frac{\text{या}}{४} \text{ इस फल का वर्ग} = \frac{\text{या}^२}{१६} \text{ इसे मूलधन में घटाया तो या} - \frac{\text{या}^२}{१६} \\ = \frac{१६ \text{ या} - \text{या}^२}{१६} \text{ आया।}$$

फिर $\therefore १००$) पर १ मास में = १०) व्याज है।

$$\therefore १००) \text{ पर } ५ = ५०) \text{ आया।}$$

$$\therefore १ \text{ ,, } = \frac{५०}{१००} \text{ आया।}$$

$$\therefore \frac{१६ \text{ या} - \text{या}^२}{१६} \text{ ,, } = \frac{(१६ \text{ या} - \text{या}^२) \times ५०}{१०० \times १६}$$

$$\therefore \frac{१६ \text{ या} - \text{या}^२}{३२} \text{ यह व्याज पहिले } \frac{\text{या}}{४} \text{ व्याज के समान है।}$$

$$\therefore \frac{१६ \text{ या} - \text{या}^२}{३२} = \frac{\text{या}}{४}$$

$$\therefore ४ (१६ \text{ या} - \text{या}^२) = ३२ \text{ या}$$

$$६४ \text{ या} - ४ \text{ या}^२ = ३२ \text{ या}$$

$$६४ - ३२ = ४ \text{ या}$$

$$३२ = ४ \text{ या } ८ = \text{या}$$

यावत्का अपवर्तन देने से

दोनों पक्ष इस प्रकार हुए।

इसलिये यावत्का मान = ८ आया यह पहिला मूलधन हुआ दूसरे मूल

$$\frac{१६ \text{ या} - \text{या}^२}{१६} \text{ में उत्थापन देने से } \frac{१६ \times ८ - ६४}{१६} = \frac{१२८ - ६४}{१६} = \frac{६४}{१६} = ४$$

यह दूसरा मूलधन आया। इस पर पहिला दूसरा व्याज २।२ हुए। अब व्यक्तगणित की रीति से स्पष्ट करते हैं।

पहिले प्रमाणफल में दूसरे प्रमाणफल का भाग देने से जो लब्धि आती है उससे गुणे हुए दूसरे मूलधनके तुल्य पहिला मूलधन होता है। नहीं तो समान काल में समान फल कैसे हो सकता है। इसलिये दूसरे धन का गुण २ है। और दूसरा धन एकोन-गुण गु १ - ४ १ से गुण देने से यह फलवर्ग का स्वरूप हुआ, इसलिये फल वर्ग ४ में एकोनगुण १ का भाग देने से दूसरा धन ४ आया इसमें फल २ के वर्ग ४ को जोड़ देनेसे पहिला धन ८ हुआ। इसलिये कल्पितफलवर्ग ४ है। इस प्रकार दोनों मूलधन ८।४ हुए। और फल २ है। यदि सौ का पांच व्याज मिलता है तो आठ का क्या, इस प्रकार ८ क व्याज = $\frac{५ \times ८}{१०} = \frac{४०}{१०} = ४$ आया यदि इतने व्याज में १ मास तो २ व्याज में कितना समय तो ५ मास आये इसलिये आलाप में भी व्यक्तगणित के नियम से बह हुआ।

उदाहरणम्—

एककशतदत्तधनात्फलस्यवर्गं विशोध्य परिशिष्टम् ।

पञ्चकशतेन दत्तं तुल्यः कालः फलं च तयोः ॥ ८ ॥

अत्र गुणकः ५ । एकोनगुणेन ४ इष्टफलस्यास्य वर्गे १६ भक्ते जातं द्वितीयधनम् ४ । इदं फलवर्गयुतं जातं प्रथमधनम् २० । अतोऽनुपातद्वयेन कालः २० ।

एवं स्वबुद्धयैवेदं सिद्धयति किं यावत्तावत्कल्पनया । अथवा बुद्धिरेव बीजम् । तथा च गोले मयोक्तम् । नैव वर्णात्मकं बीजं न बीजानि पृथक् पृथक् । एकमेव मतिर्वीजमनरुपा कल्पना यतः ॥

व्याख्या—एको वृद्धिरस्य तदेककम्, एककं च तच्छतं एककशतम्, अनया व्यवस्थया दत्तं प्रयुक्तं यद्धनं ततो यल्लब्धं फलं कलान्तरं तस्य वर्गं मूलधनाद्विशोध्य परिशिष्टधनं पञ्चकशतेन दत्तं, कलान्तरार्थं निक्षिप्तम् तयोः प्रथमद्वितीययोर्मूलधनयोः कालस्तुल्यः फलमपितुल्यं तदा ते धने के इति निरूपणीये ।

भाषा—एक रुपया सैऋ के व्याज पर दिये हुए धन का जो व्याज हो उसके वर्गको मूलधन में घटा देने पर जो शेष धन रहता है उसे पांच रुपये सैऋ के व्याज पर दिया और दोनों का काल और व्याज समान है तो कहो उसका क्या मान है ।

यहां गुणक ५ है, एकोनगुणक ४ को कल्पित फल ४ के वर्ग १६ में भाग देने से दूसरा मूलधन ४ आया है, इसमें फलवर्ग १६ जोड़ देने से पहिला मूलधन २० हुआ । अब इससे कालका आनयन करते हैं । यदि सौका एक रुपया व्याज है तो बीस रुपये का क्या, वो एकमास में पहिले मूलधन का व्याज $16 \times 20 = 1$ हुआ, यदि हम व्याज में एक महीना तो कल्पना किये हुए चार व्याज में क्या, इस प्रकार काल $1 \times 1 \times 4 = 4$ आया इस प्रकार यह उदाहरण बुद्धि से ही स्पष्ट हो जाता है, फिर यावत्तावत् कल्पना की क्या आवश्यकता है ।

उदाहरणम्—

माणिक्याष्टकमिन्द्रनीलदशकं मुक्ताफलानां शतं
सद्वज्राणि च पञ्च रत्नपणिजां वेनां पतुर्णा धनम् ।

सङ्गस्नेहवशेन ते निजधनाद्वैकमेकं मिथो

जातास्तुल्यधनाः पृथग्वद सखे तद्रत्नमौल्यानि मे ॥९॥

अत्र यावत्तावदादयो वर्णाः अव्यक्तानां मानानि कल्प्यन्त इत्युपलक्षणं
तन्नामाङ्कितानि कृत्वा समीकरणं कार्यं मतिमद्भिः । तद्यथा अन्योन्यमेकैकं
रत्नं दत्त्वा समधना जातास्तेषां मानानि ।

मा ५ नी १ मु १ व १

नी ७ मा १ मु १ व १

मु ९७ मा १ नी १ व १

व २ मा १ नी १ मु १

समानां समक्षेपे समशुद्धौ समतैव स्यात् इत्येकैकं माणिक्यादि-
रत्नं पृथक् पृथगेभ्यो विशोध्य शेषाणि समान्येवं जातानि मा ४ नी ६
मु ९६ व १ ।

यदेकस्य वज्रस्य मौल्यं तदेव माणिक्यचतुष्टयस्य नीलकण्ठकस्य
तदेव मुक्ताफलानां षण्णवतेः । अत इष्टं समधनं प्रकल्प्य पृथगेभिः शेषै-
र्विभज्य मौल्यानि लभ्यन्ते तथा कल्पितेष्टेन ९६ *जातानि मौल्यानि
माणिक्यादीनां २४ । १६ । १ । ९६ ।

भाषा—आठ माणिक्य, दशनीलम, सौ मुक्ता और पांच हीरा यह चार
व्यापारियों के पास अलग २ धन है, परस्पर प्रेम के वश उन्होंने अपने धनमें से एक
एक दूसरेको आपसमें दे दिया, इस प्रकार उन सबों का धन आपसमें बर बर हो
गया तो बताओ हर एक का क्या मूल्य है । यहाँ पर जो यावत्तावत् आदिक वर्ण
अव्यक्त राशियोंके मान कल्पना किये जाते हैं वह उपलक्षण हैं । हर एक वस्तुको
उसके नाम से लिखकर भी समीकरण कर सकते हैं । परस्पर एक एक रत्न देकर
चारों समधन हो जाते हैं—

इसलिये समानरत्न घटा देने से भी समान ही रहेंगे इसलिये शेष मा ४ नी ६
मु ९६ और व १ रहा अब जो एक वज्रका मूल्य है वही चार माणिक्य का,

* संश्लेषः ० । २४ । १६ । १ । ९६ एतेषां ऋषुतमापवर्त्यः ९६ अतएव स्वल्पतममिष्टं कल्पितम्
वेनेष्टे सर्वेषामपकर्तनं संबन्धि ।

वही ६ नीलम का वही छयानवे मुक्ताओं का है। इसलिये लघुतम समापवर्त्य विधि से समघन ९६ कल्पना किया; त्रैराशिक से प्रत्येक रत्न का मूल्य निकालते हैं यदि चार माणिक का दाम ९६ है तो १ माणिक्य का क्या = $\frac{९६ \times १}{४} = २४$ आया। यदि ६ नीलम का मोल ९६ रु० है तो १ का $\frac{९६ \times १}{६} = १६$ आया। यदि ९६ पुक्ता का मूल्य ९६ है तो एक का क्या तो १ आया, एक वज्र का मूल्य छयानवे है इसलिये क्रम से मोल = २४।१६।१।९६ एक माणिक्य का २४ मोल है तो पांच का क्या, $\frac{२४ \times ५}{१} = १२०$ हुआ, इसमें १६।१।९६ इन नीलम आदिकों के मोल को जोड़ देने से समघन २३३ आया। यदि एक नीलम का १६ मोल है तो सात का क्या $१६ \times ७ = ११२$ आये इसमें २४।९६।१ इन शेष रत्नों के मोल को जोड़ देने पर समघन २३३ हुआ। इस प्रकार ९७ मुक्ताओं के मोल ९७ में २४।९६।१ इन शेष रत्नों के मोल को जोड़ देने से समघन २३३ हुआ। तथा एक वज्र के मोल ९६ के हिसाब से २ वज्रों के दाम १९२ आये इसमें २४।९६।१ इन शेष रत्नों के दाम को जोड़ने से समघन २३३ आया।

उदाहरणम्—

पञ्चकशतेन दत्तं मूलं सकलान्तरं गते वर्षे ।

द्विगुणं षोडशहीनं लब्धं मूलं समाचक्ष्व ॥ १० ॥

अत्र मूलधनं यावत् १। अतः पञ्चराशिकेन १ १२

१०० या १

५ ०

कलान्तरं या है एतन्मूलयुतं जातं यादं । द्विगुणमूलधनस्य षोडशो-
नस्य या २। रु १६ सममिति करणेन या २ रु १६

या है रु० लब्धं मूलं ४०। कलान्तरं च २४।

भाषा—पांच रुपये सैकड़ा महीना व्याजपर दिया हुआ धन एक वर्ष के बीतने पर व्याज के साथ दो से गुणे हुए और सोलहसे हीन मूलधनके तुल्य होता है तो बताओ कितना मूलधन था।

अब यहां मूलधन का प्रमाण यावतावत् इसलिये पञ्चराशिक से व्याज—

∴ १००) पर १ मास में = ५) व्याज पाते हैं

∴ १ = $\frac{५}{१००}$ रु०

$$\therefore \text{या} \quad १२ \quad = \frac{१२ \times ५}{५} \text{ या} = \text{या} \frac{३}{५}$$

$$\therefore \text{या} + \frac{\text{या} ३}{५} = \frac{५ \text{ या} + ३ \text{ या}}{५} = \frac{८ \text{ या}}{५}$$

$$\therefore \frac{८ \text{ या}}{५} = २ \text{ या} - १६$$

$$८ \text{ या} = १० \text{ या} - ८०$$

$$८० = १० \text{ या} - ८ \text{ या}$$

$$८० = २ \text{ या} \quad \therefore ४० = \text{या}, \text{ यही मूलधन हुआ।}$$

उदाहरणम्—

यत्पञ्चकद्विकचतुष्कशतेन दत्तं

खण्डैस्त्रिभिर्नवतियुक् त्रिशती धनं तत् ॥

मासेषु सप्तदशपञ्चसु तुल्यमाप्तं

खण्डत्रयेऽपि सफलं वद खण्डसंख्याम् ॥११॥

अत्र सफलस्य खण्डस्य समधनस्य प्रमाणं * यावत्तावत् १।

* संशो० । अधवान्यथाप्यस्योत्तरम्, कल्प्यते प्रथमखण्डमानं या, द्वितीयखण्डमानं का
अतस्तृतीयखण्डमानम् ३६० - (या + का) अतः पञ्चराशिकेन

$$\frac{१}{१००} \quad \frac{७}{५} = \frac{७ \times ५ \text{ या}}{१००} = \frac{७ \text{ या}}{२०}$$

$$\text{एवम् } \frac{१}{१००} \quad \frac{१०}{२} \text{ का} = \frac{१० \times २ \times \text{का}}{१००} = \frac{\text{का}}{५}$$

$$\therefore \text{या} + \frac{७ \text{ या}}{२०} = \frac{२७ \text{ या}}{२०} = \text{का} + \frac{\text{का}}{५} = \frac{६ \text{ का}}{५}$$

$$\therefore \text{या} = \frac{६ \times ४ \text{ का}}{२७} = \frac{८ \text{ का}}{६} \quad \therefore \text{या} + \text{का} = \frac{८ \text{ का}}{६} + \text{का} = \frac{१७ \text{ का}}{६}$$

$$\therefore \text{तृतीयखण्डम्} = ३६० - \frac{१७ \text{ का}}{६} = \frac{३५१० - १७ \text{ का}}{६}$$

$$\therefore \text{पुनः पञ्चराशिकम् } \frac{१}{१००} \quad \frac{५}{४} \quad \frac{५ \times ५ \text{ का}}{४} = \frac{२५ \text{ का}}{४}$$

यध्येकेन मासेन पञ्च फलं शतस्य तदा माससप्तकेन किमिति लब्धं शतस्य फलं ३५ । एतच्छते प्रक्षिप्य जातं १३५। यद्यस्य फलस्य शतं मूलं तदा यावत्तावन्मितस्य सफलस्य किमिति लब्धं प्रथमखण्डप्रमाणम् या ३६ । पुनर्यदि मासेन द्वौ फलं शतस्य तदा दशभिर्मासैः किमित्याद्युक्तप्रकारेण द्वितीयखण्डं या ६ एवं तृतीयं या ६ एषामैक्यम् या ३६ । सर्वधनस्यास्य ३९० समं कृत्वा यावत्तावन्मानेन १६२ उत्थापितानि खण्डानि १२०।१३५।१३५ सकलान्तरं सममेतत् १६२ ॥

व्याख्या—मूलधनं नवतियुक् शतत्रयमस्ति ३९०, अस्य त्रीणि खण्डानि कृतानि, तेषु एकं खण्डं पञ्चकशतप्रमाणेन दत्तम्, द्वितीयं द्विकशतेन दत्तम्, तृतीयं चतुष्कशतेन दत्तम्, तत्र प्रथमखण्डं माससप्तके व्यतीते सति सकलान्तरं यावद्भवति, तावदेव द्वितीयं सकलान्तरं मासदशके व्यतीते भवति, तृतीयमपि मासपञ्चके गते सकलान्तरं तावदेव भवति, यद्येवं तर्हि कानि खण्डानि भवन्ति तत्सर्वं वद ।

भाषा—तीन सौ नव्वे रुपयों के तीन खण्ड किये । एक खण्ड को पांच रुपये माहवार व्याज की व्यवस्था से सात मास के लिये व्याज पर दिया । दूसरे को दो रुपये सैकड़ा माहवार व्याज की व्यवस्था से १० मास के लिये व्याज पर दिया । इसी प्रकार तीसरे खण्ड को (१००) पर १ मास में चार रुपये की व्यवस्था से पांच मास के लिये व्याज पर दिया । इस प्रकार प्रत्येक खण्ड के उक्त समय के व्याज को अपने खण्ड में जोड़ देने से फलसहित तीनों खण्ड तुल्य होते हैं । तो खण्डसंख्या को बताओ ।

$$\begin{aligned}
 &= \frac{५ \times ४ \frac{३५१० - १७ का}{९}}{१००} = \frac{३५१० - १७ का}{४५} \\
 \therefore \frac{३५१० - १७ का}{६} + \frac{३५१० - १७ का}{४५} &= \frac{६ का}{५} \\
 १७५५० - ८५ का + ३५१० - १७ का &= ५४ का \\
 वा, २१०६० - १०२ का &= ५४ का \therefore का = \frac{२१०६०}{१५६} = १३५
 \end{aligned}$$

सतो या मानम् = १२० ऋतुसूचीवचनम् = १३५

अब यहाँ समघन अर्थात् व्याज सहित खण्ड का मान यावत्तावत् १ कल्पना किया। यदि एक महीने में १००) का ५) व्याज है।

$$\therefore ७ \quad , \quad , \quad = ३५) \text{ व्याज आया।}$$

$$\therefore \text{मिश्रघन} = १०० + ३५ = १३५)$$

पुनः $\therefore १३५)$ मिश्रघन का मूलघन = १००) है।

$$\therefore १ \quad , \quad , \quad = \frac{१३५}{१००} \text{ रु०}$$

$$\therefore \text{या} \quad , \quad , \quad = \frac{२० \text{ या}}{२७}$$

पुनः $\therefore १००)$ पर यदि १ मास में व्याज = २ रु०

$$\therefore , \quad , \quad १० \quad , \quad = २० \text{ रु०}$$

$$\therefore , \quad \text{मिश्रघन} \quad , \quad = २० \text{ रु०} \\ = १२०)$$

पुनः $\therefore १२०)$ मिश्रघन का मूलघन = १००

$$\therefore १ \quad , \quad , \quad = \frac{१२०}{१००}$$

$$\therefore \text{या} \quad , \quad , \quad = \frac{५ \text{ या}}{६}$$

$$\text{एवं तीसरे में भी} \quad = \text{मूलघन} = \frac{५ \text{ या}}{६}$$

$$\text{अब तीनों का योग} = \frac{२० \text{ या}}{२७} + \frac{५ \text{ या}}{६} + \frac{५ \text{ या}}{६} = \frac{३९० \text{ या}}{११२} = \frac{६५ \text{ या}}{२७}$$

$$\frac{६५ \text{ या}}{२७} = ३९०) \text{ रु० सम अतः या} = १६२ \text{ रु०}$$

अब तीनों खण्डों में उत्थापन देने से क्रम से घन

$$= १६२ \times २० = ३२४० = १२० \text{ रु० पहला खण्ड}$$

$$\therefore १६२ \times ५ = १३५ = \text{दूसरा खण्ड आया।}$$

$$\therefore \text{तीसरा खण्ड भी} = १३५ \text{ ही हुआ।}$$

$$\therefore १२०, १३५, १३५ \text{ में तीनों खण्ड हुए।}$$

आलाप की दृष्टि से भी १६२ ही समघन प्रत्येक स्थिति में आवेगा।

$$\text{जैसे १००) का १ मास में ५) तो १२०) का सात मास में क्या, } = \frac{१२० \times ५ \times ७}{१००} \\ = ४२) \text{ व्याज आया।}$$

$$\therefore \text{मूलघन में १२०) में जोड़ा तो १२० + ४२ = १६२ रु० हुए।}$$

अवशिष्ट दोनों घनों का आलाप भी इसी प्रकार होगा।

उदाहरणम्—

पुरप्रवेशे दशदो द्विसंगुणं

विधाय शेषं दशभुक् च निर्गमे ।

ददौ दशैवं नगरत्रयेऽभवत्

त्रिनिम्नमाद्यं वद तत् कियद्वनम् ॥ १२ ॥

अत्र धनं या १ । अस्यालापवत्सर्वं कृत्वा पुरत्रयनिवृत्तौ जातं धनं
या ८ रू २८० ।

एतदाद्यस्य त्रिगुणितस्य या ३ समं कृत्वाप्तं यावत्तान्मानम् ५६ ।

व्याख्या—कश्चिद् व्यापारी किञ्चिद्वनमादाय व्यापारार्थं किमपि पुरं
प्राप्तवान्, तत्र पुरस्य प्रवेशकाले प्रवेशनिमित्तं दश शुल्कं दत्त्वा पुरं प्रविश्य
शेषं धनं वाणिज्येन द्विगुणं विधाय तस्मिन् च दश भुक्त्वा निर्गमकाले
पुनर्दश दत्तवान्, अथ तच्छेषधनं गृहीत्वा पुरान्तरं गतवान् । तत्रापि दश
दत्त्वा वाणिज्येन पुनः स्वीयधनं द्विगुणीकृत्य दश भुक्त्वा दश दत्त्वा च तत-
स्तृतीयनगरं प्राप्तवान्, तत्रापि दश दत्त्वा द्विगुणीकृत्य दश भुक्त्वा दश
दत्त्वा च स्वगृहमागतवान्, एवं कृते सति यावन्मितं तस्य प्रथमं धन-
मासीत् तत् त्रिगुणमभवत् तर्हि तत्प्रथमं धनं कियन्मितमासीदिति वद ।

भाषा—कोई एक व्यापारी कुछ धन लेकर व्यापारके लिये किसी एक नगर में
गया वहां नगर में प्रवेश करते समय दश रुपये मार्ग का महसूल दिया और उस
नगर में जाकर अपने शेष धन को व्यापार के द्वारा दूना बनाकर उसने दश रुपये
खा लिये और आते समय दश रुपये फिर दिये इस प्रकार वह व्यापारके लिये
तीनों नगरों में जाकर घर लौट आया तब उसका धन पहिले की अपेक्षा तिगुना
हो गया तो बतलाओ पहिला धन क्या था ।

क्रिया—कल्पना किया धन का प्रमाण या है नगरमें प्रवेश के समय दश
रुपये दिये इसलिये या १ - १० हुआ । यहां शेष धन को दूना किया इसलिये
या २ रू २० यह हुआ, दश भोजन किया दश दिया तो या २ रू ४०
हुआ, इसी प्रकार दूसरे नगर में प्रवेश करने पर दश रुपये दिये तब
२ या - ५० यह धन हुआ, फिर इस धन का दूना किया ४ या - १००
हुआ फिर १० रुपये भोजनके लिये दिये इस प्रकार ४ या - ११० हुए, दश रुपये

पुर से निकलते समय दिये तो ४ या - १२० हुए। इस प्रकार तीसरे नगर में प्रवेश करते समय दश रुपये दिये, इसलिये, या ४ - १३० रु हुए फिर इसका दूना किया ८ या - २६० रु हुए फिर दश रुपये भोजन में दिये तो ८ या - २७० हुए दश रुपये निकलते बार दिये तो ८ या - २८० रु हुए अब यह धन पहिले धन के तिगुने धन के समान हुआ, इसलिये समीकरण—

$$८ या - २८० = ३ या अतः ८ या - ३ या = २८०$$

$$५ या = २८० = ५६ आया$$

यही धन का प्रमाण है। इसमें नियम से आलाप मिलाने पर १६८ हो जाता है जो कि ५६ का तिगुना है।

उदाहरणम्—

सार्धं तण्डुलमानकत्रयमहो द्रम्मेण मानाष्टकं
मुद्रानां च यदि त्रयोदशमिता एता वणिक् काकिणीः ।
आदायार्पय तण्डुलांशयुगलं मुद्रैकभागान्वितं
क्षिप्रं क्षिप्रभुजो व्रजेम हि यतः सार्थोऽग्रतो यास्यति ॥१३॥

अत्र तण्डुलमानं * यावत्तावत् २ । मुद्रमानं या १ । यदि सार्धमानत्रयेणैको द्रम्मो लभ्यते तदानेन या २ किमिति लब्धं तण्डुलमौल्यं या ३ । यदि मानाष्टकेनैको द्रम्मस्तदानेन या १ किमिति लब्धं मुद्रा-मौल्यं या ४ । अनयोर्योगः ७ ३/४ । त्रयोदशकाकिणीसम इति द्रम्मजात्या १ ३/४ साम्यकरणाल्लब्धं यावत्तावन्मानं ३ १/४ । अनेनोत्थापिते तण्डुलमुद्रामौल्ये ३ १/४ । ३ १/४ तण्डुलमुद्रामानभागाश्च ३ १/४, ३ १/४ ।

● संशो० अत्र किं मानप्रमाणमिति जिज्ञासा चेत् तदा प्रायो मानं सेटकप्रमितं प्रस्थसमं वा प्रतिभाति यतो गणितेन मुद्राभागः ३ १/४ मा तथा तण्डुलभागः ३ १/४ मा । द्वयोर्योगः ३ १/४ मा = ७ मा
अर्थात् चतुर्दश कुडव (कनमा, छटांक) समम् । प्रायः एको मनुष्यः अस्मादधिकं

कृद्भ्रात्रं भोक्तुं न शक्नोति अतोऽत्र मानं प्रस्थसममेव । क्षिप्रभुजो व्रजेम इत्यत्र बहुवचनान्त-प्रयोगेन यदि व्यापारिणो बहवः स्युस्तदा तन्मानं आढकसमं द्रोणमितं वा भवितुं शक्नोति, परन्तु सार्थोऽग्रतो यास्यतीति कथनात् सार्धस्यापेक्षकतया तादृक् वणिगेक एवेति कल्पयितुं शक्यते ।

भाषा—कोई मुसाफिर किसी वणिक् से कहता है कि हे वणिक् एक द्रम्म में साढ़े तीन सेर चावल आता है और एक द्रम्म में ८ सेर मूँग आता है। इस भाव पर २ हिस्सा चावल और एक भाग मूँग तुम मुझे ला दो। ये तेरह काकिणी मैं तुम्हें देता हूँ इसमें दोनों वस्तु आनी चाहिये मुझे शीघ्र भोजन कर जाना है क्योंकि मेरा साथी आगे चला जायगा। तो बताओ उसके दाम और हिस्से क्या हैं।

क्रिया—अब यहां चावल का मान २ या और मूँग का मान या कल्पना करके क्रिया की। यदि ३ सेर में एक द्रम्म पाते हैं तो या २ में क्या $\frac{३}{७} \times \frac{२ या}{१} = \frac{४ या}{७}$ आया। फिर यदि आठ सेर में एक द्रम्म पाते हैं तो

या का क्या इस प्रकार मूँग का मूल्य $\frac{या}{८}$ आया। अब दोनों का योग करने से

$$\frac{या ४}{७} + \frac{या}{८} = \frac{३९ या}{५६} \text{ आया यह तेरह काकिणी से समान है।}$$

$$\therefore \frac{३९ या}{५६} = \frac{१३}{६४} \text{ द०} \therefore १ या = \frac{७}{३ \times ८} = \frac{७}{२४}$$

$$\therefore \frac{४ या}{७} = \frac{४ \times ७}{२४ \times ७} = \frac{१}{६} \text{ द्रम्म चावल का मूल्य आया—}$$

$$\therefore \frac{या}{८} = \frac{७ \times १}{८ \times २४} = \frac{७}{१९२} \therefore \text{मुद्ग का मूल्य} = \frac{७}{१९२}$$

$$\therefore \text{चावल २ हिस्सा} = \frac{७ \times २}{२४} = \frac{७}{१२} \therefore \text{क्रम से } \frac{७}{१२} \mid \frac{७}{२४} \text{ यह}$$

भाग तण्डूल और मूँग का आया,

$$\frac{१}{६}, \frac{७}{१९२} \text{ द्रम्म क्रम से ये मूल्य आये—}$$

उदाहरणम्—

स्वार्धषश्चांशनवमैर्युक्ताः के स्युः समास्त्रयः।

अन्यांशद्वयहीनाश्च षष्टिशेषाश्च तान्वद ॥१४॥

अत्र समराशिमानं यावत्तावत् १। * अतो विलोमविधिना अथ

* संशो० कल्प्यन्ते राशयः या, का, नी तदाऽऽज्ञापानुसारेण

$$या + \frac{या}{२} = \frac{३ या}{२} = का + \frac{का}{५} = \frac{६ का}{५} = नी + \frac{नी}{६} = \frac{१० नी}{६}$$

स्वांशधिकोनेत्यादिना राशयः यां ३, या ६, या ९ । इहान्यभाग-
द्वयेनोनाः सर्वेऽप्येवं शेषाः स्युः या ६ । एतत्षष्टिसमं कृत्वाप्तयावत्ताव-
न्मानेन १५० उत्थापिता जाता राशयः १०० । १२५ । १३५ ।

व्याख्या—अत्र ये राशयः स्वार्धपञ्चाशनवमैर्युक्ताः सन्तः समाः
भवन्ति । तथाऽन्यांशद्वयहीनाश्च सन्तः षष्टिशेषाः स्युस्ते के, तान्वद ।

अस्यायमाशयोऽस्ति यत् राशित्रयमस्ति तत्र प्रथमः राशिः स्वस्य-
निजार्धेन, द्वितीयः स्वपञ्चमांशेन, तृतीयः स्वनवमांशेन युक्तः तदा
सर्वेऽपि समा एव स्युः । अथ च प्रथमराशिः द्वितीयस्य पञ्चमांशेन
तृतीयस्य च नवमांशेन हीनः सन् षष्टिर्भवति । द्वितीयराशिः प्रथमस्या-
र्धेन तृतीयस्य नवमांशेन च हीनः सन् षष्टिर्भवति एवं तृतीयः तर्हि ते
राशयः के सन्ति तान् वद ।

भाषा—कौन तीन राशियाँ हैं जिनमें से पहिला राशि अपने आधे से दूसरा
अपने पांचवे भाग से, तीसरा अपने नवमे भागसे युक्त होने से सब समान हो जाते
हैं । और पहिली राशि दूसरे के पांचवे भाग से तीसरे के नवमे भाग से हीन हुआ
साठ होता है तीसरा राशि पहिले के आधे से और दूसरे के पांचवे भाग से हीन
हुआ साठ होता है । और दूसरा राशि पहिले के आधे से तीसरे के नवमे भाग
से हीन हुआ साठ होता है तो बताओ वे कौन राशि हैं ।

यहाँ सम राशि का प्रमाण यावत्तावत् १ है । यहाँ अज्ञात राशि को विलोमविधि
से जानना होगा । अब यहाँ राशि अपने तीसरे आदि भागों से हीन होता है

$$\therefore \text{का} = \frac{५ \text{ या}}{४}, \text{ नो} = \frac{२७ \text{ या}}{२०}$$

$$\text{द्वितीयाऽऽलपानुसारेण या} - \frac{\text{का}}{५} - \frac{\text{नो}}{६} = ६०$$

$$\begin{aligned} \text{अथवा या} - \frac{५ \text{ या}}{४ \times ५} - \frac{२७ \text{ या}}{२० \times ६} &= \text{या} - \frac{\text{या}}{४} - \frac{३ \text{ या}}{२०} = \frac{२० \text{ या} - ५ \text{ या} - ३ \text{ या}}{२०} \\ &= \frac{१२ \text{ या}}{२०} = \frac{३ \text{ या}}{५} = ६० \therefore \text{या} = १०० \quad \text{ततः का} = १२५, \text{ नो} = १३५ \end{aligned}$$

धीधनैर्भास्कराचार्यैरेकवर्णसमीकरणे सर्वत्र तथैव यतितं येन केवलं या कल्पनयैव कार्यस्य-
निर्वाहो भवेत् ।

३ आधा, ६ पांचवे भाग और नवमे भाग ३ में अथ स्वांशाधिकोने तु लवाव्योनो-
हरोहरः । अंशस्त्वविकृतस्तत्र इस सूत्र के अनुसार या ३, या ६, या ९ ये
भाग समराशि में अलग अलग क्रिया करने के लिए “स्वमृणं ऋणं स्वमित्यादि”
विधि कही है ।

अब यावत् सम राशि का प्रमाण माना है । इसको अपने ३ या भाग हीन
करने से पहिला राशि $\frac{२ या}{३}$ हुआ फिर वही समराशि अपने $\frac{या}{६}$ से घटाने पर
 $\frac{या ५}{६}$ हुई फिर वही अपने $\frac{या}{१०}$ भाग हीन होने से $\frac{९ या}{१०}$ हुआ, इसलिये, क्रम
से, या ३, या ६, या ९ इन राशियों में पहिली राशि या ३ है इसमें दूसरी ६ या
६ भाग घटाने के लिये ३ या - ६ या = $\frac{४ या - १ या}{६} = \frac{३ या}{६} = \frac{१ या}{२}$ हुआ
एवं तीसरी राशि $\frac{९ या}{१०}$ या का नवमा भाग घटाने से, $\frac{१ या}{१०} - \frac{१ या}{१०} = \frac{८ या}{१०} = \frac{४ या}{५}$
= ४ या शेष रहा, एवं दूसरी राशि ६ या में पहिली ३ का ३ भाग अर्थात् ३ या
घटाया = $\frac{६ या}{३} - \frac{५ या - २ या}{६} = \frac{३ या}{६} = \frac{१ या}{२}$ या तथा तीसरी $\frac{९ या}{१०}$
का नवमा भाग घटाया तो $\frac{या}{१} - \frac{या}{१०} = \frac{५ या - १ या}{१०} = \frac{४ या}{१०} = \frac{२ या}{५}$
इसी प्रकार तीसरी में पहिली का आधा दूसरी का पांचवा भाग घटाने पर भी
उपरोक्त ही शेष बचते हैं । परन्तु शेष ६० ही वचता है । इसलिए

$$\frac{२ या}{५} = ६० \quad \therefore २ या = ५ \times ६०$$

$$\therefore या = ५ \times ३० = १५० \text{ यह यावत् का मान आया}$$

$$\text{अब उत्थापन से} = \frac{१५० \times ३}{३} = १०० \text{ पहिली राशि}$$

$$\text{एवं} = \frac{१५० \times ५}{६} = १२५ \text{ दूसरी राशि}$$

$$\text{एवं} = \frac{१५० \times ९}{१०} = १३५ \text{ तीसरी राशि}$$

एस प्रकार क्रम से १००, १२५, १३५, ये राशियां हुई । आलापविधि में
पहिली राशि १०० में दूसरी १२५ का पांचवां भाग २५ तथा तीसरी राशि १३५
का नवमा भाग १५ ये क्रम से घटाने पर ६० हुए ।

तथा दूसरी राशि १२५ में भी पहिली राशि १०० का आधा ५० तथा
तीसरी १३५ का नवमा १५ ये दोनों घटाने से भी १२५ - (५० + १५)
= ६० शेष रहा ।

एवं तीसरी राशि १३५ में पहिली राशि १०० का $\frac{३}{५} = ५०$ तथा दूसरी १२५ का पांचवां २५ ये दोनों संख्याएं जोड़कर १३५ में घटाने पर १३५ - (५० + २५) = ६० शेष रहे इसलिये प्रत्येक स्थिति में ६० शेष रहते हैं ।

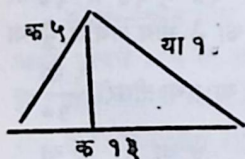
उदाहरणम्—

त्रयोदश तथा पञ्च करण्यौ भुजयोर्मिती ।

भूरज्ञाता च चत्वारः फलं भूमिं वदाशु मे ॥१५॥

अत्र भूमेर्यावत्तावत्करणे क्रिया प्रसरतीति * स्वेच्छया व्यस्ये क १३ भूमिः कल्प्यते फलविशेषाभावात् अतोऽत्र कल्पितं व्यस्यम् ।

न्यासः । अत्र लम्बगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवतीति



व्यत्ययेन फलालम्बो जातः क $\frac{१३}{५}$ एतद्वर्गं भुजकरणीवर्गात् रू ५ अपास्य रू $\frac{१३}{५}$ मूलं

जातावाधा क $\frac{१३}{५}$ । इमां भूमेरपास्य योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्येति जातान्यावाधा क $\frac{१३}{५}$

अस्या वर्गात् रू $\frac{१३}{५}$ लम्बवर्गं रू $\frac{१३}{५}$ युतात् रू $\frac{१३}{५}$ मूलं जातो भुजः ४ । इयमेव भूमिः ।

• संशो० अत्र भूमेर्यावत्तावत्करणे क्रिया प्रसरति मध्यमाहरणं विना न निर्वहति चेत्पत्र कुण्डदेवज्ञाः । कल्प्यते भूमानं = या तदा त्रिभुजे भुजयोर्योगं इत्यादिना लब्धावाधा = $\frac{या^२ - ८}{२ या}$

$$अतो लम्ब^२ = \frac{३६ या^२ - या^४ - ६४}{४ या^२} \text{ अयं भूम्यर्धवर्गगुणस्तदा फलवर्गसमो भवति तेन}$$

$$फ^२ = \frac{३६ या^२ - या^४ - ६४}{१६} \therefore २५६ = ३६ या^२ - या^४ - ६४ \text{ अतः समशोधनेन}$$

$$या^४ - ३६ या^२ = - ३२०$$

$$वा या^४ - ३६ या^२ + ३२४ = - ३२० + ३२४ = ४$$

$$\text{अतः } या^२ - १८ = \pm २ \therefore या^२ = १६ वा २०$$

$$\text{ततो मूलग्रहणेन या = ४ वा } \sqrt{२०} \text{ । अन्तर्लम्बे भूमानं = ४ बहिर्लम्बे भू = } \sqrt{२०}$$

भाषा—जिस क्षेत्र में एक भुज करणी पांच और दूसरा करणी तेरह है भूमि अज्ञात है और क्षेत्रफल चार है वहां भूमिका मान क्या होगा ।

भूमि का मान यावत्तावत् मानने से क्रिया ठीक चलती है परन्तु बढ़ जाती है । तथापि भूमि का मान यावत् कल्पना किया ।

“त्रिभुजे-भुजयोर्योगः—” इस सूत्र के अनुसार अवाधा निकालते हैं ।

भुजों का क १३ क ५ का योग क १३ + क ५ है अन्तर क १३ क ५ है । इन दोनों का गुणनफल

$$\text{गुण्य} = \text{क } १३ \text{ क } ५, \text{ गुणक} = \text{क } १३ \text{ क } ५ \text{ गुणनफल} = \text{रू } १३ \text{ रू } ५ = \text{रू } ८$$

इसमें भूमि या १ का आग देने से $\frac{\text{रू } ८}{\text{या } १}$ हुआ, इससे भूमि या को एक स्थान में

घटाकर और दूसरे स्थान में युक्त करने से $\frac{\text{या}^२ १ रू ८}{\text{या}}$, $\frac{\text{या}^२ १ + रू ८}{\text{या}}$

ये हुए । इनका आधा आवाधा हुई $\frac{\text{या}^२ १ रू ८}{\text{या } २}$, $\frac{\text{या}^२ + रू ८}{\text{या } २}$ अब लघु-

आवाधा $\frac{\text{या}^२ १ रू ८}{\text{या } २}$ के वर्ग = $\frac{\text{या व व } १ \text{ या}^२ १६ रू ६४}{\text{या}^२ ४}$ को लघुभुज क ५

वर्ग क ५ में घटाने से $\frac{\text{या}^४ + \text{या}^२ ३६ रू ६४}{\text{या}^२ ४}$ इसी प्रकार बृहत् आवाधा

$\frac{\text{या}^२ १ रू ८}{\text{या } २}$ के वर्ग $\frac{\text{या}^४ + \text{या}^२ १६ + रू ८४}{\text{या}^२ ४}$ को बृहत् भुज क १३ के वर्ग

रू १३ में घटा देने से लम्बवर्ग आया $\frac{\text{या}^४ १ + \text{या}^२ १६ रू ६४}{\text{या}^२ ४}$ इसका प्रमाण भी

पूर्व जितना ही है । अब लम्बगुणं भूम्यर्धं स्पष्टं त्रिभुजे फलं भवति इस नियम से उपरोक्त लम्बवर्ग को भूमि के आधे के वर्ग से $\text{या}^२ १$ से गुणदिया क्षेत्रफल का

वर्ग हुआ = $\frac{\text{या}^४ + \text{या}^२ १६ रू ६४}{१६}$ इसलिये यह क्षेत्रफल का वर्ग दिये हुए क्षेत्र-

फल ४ के वर्ग १६ के समान है । इसलिये समीकरणार्थ न्यास—

$$\frac{\text{या}^४ १ + \text{या}^२ ३६ - ६४ रू}{१६} = १६$$

$$\text{या}^४ १ + \text{या}^२ ३६ - ६४ = २५६$$

$$या^४ १ - या^२ ३६ + ६४ = - २५६$$

$$या^४ १ - या^२ ३६ = - २५६ - ६४ = - ३२० \text{ दोनों पक्षों में } ३२४ \text{ जोड़कर मूल लेने से}$$

$$या^२ - १८ = \sqrt{४} = \pm २$$

$$या^२ = १८ \pm २ = १६ \text{ वा } २०$$

$$या = ४ \text{ वा } २०$$

इसलिये भूमि का प्रमाण ४ आया। वहिलम्ब किया से भूमि का मान क २० होता है।

अपनी इच्छा से क १३ भुज को भूमि कल्पना करके भी किया की जा सकती है। इसमें आबाधा आदि के ज्ञान से पाटीगणित के नियम से भुज को साधन करना चाहिये, बाद में जो भुज का प्रमाण आवेगा। वही भूमि का प्रमाण होगा—

उदाहरणम्—

दशपञ्चकरण्यन्तरमेको बाहुः परश्च षट् करणी ।*

भूरष्टादशकरणी रूपोना लम्बमानमाचक्ष्व ॥१६॥

अत्राबाधाज्ञाने लम्बज्ञानमिति लघ्वाबाधा या १ एतदूनाभूरन्या-
बाधाप्रमाणमिति तथा न्यासः ।

* संशो० अत्र बाह्योर्मध्ये कतरोऽधिक इति जिज्ञासा चेत्तदा—

$$\sqrt{१०} - \sqrt{५} = ७ < \sqrt{६} \quad \text{पक्षयोर्द्वर्गकरणेन}$$

$$१० + ५ - \sqrt{२००} = ७ < ६ \quad \text{समशोधनेन}$$

$$१५ - ६ = ७ < \sqrt{२००}$$

$$६ = ७ < \sqrt{२००}$$

$$\text{वा } \sqrt{८१} = ७ < \sqrt{२००}$$

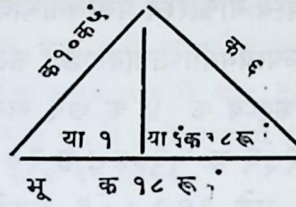
नत्र प्रत्यक्षतः

दक्षिणपार्श्वस्थपदार्थस्याधिकत्वं स्पष्टं तेन षट्करणीरूपो बाहुरधिक इति ।

अत्र $\sqrt{१०} - \sqrt{५}$ एकोभुजः, $\sqrt{६}$ द्वितीयोभुजः, आधारः $\sqrt{१८} - १$ अत्र लम्ब-
मानमपेक्षितम्। अत्र प्रथमो लघुभुजः, द्वितीयो बृहद्भुजस्तेन त्रिभुजे भुजयोर्योग इत्यादिना

$$\text{बृहदाबाधा} = \sqrt{१८} - १ + \frac{६ - (\sqrt{१०} - \sqrt{५})^२}{२(\sqrt{१८} - १)}$$

$$= \frac{१६ - \sqrt{७२} - ६ + \sqrt{२००}}{२(\sqrt{१८} - १)} = \frac{१० + \sqrt{२}(१० - ६)}{२(\sqrt{१८} - १)}.$$



स्वावाधावर्ग स्वभुजवर्गा-

दपास्य जातो

लम्बवर्गः याव १ रू १५ क २०० द्वितीयावाधावर्ग याव १ याक ७२
या २ रू १९ क ७२ स्वभुजवर्गात् रू ६ अपास्य जातो द्वितीयो
लम्बवर्गः याव १ या २ याक ७२ रू १३ क ७२ । एतौ समाविति
समशोधने कृते जातौ पक्षौ ।

रू २८ क ५१२ *

या २ याक ७२

$$\begin{aligned} &= \frac{५ + २\sqrt{२}}{\sqrt{१८} - १} = \frac{(\sqrt{१८} + १)(५ + २\sqrt{२})}{(\sqrt{१८} - १)(\sqrt{१८} + १)} \\ &= \frac{५\sqrt{१८} + ५ + १२ + २\sqrt{२}}{१७} = \frac{१७ + १७\sqrt{२}}{१७} = \frac{१७(१ + \sqrt{२})}{१७} \end{aligned}$$

$$= १ + \sqrt{२} \text{ पतदूनाभूरन्यावाधा} = \sqrt{१८} - १ - १ - \sqrt{२} = -२ + \sqrt{२}(३ - १) = -२ + \sqrt{२} \times २ = -२ + \sqrt{८} \text{ ततः स्वावाधावर्गो नो भुजवर्गः}$$

$$\text{लम्बवर्गसमस्तेन } ल^२ = ६ - (१ + \sqrt{२})^२ = ६ - ३ - २\sqrt{२}$$

$$= ३ - \sqrt{८} = २ + १ - २\sqrt{२} = (\sqrt{२} - \sqrt{१})^२$$

$$\text{अतोऽस्य मूलं } \sqrt{२} - \sqrt{१} \text{ वा } \sqrt{२} - १$$

अतोऽत्राव्यक्तकल्पनां विनापि आचार्योक्तगट'रीत्यै सुखेन लम्बमानमागच्छति । आचार्यै-
रेतदुदाहरणं करणोगणिते विशेषव्युत्पत्तिप्रदर्शनायैव सुरक्षितमिति प्रतिभाति यतस्तदानीं
करणोगणितमनुविधानकमासौत अन्यथा पतदुदाहरणे नास्त काचिद्दोषता आचार्यस्य ।

$$* \text{ संशो० रू २८ क ५१२ = या २ याक ७२ = या (रू २ क ७२)}$$

$$\therefore \text{ या } = \frac{\text{रू २८ क ५१२}}{\text{रू २ क ७२}}$$

अत्र याकारस्य स्वयमेवापगमः ।

अत्र भाजकस्याव्यक्तशेषस्य याकारस्य प्रयोजनाभावादपगमे कृते भाज्य-
भाजकौ जातौ अत्र घनर्णताव्यत्ययमीप्सितायाश्छेदे करण्या असकृद्विधायेति
द्विसप्तमितकरण्या घनत्वं प्रकल्प्य क ४ क ७२ अनया भाज्ये गुणिते
जातं क ३६८६४ क ३१३६ क ५६४८८ क २०४८। एतास्वेतयोः-
क ३६८६४ क ३१३६ मूले १९२। ५६ अनयोर्योगः रू १३६
शेषकरण्योरनयोः क ५६४८८ क २०४८ अन्तरं योग इति जातो
योगः क ३६९९२। भाजके च क ४६२४। अनया भाज्ये हृते लब्धं
यावत्तावन्मानं रू २ क ८। इयमेव लब्धाबाधा एतदूना भूरन्याबाधा रू १
क २। यावत्तावन्मानेन लम्बवर्गावुत्थाप्य स्वाबाधावर्गं स्वभुजवर्गादपास्य
वा जातो लम्बवर्गः रू ३ क ८ एतस्य मूलं सममेव लम्बमानं
रू १ क २।

भाषा—जिस क्षेत्र में १० और पाँच करणियों का अन्तर एक भुज है करणी
छै दूसरा भुज है और रूपोन १८ करणी भूमि है। वहां लम्ब क्या होगा।

आबाधा के ज्ञान से लम्ब का ज्ञान होता है तो छोटी आबाधा का मान याव-
त्तावत् १ कल्पना करके उसको भूमि क १८ रू १ में घटा देने से बड़ी आबाधा
या १ क १८ रू १ हुई। अब दोनों आबाधा भुज और दोनों भुज कर्ण हुए तथा
दोनों स्थानों में लम्ब ही कोटि हुआ। अपने २ आबाधा वर्ग को अपने २ भुज
वर्ग में घटा देने से लम्बवर्ग होता है तो लघु भुज क १० क ५ का वर्ग क १००
क २०० क २५

यहाँ पहली क १०० और तीसरी क २५ का योगं करण्योः इस सूत्र
के अनुसार योग क २२५ हुआ इसका मूल रू १५ है इस भाँति लघुभुजवर्ग
रू १५ क २०० हुआ इसमें अपना आबाधा या १ के वर्ग याव को घटा देने से
लम्बवर्ग याव १ रू १५ क २०० सिद्ध हुआ। दूसरे प्रकार से लम्ब का आनयन
करते हैं। अब दूसरी आबाधा का वर्ग करने के लिये याव क १८ रू १ का
वर्ग याव १ या क ७२ रू १ क ७२ क ३२४

यह वर्ग स्थाप्योऽन्त्यवर्गः—इस सूत्र के अनुसार तथा सम्भव (करणि
और यावत्तावत् आदि के भेद होने से) दूने और चौगुने अन्त अङ्क के गुणने
आदि क्रिया से हुआ है। अन्त्यकरणि ३२४ के मूल १८ में रूप १ जोड़ देने

से रु १९ हुआ इनका और अन्य खण्डों का भिन्न जाति होने के कारण पृथक् स्थिति हुई । याव १ या २ या क ७२ रु १९ क ७२

इसको अपने भुज क ६ वर्ग रु ६ में घटा देने से लम्बवर्ग हुआ याव १ या २ या क ७२ रु १९ क ७२ ये दोनों लम्बवर्ग समान हैं इसलिये समशोधनार्थ न्यासः— या व १ रु १५ क २००

या व १ या २ या क ७२ रु १९ क ७२

दूसरे पक्ष के तीन अव्यक्त खण्डों को पहिले पक्ष में घटा देने से तथा पहले पक्ष के रूप १५ और २०० को दूसरे पक्ष में घटा देने से शेष रहा ।

या २ या ० क ७२

रु २८ क ७२ क २००

वाद दूसरे पक्ष की क ७२ क २०० इन करणियों का योग करण्योः— इस सूत्र के अनुसार योग क ५१२ करने से पक्ष हुए । या २ या ० क ७२

रु २८ क ५१२

ये दोनों पक्ष समान ही हैं क्योंकि पक्षों का तुल्य शोधन किया था, अनन्तर शेषाव्यक्तनोद्धरेद्रूपशेषं इसके अनुसार व्यक्तमान हुआ । रु २८ क ५१२

या २ या ० का ७२

यदि या २ या ० क ७२ इस अव्यक्त का रु २८ क ५१२, यह व्यक्तमान आता है तो यावत्तावत् १ का क्या, इस प्रकार

$$\text{लब्धि} = \frac{\text{या} \times \text{रु २ या ० का ५१२}}{\text{या २ या ० क ७२}} = \text{यावत् का अपवर्तन देने से}$$

$$= \frac{\text{रु २८ क ५१२}}{\text{रु २ क ७२}}$$

इसलिये भास्कराचार्य ने “भाजकस्याव्यक्तशेषस्य याकारस्य प्रयोजनाभावा-
दपगमे कृते भाज्यभाजकौ जातौ” ऐसा कहा है ।

अब “धनर्णताव्यत्ययमीप्सितायाः—” इस सूत्र के अनुसार भाजकगत क ७२ को धन कल्पना करने से तथा रु २ को करणी में लाने से भाजक क ४ क ७२ निष्पन्न हुआ । और भाज्यगत रु २८ का वर्ग ७८४ हुआ परन्तु यह “क्षयो भवेच्च क्षयरूपवर्गश्चेत्साध्यतेऽसौ करणीत्वहेतोः” इस सूत्र के अनुसार ऋण हुआ । इस प्रकार भाज्य क ७८४ क ५१२ निष्पन्न हुआ, अब उन भाज्य भाजकों का गुणा किया—

गुण्य = क ७८४ क ५१२ गुणक = क ४ क ७४

गुणनफल = क १८४९६ क ३६९९२

यहाँ गुणनफल में क ३१३६ क ३६८६४ इन करणियों के मूल ५६। १९२ हुए। इनका अन्तर १३६ धन हुआ। इसका वर्ग १८४९६ यह गुणनफल में पहिली करणी है और क २०४८ क ५६४४८ इन करणियों में २ का अपवर्तन देने से क १०२४ क २८२२४ हुई इनके मूल ३२। १६८ इनका अन्तर १३६ हुआ इसका वर्ग १८४९६ हुआ इसको अपवर्तनाङ्क २ से गुणने से गुणनफल में दूसरी करणी ३६९९२ हुई।

गुण्य = क ४ क ७२ गुणक = क ४ क ७२

क १६ क ५१८४ = गुणनफल हुआ।

यहाँ गुणनफल में क २८ क २८८ इन करणियों का “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” इस सूत्र के अनुसार तुल्यता के कारण नाश हुआ अब क १६ क ५१८४ ये करणी अवशिष्ट रहीं इनके मूल ४।७२ हुए, इनका अन्तर ६८ हुआ इसका वर्ग क ४६२४ हुई। अब भाजक गत क ४६२४ का भाज्यगत क १८४९६ क ३६९९२ इन करणियों में भाग देने से यावत्तावन्मान क ४ क ८ हुआ। अब यहाँ पहिली करणी ४ का “ऋणात्मिकायाश्च तथा करण्यः” इस सूत्र के अनुसार मूल ४ र हुआ इस प्रकार छोटी आबाधा ४ र क ८ हुई। इसको भूमि ४ १ क १८ में “योगं करण्योः” इस सूत्र के अनुसार घटा देने पर दूसरी आबाधा ४ १ क २ हुई। अब यावत्तावन्मान से लम्बवर्ग में उत्थापन देने के लिये इसका न्यास या व १ र १५ क २८०।

इस लम्बवर्ग में पहिला खण्ड या व १ है इसलिये क ४ क ८ इस यावत्तावन्मान का वर्ग करना चाहिये इसलिये इसका वर्ग क १६ क १२८ क ६४ = ४ १२ क १२

यह यावत्तावत् वर्ग का मान यावत्तावत् वर्ग १ के ऋणगत होने से ऋणरूप १ से गुण देने से ऋण यावत्तावत् वर्ग का मान हुआ ४ १२ क १२८। और उत्तर खण्ड ४ १५ क २०० व्यक्त है। “धनर्णयोरन्तरमेव योगः” इस सूत्र के अनुसार ४ १२ क १५ इन रूपों का योग ४ ३ हुआ। और क १२८ क २०० इन करणियों का अन्तर “योगं करण्योर्महतीं प्रकल्प्य” इस सूत्र के अनुसार अथवा “आदौ करण्यवपवर्तनीयौ” इस नियमसे क ८ हुआ। इसलिये लम्बवर्ग ४ ३ क ८ हुआ। इसका वर्गमूल ४ क २ यही लम्ब का मान हुआ।

करणी का मूल लाने में “ऋणात्मिका चेत् करणी कृतौ स्याद्धनात्मिका तां परिकल्प्य साध्ये इस सूत्र के अनुसार रु ३ के वर्ग ९ में धनकरणी ८ के तुल्य रूपको घटाया तो १ शेष बचा । इसका मूल १ को ३ में जोड़ने से ४ हुआ घटाया २ हुआ आधा किया २।१ हुए । अब यहां “ऋणात्मिकैका सुधियावगम्या” इस नियम से छोटी करणी १ को ऋण माना इस प्रकार लम्ब रु १ क २ हुआ । इसलिये रु १ क २ यह लम्ब हुआ ।

उदाहरणम्—

*असमानसमच्छेदान् राशींस्तांश्चतुरो वद ।

यदैक्यं यद्धनैक्यं वा येषां वर्गेक्यसंमितम् ॥

अत्र राशयः या १ । या २ । या ३ । या ४ । एषां योगः या १० ।
वर्गयोगेनानेन याव ३० सम इति पक्षौ यावत्तावतापवर्त्य न्यासः ।

या ३० रु०

या ० रु १०

समशोधनादिना प्राग्वल्लब्धयावत्तावन्मानेनोत्थापिता राशयः
३ । ३ । ३ । ३ ।

अथ द्वितीयोदाहरणे राशयः या १ । या २ । या ३ । या ४ एषां
घनैक्यं याव १०० एतद्वर्गेक्यमानेन याव ३० सममिति पक्षौ याव-
द्वर्गेणापवर्त्य प्राग्वल्लब्धयावत्तावन्मानेनोत्थापिता जाताः राशयः
३० । ३० । ३० । ३० ।

व्याख्या—असमानाश्च ते समच्छेदाश्च तान् । यदैक्यं येषां वर्गेक्य-

० संशो० असमानसमप्रशेति पाठे तु हे असमप्रश्न निरूपमबुद्धे असमांस्तांश्चतुरो
राशोन्वेदति योजनीयम् । प्रथमपाठस्त्वसाधुरिति प्रतिभाति । न हि समच्छेदत्वरस्कारे-
णोदाहरणमिह साध्यते किं तु समच्छेदत्वं संप्रतयातम् । असमानिति त्वपेक्षतमेव ।
इति कृष्णदैवशः ।

अत्रापि राशिक्लृपना न युक्ता ! इदमुदाहरणमनेकवर्णसमीकरणस्य । अन्यकारेण तु यथा-
कचचिदेकवर्णसमीकरणेनेदं मानं साधितमिति ।

सममिति एकम् । यद्घनैक्यं येषां वर्गैक्यसंमितमिति द्वितीयमित्यु-
दाहरणद्वयम् ।

भाषा=उन असमान चार राशियों को बतलाओ जिनका योग अथवा घनों का योग उनके वर्गों के योग के समान होता है ।

अब यहाँ क्रम से राशि या १ । या २ । या ३ । या ४ कल्पना किये—

उनका योग या १ + या २ + या ३ + या ४ = या १० यह उन राशियों के वर्गयोग = या^२ ३० के तुल्य है इसलिये समीकरण—

$$\text{या}^२ ३० = \text{या } १०$$

$$\text{या } ३० = १०$$

$$\text{या} = \frac{१०}{३०} = \frac{१}{३}$$

$$२ \text{ या} = \frac{२}{३}, ३ \text{ या} = \frac{३}{३}, ४ \text{ या} = \frac{४}{३}$$

इसलिये क्रमसे राशियां $\frac{१}{३}, \frac{२}{३}, \frac{३}{३}, \frac{४}{३}$ ।

०० इनका योग $\frac{१०}{३}$, इनके वर्ग-योग $\frac{३०}{३}$ के समान है ।

द्वितीय उदाहरण में भी वेही राशि कल्पना किये ।

या १ । या २ । या ३ । या ४ ।

इनके घन = या^३ १ । या^३ ८ । या^३ २७ । या^३ ६४

घन योग = या^३ १०० यह इन्हीं राशियों के वर्गयोग = या^२ ३० के समान है
इसलिये या^३ १०० = या^२ ३०

$$\text{या } १०० = ३०$$

$$\text{या का मान} = \frac{३०}{१००}$$

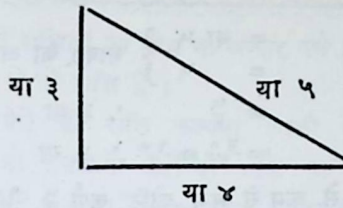
या १ = $\frac{३०}{१००}$ के समान है ०० २ या = $\frac{६०}{१००}$ के समान हुआ ३ या = $\frac{९०}{१००}$
४ या = $\frac{१२०}{१००}$

इसलिये $\frac{३०}{१००}, \frac{६०}{१००}, \frac{९०}{१००}, \frac{१२०}{१००}$ ये क्रम से राशियां हुईं । इन चारों का अलग २ घन करके योग करने पर $\frac{३०^३}{१००^३} + \frac{६०^३}{१००^३} + \frac{९०^३}{१००^३} + \frac{१२०^३}{१००^३} = \frac{३०^३ \times १०}{१००^३}$
यह आया अपवर्तन देने से $\frac{३०^३}{१००}$ आया यही उक्त चारों वर्ग का योग है इसलिये उपरोक्त राशियां आलाप से शुद्ध हुईं ।

उदाहरणम्—

त्र्यस्रक्षेत्रस्य यस्य स्यात्फलं कर्णेन संमितम् ।

दोःकोटिश्रुतिघातेन समं यस्य च तद्वद ॥१८॥



अत्रेष्टक्षेत्रभुजानां यावत्तावद्गुणितानां न्यासः । * या ३ । या ४ । या ५ । अत्र च भुजकोटिघातार्धं फलं याव ६ । एतत्कर्णेनानेन या ५ सममिति पक्षौ यावत्तावतापवर्त्य प्राग्वल्लब्धेन यावत्तावन्मानेनोत्थापिता जाता भुजकोटिकर्णाः $\frac{१०}{३}$ । $\frac{५}{३}$ । $\frac{२५}{३}$ एवमिष्टवशादन्येऽपि ।

अथ द्वितीयोदाहरणे कल्पितं तदेव क्षेत्रं अस्य फलं याव ६ । एतद्दोःकोटिकर्णघातेनानेन याव ६० सममिति पक्षौ यावत्तावद्गुणोत्थापवर्त्य समीकरणेन प्राग्वज्जाता दोःकोटिकर्णाः $\frac{३०}{३}$, $\frac{३०}{३}$, $\frac{३०}{३}$ । एवमिष्टवशादन्येऽपि ।

भाषा—जिस त्रिभुज क्षेत्र में फल कर्ण के समान है अथवा भुज, कोटि, और कर्ण इनका घात फल के समान है तो बतलाओ वहां प्रत्येक अवयव अर्थात् भुज, कोटि, कर्ण अलग अलग क्या होंगे ।

न्यास—अब यहां भुज, कोटि, कर्ण के मान क्रम से या ३ । या ४ । या ५ कल्पना किये । त्रिभुज क्षेत्र में भुजकोटि के घात का आधा क्षेत्रफल होता है । इसलिये यहां पर फल = $\frac{\text{या ३} \times \text{या ४}}{२} = \text{या}^२$ ६ यह फल कर्ण के समान है

* संशो० अत्र कल्प्यते भुजकोटिकर्णाः भु, को, क तदा $\frac{\text{भु} \cdot \text{को}}{२} = \sqrt{\text{भु}^२ + \text{को}^२}$

$$\therefore \text{भु}^२ \cdot \text{को}^२ = ४ (\text{भु}^२ + \text{को}^२) = ४ \text{भु}^२ + ४ \text{को}^२$$

$$\therefore \text{भु}^२ = \frac{४ \text{को}^२}{\text{को}^२ - ४} \quad \therefore \text{को}^२ = \frac{\text{को}^४}{\text{को}^२ - ४}$$

अत्र कल्प्यते इष्टं कोटिमानं $\frac{१०}{३}$ तदा भुजः $\frac{५}{३}$ कर्णः $\frac{२५}{३}$

$$\text{अथ द्वितीयोदाहरणे भु} \cdot \text{को} \cdot \text{क} = \frac{\text{भु} \cdot \text{को}}{२} \quad \therefore \text{क} = \frac{३}{२}$$

$$\text{अतोऽत्र यदि भुजः} = \frac{३}{२} \text{ तदा कोटिः} = \frac{३}{२}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{इसलिये } या^२ ६ & = & या ५ \} \text{ यावत् का अपवर्तन देने से—} \\
 ६ या & = & ५ \\
 या & = & \frac{५}{६} \therefore ३ या = \frac{१५}{६} = \frac{५}{२} \\
 ४ या & = & \frac{२०}{६} = \frac{१०}{३} \therefore ५ या = \frac{२५}{६}
 \end{array}$$

इसलिये अपवर्तन देने से क्रम से भुज, कोटि, कर्ण $\frac{५}{२}$, $\frac{१०}{३}$, $\frac{२५}{६}$ हुए। अब यहां पर यह उत्तर स्पष्ट है कि भुज, कोटि के घात $= \frac{५}{२} \times \frac{१०}{३} = \frac{५०}{६}$ का आधा $= \frac{५०}{१२} = \frac{२५}{६}$ क्षेत्रफल हुआ यह उपरोक्त $\frac{२५}{६}$ कर्ण के समान ही है।

दूसरे प्रश्न में क्षेत्रफल $या^२ ६$, भुज, कोटि और कर्ण इनके घात $= या^३ ६०$ के समान है, इस स्थिति में समीकरण—

$$\begin{array}{rcl}
 या^३ ६० & = & या^२ ६ \\
 \therefore या ६० & = & ६ \} या^२, का अपवर्तन देने से हुआ। \\
 या & = & \frac{६०}{६} \\
 या & = & \frac{१०}{१} \text{ हुआ } ३ या = \frac{३०}{१} \text{ हुआ} \\
 ४ या & = & \frac{४०}{१} \text{ हुआ } ५ या = \frac{५०}{१} \text{ हुआ}
 \end{array}$$

००. अब यहाँ भी यथासंभव अपवर्तन देने से क्रम से भुज, कोटि, कर्ण $= \frac{३०}{१}$, $\frac{३०}{१}$, $\frac{३०}{१}$ हुए।

अब यहां पर भी आलाप से उत्तर स्पष्ट है कि भुज, कोटि के घात $\frac{६०}{१}$ का आधा $\frac{६०}{२} = \frac{३०}{१}$ क्षेत्रफल है यह भुज, कोटि, कर्ण इन तीनों के घात $= \frac{३०}{१} \times \frac{३०}{१} \times \frac{३०}{१} = \frac{२७०००}{१}$ के समान है।

नोट—ऐसे प्रश्नों में भुज, कोटि, कर्ण, के मान की कल्पना ऐसी होनी चाहिये जिससे जात्यत्रिभुज में व्यभिचार न होवें।

उदाहरणम्—

युतौ वर्गोऽन्तरे वर्गो ययोर्घाति घनो भवेत् ।

तौ राशी शीघ्रमाचक्ष्व दक्षोऽसि गणिते यदि ॥१९॥

अत्र राशी याव ५। याव ४ योगेऽन्तरे च यथा वर्गः स्यात्तथा कल्पितौ। अत्रानयोर्घातः यावव २० एष घन इति दृष्टयावत्तावद्दशकस्य-घनेन समीकरणे पक्षौ, यावत्तावद्घनेनापवर्त्य प्राग्बज्जातौ राशी ॥१००००॥ ॥१२५००॥

भाषा—जिन दो राशियों का योग वा अन्तर वर्ग होता है और उनका घात घन होता है वे कौन से दो राशि हैं ।

अब यहां पर ऐसे दो राशि कल्पना करनी चाहिये कि जिसका योग अथवा अन्तर वर्ग हो इसलिये ऐसी दो राशि या^२ ४ । या^२ ५ कल्पना की ।
इनका योग = या^२ ४ + या^२ ५ = या^२ ९ इनका अन्तर = या^२ ५ - या^२ ४
= या^२ १ इस प्रकार दोनों आलाप मिलते हैं ।

अब इनका घात = या^२ ४ × या^२ ५ = या^४ २० यह हुआ ।

या^४ २० = या^३ १०००

या २० = १०००

∴ या = $\sqrt[3]{1000} = 10$

०० या का मान = ५० आया

०० ४ या^२ = १०००० एवं ५ या^२ = १२५०० इसलिये = १०००० । १२५००

ये राशियां हुईं । इनका अन्तर २५०० यह भी वर्गात्मक है तथा योग २२५००

यह भी वर्गात्मक है । इनका घात १२५०००००० भी घनात्मक है ।

उदाहरणम्—

घनैक्यं जायते वर्गो वर्गैक्यं च ययोर्धनः ।

तौ चेद्वेत्सि तदाहं त्वां मन्ये वीजविदां वरम् ॥२०॥

अत्र कल्पितौ राशी याव १ । याव २ । अनयोर्धनयोगः यावघ ९
एष स्वयमेव वर्गो जातः अस्य मूलं याघ ३ । ननु यावत्तावद्वर्गघनो-
ऽयं राशिर्न घनवर्गः कथमस्य घनात्मकं मूलमिति चेदुच्यते † यावानेव

* संशो० इदमुदाहरणं पतञ्जलीकोदाहरणं चानेकवर्णमध्यमाहरणविषयकम् ।

† संशो० । समद्विघातो वर्गः समत्रिघातो घन इति परिभाषया या × या = या^२,
या × या × या = या^३ अतो घनवर्गः (या^३)^२ = या^३ × या^३ = या × या × या × या

× या × या = या^२ × या^२ × या^२ = (या^२)^३ । एवं (या)^२ = या^२

∴ $\sqrt{\text{या}^२} = \text{या}$ । (या^२)^२ = या^४ ∴ $\sqrt{\text{या}^४} = \text{या}^२$ । (या^३)^२ = या^६

∴ $\sqrt{\text{या}^६} = \text{या}^३$ । (या^४)^२ = या^८ ∴ $\sqrt{\text{या}^८} = \text{या}^४$ एवं (या)^३ = या^३

∴ $\sqrt[३]{\text{या}^३} = \text{या}$ । (या^२)^३ = या^६ ∴ $\sqrt[३]{\text{या}^६} = \text{या}^२$ तथा (या^३)^३

= या^३ × या^३ × या^३ = या^९ ∴ $\sqrt[३]{\text{या}^९} = \text{या}^३$ इत्युपपन्नं सर्वम् ।

घनवर्गस्तावानेव वर्गघनः स्यादित्यत एव द्विगतचतुर्गतषड्गताष्टगता
वर्गाः स्युः एषामेकद्वित्रिचतुर्गतानि मूलानि यथाक्रमं स्युः । एवं त्रिषण्णव-
गता घना एकद्वित्रिगतानि तेषां मूलानि । एवं सर्वत्र ज्ञातव्यम् ।
अथ राश्योर्वर्गयोगः यावव ५ अयं घन इति इष्टयावत्तावत्पञ्चघनसमं-
कृत्वा पक्षौ यावत्तावद्घनेनापवर्त्य प्राग्वज्जातौ राशी ६२५ । १२५० ।
एवमव्यक्तापवर्त्तनं यथा संभवति तथा चिन्त्यम् ।

भाषा—उन दो राशियों को बतलाओ जिनका घनयोग वर्ग होता है और
वर्गयोग घन होता है ।

ननु—यह शङ्का के लिये आता है । यहाँ यह शङ्का होती है कि—
“या व १” इस यावत्तावत् वर्गघन का मूल “या व ३” यह यावत्तावत् घन
नहीं हो सकता क्योंकि वर्ग का वर्गमूल और घन का घनमूल ही आना उचित
होता है । यहाँपर घन का जो वर्गमूल लिया गया है, यह उचित नहीं है ।

उत्तर—जो घन का वर्ग होता है, वही वर्ग का घन है, जैसे—समान दो
अङ्कों के घात को वर्ग कहते हैं । चार स्थान में समान अङ्कों के घात को वर्ग
वर्ग कहते हैं, वह भी वर्गात्मक होता है । तथा आठ स्थानगत समानाङ्कों
के घात को वर्ग वर्ग वर्ग कहते हैं वह भी वर्गात्मक ही है । इसी प्रकार
आगे भी जानना चाहिये । इसी प्रकार इसके वर्गमूल की भी विधि है ।

तीन स्थानगत समाङ्कघात घन होता है । छे स्थान गत समानाङ्कघात घनवर्ग
होता है इसलिए वर्गघन और घनवर्ग एक ही पदार्थ है इसलिए उसका वर्गमूल
घन होता है और घनमूल वर्ग होता है । नव स्थानगत समाङ्कघात घन घन होता है,
इसी प्रकार आगे भी ।

या व १, या व २, इन दोनों के वर्ग किये । क्रम से या व व १, या व व ४,
ये हुए । इनका योग किया या व व ५ यह हुआ । यह घन है, इसलिये यह
यावत्तावत् पाँच के घन के तुल्य समीकरण किया ।

$$\text{या व व ५}$$

$$= \text{या}^3 १२५$$

$$\text{या ५}$$

$$= १२५ \text{ अतः या} = २५$$

$$\text{या}^२ १$$

$$= ६२५ \text{ तथा या}^२ २ = १२५०$$

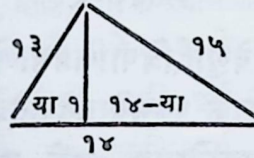
दोनों राशि क्रम से = ६२५, १२५० हुए ।

उदाहरणम्

यत्र त्र्यस्रक्षेत्रे धात्री मनुसंमिता सखे बाहू ।

एकः पञ्चदशान्यस्त्रयोदश वदावलम्बकं तत्र ॥२१॥

आवाधाज्ञाने सति लम्बज्ञानमिति लम्बावाधा यावत्तावन्मिता



कल्पिता या १ । एतदूना चतुर्दशान्यावाधा या १ं रू १४ ।

स्वावाधावर्गोनौ स्वभुजवर्गौ समाविति समशोधनार्थं

न्यासः । या व १ं । या ० । रू १६९ ।

या व १ं । या २८ । रू २९ ।

अनयोः समवर्गगमे लब्धं यावत्तावन्मानं ५ । अनेनोत्थापिते जाते
आवाधे ५, ९ । लम्बवर्गयोश्चोत्थापितयोरुभयतः सम एव लम्बः १२ ।
अत्रोत्थापनं * वर्गस्य वर्गेण घनस्य घनेनैवेति सुधिया ज्ञातव्यम् ।

भाषा—जिस त्रिभुजक्षेत्र में एक भुज का प्रमाण १३ दूसरे भुज का प्रमाण १५ है और भूमि का प्रमाण १४ है उस त्रिभुज में लम्ब का प्रमाण बतलाओ ।
पाटीगणित के नियम के अनुसार आवाधा के ज्ञान से लम्ब का ज्ञान होता है । इसलिये यहाँ पर छोटी आवाधा का प्रमाण या कल्पना किया ।

लघु आवाधा = या, बृहदावाधा = १४ - या

(१३)² - या² = (१५)² - द्विआवाधा² = लम्बवर्ग

इसलिये १६९ - या² = २२५ - (१४ - या)²

= २२५ - (१९६ - २८ या + या²)

= २९ + २८ या - या²

∴ १६९ = २९ + २८ या

* संतो० । अत्र लम्बवर्गस्वरूपे यावद्दर्शनेन यावद्दर्शं कृत्योत्थापनं देयं यत्र तु अव्यक्तस्व
घनं तत्रागताव्यक्तमानस्य घनेनोत्थापनं देयम् ।

$$१६९ - २९ = १४० = २८ \text{ या } ०. ५ = \text{या} = \text{लघु आबाधा}$$

$$१४ - ५ = ९ = \text{बड़ी आबाधा}$$

$$(१३)^2 - (५)^2 = १६९ - २५ = १४४ \therefore \sqrt{१४४} = १२$$

लम्ब का प्रमाण १२ आया ।

उदाहरणम्

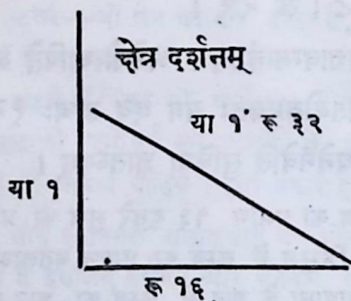
* यदि समभुवि त्रेणुर्द्वित्रिपाणिप्रमाणो

गणक पवनवेगादेकदेशे स भग्नः ।

भुवि नृपभितहस्तेष्वङ्गं लङ्गं तदङ्गं

कथय कतिषु मूलादेश भग्नः करेषु ॥ २२ ॥

अत्र वंशाधरखण्डं कोटिस्तत्प्रमाणं या १ । एतदूना द्वात्रिंश-
दूर्ध्वखण्डं या १ रू ३२ कर्णः । मूलाग्रयोरन्तरं भुजः रू १६ ।



न्यासः । भुजकोटिवर्गयोगः

याव १ रू २५६ । कर्ण-

वर्गस्यास्य याव १ या ६४

रू १०२४ सम इति समवर्गगमे

प्राग्वदाप्तयावत्तावन्मानेन १२

उत्थापितौ कोटिकर्णौ १२ । २० ।

एवं भुजकोटियुतावपि ।

भाषा—समान भूमि पर एक ३२ हाथ लम्बा बांस खड़ा है । वह वायु के वेग से एक स्थान से दूटकर मूल से १६ हाथ के फासके पर जाकर लग गया तो बताओ वह मूल से कितने हाथ पर दूटा ।

अब यहाँ पर बांस के नीचे के प्रमाण को कोटि माना उसका प्रमाण या कल्पना किया । इसलिये बांस का ऊर्ध्वखण्ड ३२ — या हुआ यही कर्ण हुआ । अब यहाँ पर बांस के मूल और अन्तर का मान १६ यह भुज है ।

• संशो० । यदि गोलस्मिकायां भूमौ भग्नवेगोरग्रं छग्नं सन्यते तदा शिखरा शुक्त्या वंशाधरखण्डप्रमाणमायाति । अत्राचार्येण भूः समा कल्पिता तेनेदं गणितम् ।

$$या^2 + भु^2 = कर्ण^2$$

$$या^2 + (१६)^2 = (३२ - या)^2 = १०२४ - ६४ या + या^2$$

$$अतः २५६ = १०२४ - ६४ या$$

$$६४ या = १०२४ - २५६ = ७६८ \therefore या = १२$$

इसलिये $= ३२ - १२ = २०$ यह कर्ण का प्रमाण हुआ। यही वंश के ऊपर का खण्ड है। इसलिये भुज, कोटि, कर्ण के प्रमाण क्रमसे यहाँपर १६, १२, २० हुए।

अत्र कोटिकर्णान्तरे भुजे च ज्ञाते उदाहरणम्।

चक्रक्रौञ्चाकुलितसलिले क्वापि दृष्टं तडागे

तोयादूर्ध्वं कमलकलिकाग्रं वितस्तिप्रमाणम्।

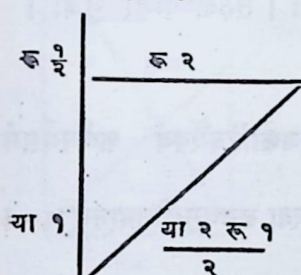
मन्दं मन्दं चलितमनिलेनाहतं हस्तयुग्मे

तस्मिन् मग्नं गणक कथय क्षिप्रमम्भःप्रमाणम् ॥२३॥

अत्र नलप्रमाणं जलगाम्भीर्यमिति तत्प्रमाणं या१ इयं

कोटिः। सा कलिकामानयुता जातः कर्णः $\frac{या २ रू १}{२}$ ।

हस्तद्वयं भुजः रू २। न्यासः।



अत्रापि दोःकोटिवर्गयोगं कर्णवर्ग-
समं कृत्वा लब्धं जलगाम्भीर्यम् $\frac{१५}{४}$
कर्णमानम् $\frac{१७}{४}$

भाषा—किसी तालाब में जल से एक वित्ता ऊँचा कमल का अग्रभाग देखने में आया। वह मन्द-मन्द वायु के चलने पर वेग से चलकर अपने स्थान से दो हाथ के फासले पर जाकर डूब गया तो बताओ कि तालाब में कितना गहरा जल है।

यहाँ यह बात भी स्पष्ट है कि कमल की बाँड़ी के बराबर जल की गहराई है और उसका प्रमाण यावत्तावत् कल्पना किया या १। यह कोटि हुई इसमें कमल का अग्रभाग $\frac{३}{४}$ हाथ है। इन दोनों को जोड़ने से $या + \frac{३}{४}$

$= \frac{२ या + १}{१}$ यह कर्ण का प्रमाण हुआ। परन्तु $भुज^2 + कोटि^2 = कर्णवर्ग$

$$\text{इसलिये, } \frac{(२ या + १)^२}{२} = (या)^२ + (२)^२$$

$$\frac{४ या^२ + ४ या + १}{४} = या^२ + ४$$

$$४ या^२ + ४ या + १ = ४ या^२ + १६$$

$$४ या + १ = १६ \text{ अतः } ४ या = १६ - १ = १५$$

∴ या = $\frac{१५}{४}$ यह कोटि का प्रमाण आया। यही जल की गहराई है। इसमें $\frac{१}{२}$ जोड़ने से $\frac{१५}{४} + \frac{१}{२} = \frac{१७}{४}$ यह कर्ण का प्रमाण हुआ, इसलिये भुज-कोटि कर्ण = ९, $\frac{१५}{४}$, $\frac{१७}{४}$ क्रम से हुए—

उदाहरणम्

वृक्षाद्वस्तशतोच्छ्रयाच्छतयुगे वापीं कपिः कोऽप्यगा—

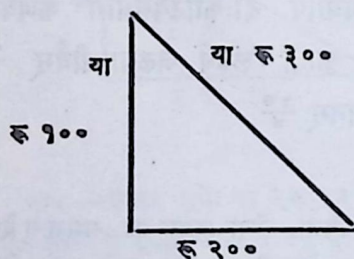
दुतीयार्थं परो द्रुतं श्रुतिपथात् प्रोड्ढीय किञ्चिद्द्रुमात् ।

जातैवं समता तयोर्यदि गतावुड्ढीनमानं कियद्—

विद्वंश्चेत् सुपरिश्रमोऽस्ति गणिते क्षिप्रं तदाऽऽक्षेत्र मे ॥२४॥

अत्र समगतिः ३०० । उड्ढीनमानं या१ । एतद्युतो वृक्षो-
च्छ्रायः कोटिः । यावत्तावद्दूना समगतिः कर्णः । तरुवाप्यन्तरं भुजः ।

क्षेत्रदर्शनं । न्यासः



भुजकोटिवर्गैक्यं कर्णवर्गसमं

कृत्वा लब्धमुड्ढीनमानम् ५० ।

भाषा—सौ हाथ के ऊँचे किसी ताल के वृक्ष पर दो वानर बैठे थे। और वृक्ष के मूल से २०० हाथ की दूरी पर एक तालाब था। उनमें से एक वानर वृक्ष से उतर कर तालाब में गया। दूसरा वानर ऊपर कुछ दूर उछल कर कर्ण मार्ग से उस तालाब में गया यदि दोनों वानरों की चाल बराबर हो तो बताओ वह वानर कितना ऊपर उछल कर उस तालाब में गया।

अब यहाँ यह बात स्पष्ट है कि समगति ३०० हाथ है। इसलिये

ऊपर उछलने का प्रमाण या कल्पना किया उस वृक्ष की ऊँचाई १०० हाथ हो हुई है इसलिये कोटि = १०० + या हुई ।

इसलिये समगति ३०० में या घटाने पर कर्ण का मान बचा = ३०० — या, २०० हाथ वृक्ष और तालाव का अन्तर भुज हुआ । भुजवर्ग + कोटि^२ = कर्ण^२

$$\therefore (२००)^2 + (१०० + या)^2 = (३०० - या)^2$$

$$४०००० + १०००० + २०० या + या^2 = ९०००० - ६०० या + या^2$$

$$५०००० + १०० या + या^2 = ९०००० - ६०० या + या^2$$

$$\therefore ८०० या = ४०००० \quad \therefore या = ५०$$

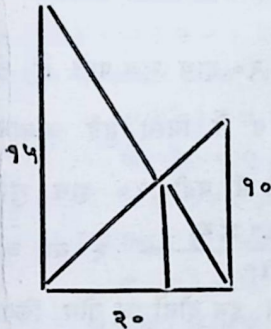
$$\text{इसलिये कोटि} = १०० + ५० = १५० \text{ हुई } \therefore \text{कर्ण} = ३०० - ५० = २५०$$

उदाहरणम्—

पञ्चदशदशकरोच्छ्रयवेण्वोरज्ञातमध्यभूमिकयोः ।

इतरेतरमूलाग्रगघ्नत्रयुतेर्लम्बमानमाचक्ष्व ॥२५॥

अत्र क्रियावतरणार्थमिष्टं * वेण्वन्तरभूमिमानं कल्पितं २० । सूत्र-संपातालम्बमानं या । क्षेत्रदर्शनम् । न्यासः ।



यदि पञ्चदशकोट्या विंशतिर्भुज-स्तदा यावत्तावन्मितया किमिति लब्धा लघुवंशाश्रिताबाधा या ५ । पुनर्यदि दशमित-कोट्या विंशतिर्भुजस्तदा यावन्मितकोट्या कि-मिति लब्धा बृहद्वंशाश्रिताबाधा या २ । अनयोर्योगं या ५ विंशतिसमं कृत्वा लब्धो

* संशो । क्षेत्रकल्पनायाः प्रयोजनमेव नास्ति । कल्प्यते लम्बमानं = या, भूः = भू तदानु-

पातेन लघुवंशाऽऽश्रिताबाधा = $\frac{\text{भू} \times \text{या}}{\text{वृ वं}}$ एवं बृहद्वंशाश्रिताऽऽबाधा = $\frac{\text{भू} \times \text{या}}{\text{ल वं}}$ द्वयो-

र्योगः भूतुल्यस्तेन भू = $\frac{\text{भू} \times \text{या}}{\text{वृ वं}} + \frac{\text{भू} \times \text{या}}{\text{ल वं}} = \frac{(\text{वृ वं} + \text{ल वं}) \text{भू} \times \text{या}}{\text{वृ वं} \cdot \text{ल वं}}$

$$\therefore या = \frac{\text{वृ वं} \cdot \text{ल वं}}{\text{वृ वं} + \text{ल वं}} = \frac{१५ \times १०}{१५ + १०} = \frac{१५०}{२५} = ६$$

अतएव स्वयमाचार्यः “किं तावत्तावत्कल्पनया व्यथवे”त्यादि

लम्बः ६ । उत्थापनेनाबाधे च ८, १२ । अथवा वंशसम्बन्धेनाबाधे तद्युतिर्भूमिरिति । यदि वंशद्वययोगेनानेन २५ आबाधायोगो २० लभ्यते तदा वंशाभ्यां १५ । १० किमिति जाते आबाधे ८।१२ । अत्रानुपातात् सम एव लम्बः ६ । किं यावत्तावत्कल्पनया । अथवा वंशयोर्वधो योग-
हतो यत्र कुत्रापि वंशान्तरे लम्बः स्यादिति किं भूमिकल्पनयापि, एतद्-
भुवि सूत्राणि प्रसार्य बुद्धिमतोद्यम् * ।

इति श्रीभास्कररीये बीजगणिते एकवर्णसमीकरणं समाप्तम् ।

भाषा—किसी समान भूमि में १५ हाथ और १० हाथ ऊंचे दो बांस हैं उन दोनों के परस्पर मूल और अग्र में सूत्र बांधे गये अर्थात् एक के मूल से दूसरे के अग्र में और दूसरे के मूल से पहिले के अग्र में । इस प्रकार जो सूत्रों का परस्पर संपात होता है वहां से जो भूमि पर लम्ब डाला जाय तो लम्ब का प्रमाण क्या होगा । जब कि बांसों के बीच की भूमि अज्ञात होवे ।

अब यहां पर लम्ब का प्रमाण या कल्पना किया । दोनों बांसों के मध्य की भूमि का प्रमाण २० हाथ कल्पना किया ।

फिर अनुपात किया कि यदि १५ हाथ कोटि में २० हाथ भुज पाते हैं तो या, कोटि में क्या = $\frac{२० \times \text{या}}{१५} = \frac{४ \text{ या}}{३}$ छोटे बांस से मिली हुई आबाधा आई । फिर इसी प्रकार यदि १० हाथ कोटि में वही २० हाथ भुज पाते हैं तो या हाथ कोटि में क्या = $\frac{२० \times \text{या}}{१०} = २ \text{ या}$ यह

बड़े बांस से मिली हुई आबाधा का प्रमाण आया । इन दोनों का योग किया = $२ \text{ या} + \frac{४ \text{ या}}{३} = \frac{६ \text{ या} + ४ \text{ या}}{३} = \frac{१० \text{ या}}{३}$ यह भुज २० के बराबर है ।

$$\therefore \frac{१० \text{ या}}{३} = २० \quad \therefore \text{या} = \frac{२० \times ३}{१०} = ६$$

इसलिये लम्बका प्रमाण = ६ हाथ हुआ

* संशो० । पतञ्जल्यनेन प्रत्यक्षप्रमाणमेवाचार्येण प्रदर्शितम् । गणिते युक्तिदानमुचितं बच्च
पट्टाभ्यायरेखागणितयुक्त्वा स्फुटम् । अत्र स्थानाभावात्क्षेत्रं न लिखितम् ।

अथाव्यक्तवर्गादिसमीकरणम् ।

तत्र मध्यमाहरणमिति व्यावर्णयन्त्याचार्याः ।

यतोऽत्र वर्गराशावेकस्य मध्यमस्याहरणमिति ॥

अत्र सूत्रं वृत्तत्रयम् ।

अव्यक्तवर्गादि यदाऽवशेषं पक्षौ तदेष्टेन निहत्य किञ्चित् ।

क्षेप्यं तयोर्येन पदप्रदः स्यादव्यक्तपक्षोऽस्य पदेन भूयः ॥ १ ॥

व्यक्तस्य मूलस्य समक्रियैवमव्यक्तमानं खलु लभ्यते तत् ।

न निर्वहश्चेद्घनवर्गवर्गेष्वेवं तदा ज्ञेयमिदं स्वबुद्ध्या ॥ २ ॥

अव्यक्तमूलर्णगरूपतोऽल्पं व्यक्तस्य पक्षस्य पदं यदि स्यात् ।

ऋणं धनं तच्च विधाय साध्यमव्यक्तमानं द्विविधं* क्वचित् स्यात् ॥ ३ ॥

० संशो ० । एकवर्णमध्यमाहरणसमीकृतौ द्विविधमेवमानं संपद्यते । तत्र युक्तिः ।

उदाहरणोक्त्या समीकरणे कृते पञ्चावगमादिके च कृते कस्यापि मध्यमाहरणस्य स्वरूपं
अ वा^२ + व या + क = ० एवं भवति यत्र या अव्यक्ताङ्कः इतरे च व्यक्ताङ्काः । कल्प्यते या
इत्यस्य मानं त्रिविधं ल, च, र तदा एवमव्यक्त्यापने कृते

$$\text{अ ल}^2 + \text{व ल} + \text{क} = ० \dots\dots\dots (१)$$

$$\text{अ च}^2 + \text{व च} + \text{क} = ० \dots\dots\dots (२)$$

$$\text{अ र}^2 + \text{व र} + \text{क} = ० \dots\dots\dots (३)$$

(१) तथा (२) अनयोरन्तरे कृते

$$\text{अ (ल}^2 - \text{च}^2) + \text{व (ल - च)} = ०$$

$$\text{वा } \{ \text{अ (ल + च)} + \text{व } \} (\text{ल - च }) = ०$$

अत्र ल, च भिन्ने तयोरन्तरं न शून्यसममतस्तेन

$$\text{पक्षौ भक्तौ जातौ अ (ल + च) + व = ० \dots\dots\dots (४)$$

एवं (१) तथा (३) अनयोरन्तरे कृते

$$\text{अ (ल}^2 - \text{र}^2) + \text{व (ल - र)} = ०$$

$$\text{वा अ (ल + र) + व = ० \dots\dots\dots (५)$$

अतः (४) अस्मिन् (५) शोषिते जातम्

$$\text{अ (ल + च) + व - } \{ \text{अ (ल + र) + व } \} = \text{अ (य - र)} = ०$$

$$\text{अतः अ = ० अथवा च - र = ० तस्यां स्थितौ च = र}$$

भाषा । समीकरण की क्रिया से दोनों पक्षों में समशोधन करके एक पक्ष में अव्यक्तवर्गादि होवे और दूसरे पक्ष में केवल व्यक्ताङ्क ही होवे, वहाँ उपर्युक्त नियम की प्रवृत्ति हुई, जिसका नाम मध्यमाहरण रखा है, क्योंकि उसमें एक पक्ष में अव्यक्त वर्गादि शेष हैं, उसमें बीच के पक्ष का आहरण होता है, इसलिये उसका नाम मध्यमाहरण रखा है । उस स्थिति में दोनों पक्षों को किसी एक इष्टाङ्क से गुण देना चाहिये अथवा भाग दे देना चाहिये । अथवा कुछ जोड़ देना चाहिये या घटा देना चाहिये जिससे दोनों पक्ष मूलप्रद हो जावे । एक पक्ष का अव्यक्ताङ्कों में मूल आवेगा और दूसरे पक्ष का रूपों में । क्योंकि दूसरे पक्ष में रूप ही केवल हैं । वैसे दोनों पक्षों में समानक्रिया करने से दोनों पक्ष मूलप्रद अवश्य होंगे और उस स्थिति में भी समान ही रहेंगे । फिर उनका समीकरण करने से अव्यक्त राशि का स्पष्ट व्यक्तमान आवेगा । यदि ऐसी स्थिति में घनवर्ग या घनवर्ग वर्ग आदि हों और मूल न मिले तो वहाँ अपनी बुद्धि से अव्यक्त राशि का मान निकालना चाहिये ।

इस स्थिति में जो अव्यक्त पक्ष के मूल में श्रृणगत रूप आवे और उनसे व्यक्तपक्ष के मूल के रूप यदि कम होंवे तो उनको श्रृण धन मानकर अव्यक्त राशि का मान निकालना चाहिये वहाँ अव्यक्तराशि के दो मान उपपन्न होते हैं । परन्तु दूसरा मान कभी ठीक नहीं होता ।

परमिद्धमसंभवं यतः ज्ञ न शून्यसमं तथा च, र तुल्यौ न वतस्तानि मानानि प्रथममेव मिश्रानि कल्पितानि । अतो मानद्वयादधिकं मानं न भवति ।

द्विविधमानानयनाय कल्प्यते कस्यापि एकवर्णमध्यमाहरणस्य स्वरूपम्

अ या^२ + क या + र = ० अत्र अ, क, र व्यक्ताङ्काः

तदा अ या^२ + क या = - र

$$\text{वा } या + \frac{क}{अ} या + \left(\frac{क}{२अ} \right)^2 = - \frac{र}{अ} + \left(\frac{क}{२अ} \right)^2$$

$$\text{वा } या^2 + \frac{क \cdot या}{अ} + \frac{क^2}{४अ^2} = \frac{क^2 - ४अर}{४अ^2}$$

$$\text{पक्षयोः मूले } या + \frac{क}{२अ} = \pm \frac{\sqrt{क^2 - ४अर}}{२अ}$$

$$\therefore \text{वा } या = - \frac{क}{२अ} \pm \frac{\sqrt{क^2 - ४अर}}{२अ}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{-क + \sqrt{क^2 - ४ अ र}}{२ अ} \text{ इत्येकं मूलम्}$$

$$\frac{-क - \sqrt{क^2 - ४ अ र}}{२ अ} \text{ इत्यन्यत् ।}$$

एवं मध्यमाहरणगणिते अव्यक्तरारोः द्विविधमाने भवतः ।

एकवर्णमध्यमाहरणसम्बन्धीयमूलयोः प्रकृतिः ।

कल्प्यते एकवर्णमध्यमाहरणीयाव्यक्तरारोः मूले इ, ई तदा पूर्वोक्तयुक्त्या

$$इ = \frac{-क + \sqrt{क^2 - ४ अ र}}{२ अ}$$

$$ई = \frac{-क - \sqrt{क^2 - ४ अ र}}{२ अ} \text{ अतः}$$

(१) $क^2 - ४ अ र$ इदं यदि धनात्मकं तदा

$\sqrt{क^2 - ४ अ र}$ इदं सत्यं अतः इ, ई माने यथायं असमे च ।

(२) $क^2 - ४ अ र$ इदं यदि वर्गात्मकं तदा $\sqrt{क^2 - ४ अ र}$ इदं सम्मवसंख्यासमं

अतोऽत्र मूले संभवसंख्यासमे अतुल्ये च

(३) यदि $क^2 = ४ अ र$ इदं शून्यसमं अर्थात् $क^2 = ४ अ र$ तदा मूले यथायं

तुल्ये च ।

(४) यदि $क^2 - ४ अ र$ इदं ऋणसंख्यासममर्थात् $क^2 < ४ अ र$ तदा $\sqrt{क^2 - ४ अ र}$

इदं काल्पनिकमतोऽत्र मूले काल्पनिके अतुल्ये च ।

एभिः परीक्षणैः कथोरपि मध्यमाहरणीयाव्यक्तमूलयोः स्वरूपस्य परिज्ञानं समीकरणं विनैव भवति ।

अत्र विशेषसिद्धान्तः (१) ।

अ व^२ + वष + क = ० समीकरणे

$$\text{अतः इ} = \frac{-व + \sqrt{व^2 - ४ अ क}}{२ अ}$$

$$ई = \frac{-व - \sqrt{व^2 - ४ अ क}}{२ अ} \text{ अतः अनयोर्योगे कृते}$$

$$इ + ई = \frac{-व + \sqrt{व^2 - ४ अ क} - व - \sqrt{व^2 - ४ अ क}}{२ अ}$$

$$= \frac{-२ व}{२ अ} = -\frac{व}{अ} \dots \dots \dots (१)$$

तथा तयोरेव गुणने कृते

$$\begin{aligned} \text{इ. ई} &= \frac{(-v + \sqrt{v^2 - ४ अक}) (-v - \sqrt{v^2 - ४ अक})}{४ अ^२} \\ &= \frac{(-v)^2 - (v^2 - ४ अक)}{४ अ^२} = \frac{४ अक}{४ अ^२} = \frac{क}{अ} \dots\dots\dots (२) \end{aligned}$$

तथा अय^२ + वय + क = ० इदं समीकरणं

$$य^२ + \frac{व}{अ} य + \frac{क}{अ} = ० \text{ एवमपि लिखितुं शक्यते अत एतादृक्समीकरणे (१)}$$

(२) फले एवं प्रकाशयितुं शक्तेते

यत्राव्यक्तवर्गस्य गुणकाङ्को रूपं तत्राव्यक्ताङ्कस्य मध्यखण्डस्य गुणकाङ्को समीकरणमूल-
योगतुल्यो धनर्णाव्यत्यासेन भवति तथा तृतीयखण्डं व्यक्तं मूलयोगुणनतुल्यं भवति ।

अत्र विशेषसिद्धान्तः (२)

$$\text{यतः } -\frac{व}{अ} = इ + ई, \text{ तथा } \frac{क}{अ} = इ \cdot ई$$

$$\text{अतः } य^२ + \frac{व}{अ} य + \frac{क}{अ} = ० \text{ इदं समीकरणं}$$

$$\text{एवमपि } य^२ - (इ + ई) य + इ \cdot ई = ० \text{ लिखितुं शक्यते } \dots\dots (१)$$

अतः किमपि मध्यमाहरणीयसमीकरणं निम्नलिखितरूपेणापि प्रदर्शनाहम्—

$$य^२ - (मूलयोगः) य + मूलघातः = ० \dots\dots (२)$$

$$\text{तथा } य^२ - (इ + ई) य + इ \cdot ई = (य - इ) (य - ई) \dots\dots (३)$$

इदानीं (२), (३) आभ्यां सुखेन ज्ञातमूलस्य समीकरणस्य स्वरूपं लिखितुं शक्यते
उ० १. यस्य समीकरणस्य मूले ३, तथा-२ तस्य स्वरूपं लिख्यताम् ।

$$\text{अतः समीकरणम् } (य - ३) (य + २) = ०$$

$$\text{वा, } य^२ - य - ६ = ०$$

यदि मूले संभवसंख्यातुल्ये न तदैवं स्वरूपं लेख्यम् यथा यत्र मूले २ + $\sqrt{३}$ तथा
२ - $\sqrt{३}$ तत्र मूलयोगः ४ तथा घातः १

$$\text{अतः (२) अनेन समीकरणस्वरूपम् } = य^२ - ४ य + १ = ०$$

$$\begin{aligned} \dagger \text{ वनान्तराले सवगाष्टमाग इत्यादि वक्ष्यमाणोदाहरणस्य स्वरूपम् } य^२ - या ६४ + \\ १०२४ = २५६ पक्षबोर्मुकग्रहणेन या - ३२ = १६ \end{aligned}$$

अत्राव्यक्तमूले ऋणगतरूपं ३२ अस्मात् व्यक्तपक्षमूलं १६ अल्पं इदं 'स्वमूले' धनर्णं
इति युक्त्वा धनं ऋणं वा भवितुं शक्नोति तेन या - ३२ = ± १६ .०. या = ३२ ± १६
= ४८ वा १६

अत्र श्रीधराचार्यसूत्रम्

चतुराहतवर्गसमैरूपैः पक्षद्वयं गुणयेत् ।

अव्यक्तवर्गरूपैर्युक्तौ पक्षौ ततो मूलम् ॥*

यत्र पक्षयोः समशोधने सत्येकस्मिन् पक्षेऽव्यक्तवर्गादिकं स्यादन्य-
पक्षे रूपाण्येव तत्र द्वावपि पक्षौ केनचिदेकेनेष्टेन तथा गुण्यौ भाज्यौ
वा तथा किञ्चित् समं क्षेत्र्यं शोध्यं वा यथाऽव्यक्तपक्षो मूलदः स्यात्
तस्मिन् पक्षे मूलदे इतरपक्षेणार्थान्मूलदेन भवितव्यं यतः समौ पक्षौ
समयोः समयोपादौ समतैवेति । अतस्तत्पदयोः पुनः समीकरणेना-
व्यक्तस्य मानं ह्यात् । अथ यद्येवं कृते धनवर्गवर्गादिषु सत्सु कथञ्चि-
दव्यक्तपक्षमूलालाभात् क्रिया न निर्वहति तदा बुद्धयैवाव्यक्तमानं ज्ञेयम् ।
यतो बुद्धिरेव पारमार्थिकं बीजम् । अथ यद्यव्यक्तपक्षमूले यानि ऋण-

अतोऽत्र द्विविधं धनं मानम्

अल्पधनस्य श्रद्धमेव प्रयोजनं येन द्विविधमपिमानं धनं भवेत् । अव्यक्तमूलस्य ऋणरूप-
तो व्यक्तपक्षमूलस्वाधिकत्वे धनरूपनार्या मूलं धनं किन्तु ऋणरूपनार्या अव्यक्तपक्षादागते
धनरूपे विशेषणेन शेषं ऋणमानं भवेत् ।

एतादृशमपि द्विविधमानं कुत्रापि नोपयुक्तमिति आचार्यः स्वयमेव आहरे वदति । अतएव
तन्मानं कचिरतदित्युक्तम् ।

*अत्रोपपत्तिः

प्रथमालापानुसारेण पक्षौ—

$$या^२ \cdot गु + या \cdot गु = व्य$$

$$\therefore या^२ + या \cdot \frac{गु}{गु} = \frac{व्य}{गु}$$

$$\therefore या^२ + या \cdot \frac{गु}{गु} + \left(\frac{गु}{गु} \right)^२ = \frac{व्य}{गु} + \left(\frac{गु}{गु} \right)^२$$

$$\therefore ४ गु^२ \cdot या^२ + ४ या \cdot गु \cdot गु + गु^२ = गु^२ + ४ गुव्य$$

$$\therefore ४ गु (गुया^२ + गुया) + गु^२ = गु^२ + ४ गुव्य$$

अत उपपन्नम्

रूपाणि तेभ्योऽरूपानि व्यक्तपक्षमूलरूपाणि स्युस्तदा तानि घनगतानि
कृत्वाऽव्यक्तमितिः साध्या सा चैवं द्विधा भवति ।

उदाहरणम्

अलिकुलदलमूलं मालतीं यातमष्टौ

निखिलनवमभागाश्चालिनी भृङ्गमेकम् ।

निशि परिमललुब्धं पद्ममध्ये निरुद्धं

प्रतिरणति रणन्तं ब्रूहि कान्तेऽलिसंख्याम् ॥१॥

अत्रालिकुलप्रमाणं याव २ * । एतदर्धमूलं या १ । निखिलनवम-
भागा अष्टौ याव $\frac{१९}{६}$ । मूलभागैक्यं हृष्टालियुगलयुतं राशिसममिति पक्षौ
समच्छेदीकृत्य छेदगमे न्यासः । या व १८ या ० । रू ०

या व १६ । या ९ । रू १८

शोधने कृते जातौ पक्षौ या व २ । या ९ । रू ० ।

या व ० । या ० । रू १८ ।

* संशो ० । अथवालिकुलप्रमाणम् = या

$$\text{तदाऽऽलापोक्त्या } \sqrt{\frac{\text{या}}{२} + \frac{\text{या}}{६} + २} = \text{या}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{\text{या}}{२}} = \text{या} - \frac{\text{या}}{६} - २ = \frac{\text{या} - १८}{६}$$

$$\therefore \frac{\text{या}}{२} = \frac{\text{या}^2 - ३६ \text{ या} + ३२४}{६}$$

$$\therefore ८१ \text{ या} = २ \text{ या}^2 - ७२ \text{ या} + ६४८$$

$$\text{वा, } ० = २ \text{ या}^2 - १५३ \text{ या} + ६४८ = २ \text{ या}^2 - १४४ \text{ या} - (६ \text{ या} - ६४८)$$

$$\therefore = २ \text{ या} (\text{या} - ७२) - ६ (\text{या} - ७२) = (\text{या} - ७२) (२ \text{ या} - ६)$$

$$\text{अतः या} - ७२ = ० \text{ अथवा } २ \text{ या} - ६ = ०$$

$$\text{यदि या} - ७२ = ० \text{ तदा या} = ७२$$

$$\text{वदा } २ \text{ या} - ६ = ० \text{ तदा या} = ३$$

यर्थ सर्वदा द्विविधानम्

एतावष्टभिः संगुण्य तयोरेकाशीतिरूपाणि प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा
तयोः समीकरणार्थं न्यासः या ४ रू ६ ।

या ० रू १५।

प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानं ६ । अस्य वर्गेणोत्थापिता जातालि-
कुलसंख्या ७२ ।

भाषा—भ्रमरों के समुदाय के आधे का मूल मालती के वृक्ष पर चला गया
और आठ से गुणा किया हुआ सम्पूर्ण का नवमां भाग मालती के पुष्प पर चला-
गया । रात्रि में सुगन्ध के लोभ में होकर पद्म के बीच में रुके हुये और शब्द
करते हुए एक भ्रमर के प्रति कोई अलिनी शब्द कर रही है तो वताओ
भ्रमरों की संख्या क्या है ।

उदाहरणम्

पार्थः कर्णवधाय मार्गणगणं क्रुद्धो रणे सन्दधे ।

तस्यार्धेन निवार्य तच्छरणं मूलैश्चतुर्भिर्हयान् ॥

शल्यं षड्भिरथेषुभिस्त्रिभिरपिच्छत्रं ध्वजं कार्मुकं ।

चिच्छेदास्य शिरः शरेण कति ते यानर्जुनः सन्दधे ॥ २ ॥

अत्र वाणसंख्या याव १ * । अस्यार्धं याव १/२ । मूलानि या ४ ।

व्यक्तमार्गणगणं रू १० ! एषामैक्यमस्य याव १ समं कृत्वा लब्धयावत्ता-
वन्मानेन १० उत्थापिता जाता वाणसंख्या १०० ।

* संशो० । अत्रापि यदि शस्त्रेणप्रमाणम् = या तदा $\frac{या}{२} + ४ \sqrt{या} + १० = या$

$$४ \sqrt{या} = या - \frac{या}{२} - १० = \frac{या}{२} - १० = \frac{या - २०}{२}$$

$$\therefore १६ या = \frac{या^२ - ४० या + ४००}{४}$$

$$० = या^२ - १०४ या + ४०० = या^२ - १०० या - (४ या - ४००)$$

$$= या (या - १००) = ४ (या - १००) = (या - १००) (या - ४)$$

$$\therefore या - १०० = ० \text{ अथवा } या - ४ = ०$$

$$\text{यदा } या - १०० = ० \text{ तदा } या = १००, \text{ यदा } या - ४ = ० \text{ तदा } या = ४$$

भाषा—कर्ण के वध के लिये अर्जुन ने कुछ बाण धारण किये उनके आधे बाणों से कर्ण के बाणों को काटा और उन बाणों के चतुर्गुणित मूलसे उसके घोड़ों को रोका और ९ बाणों से शल्य नामक सारथी को रोका । और फिर तीन बाणों से छत्र, ध्वज, कार्मुक, को काटा और एक बाण से कर्ण के शिर को काटा तो चताओ अर्जुन के पास कितने बाण थे जो उसने धारण किये थे ।

उदाहरणम्

व्येकस्य गच्छस्य दलं किलादि—

रादेदलं तत्प्रचयः फलं च ।

चयादिगच्छाभिहतिः स्वसप्त—

भागाधिका ब्रूहि चयादिगच्छान् ॥ ३ ॥

अत्र गच्छः या ४ । रू १ । आदिः या २ । प्रचयः या १ ।
एषां घातः स्वसप्तभागाधिकः याव ५४ याव १६ । फलमिदं व्येकपदसप्त-
चय इति श्रेढीगणितस्यास्य याव ८ याव १० या २ सममिति
पक्षौ यावत्तावतापवर्त्य समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधने च कृते
जातौ पक्षौ याव ८ । या ५४ रू ०

याव ० । या ० । रू १४ ।

एतयोरष्टगुणयोः सप्तविंशतिवर्ग ७२९ युतयोर्मूले

या ८ रू २७

या ० रू २९

पुनरनयोः समीकरणेनाप्तयावत्तावन्मानेन ७

उत्थापिता आद्युत्तरगच्छाः १४ । ७ । २९ ।

उदाहरणम्

कः खेन विहृतो राशिराद्ययुक्तो नवोनितः ।

वर्गितः स्वपदेनाढ्यः खगुणो नवतिर्भवेत् ॥ ४ ॥

अत्र राशिः या १ । नयं खहृतः या १ । अस्य खहरत्वं कल्पित-

मेव आधेन या १ युक्तो जातः या २ । नवोनितः या २ रू ६ ।
वर्गितः या व ४ या ३६ रू ८१ । स्वपदेन या २ रू ६ युतो याव ४
या ३४ रू ७२ । अयं शून्यगुणो नवतिसम इति शून्येन गुणने
प्राप्ते शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेदिति पूर्व शून्यो हरः इदानीं गुण-
स्तस्मादुभयोर्गुणहरयोर्नाशः एवं पक्षौ या व ४ । या ३४ । रू ७२ ।

या व ० । या ० । रू ९० ।

सम शोधनात् पक्षशेषे या व ४ । या ३४ । रू ० ।

या व ० । या ० । रू १८ ।

एतौ पक्षौ षोडशभिः संगुण्य चतुर्ल्लिशद्वर्गतुल्यानि रूपाणि
प्रक्षिप्य मूले गृहीत्वा पक्षयोः शोधनार्थं न्यासः या ८ रू ३४ ।

या ० रू ३८ ।

उक्तवज्जातो राशिः ९ ।

अत्र । 'वाद्ययुक्तोऽथवोनितं' इति पाठे राशिः या १ ।

खद्वतः $\frac{या १}{०}$ । आधेन या १ युक्तोनीकरणाय खहरत्वात्

समच्छेदीकरणेन शून्येनैव युक्तोनितः स एव $\frac{या १}{०}$

वर्गितः $\frac{या व १}{०}$ । स्वपदेनाख्यः $\frac{या व १}{०}$ । $\frac{या १}{०}$

अयं खगुणः पूर्व खहरत्वाद् गुणहरयोर्नाशे कृते जातः याव १
या १ । अयं नवतिसम इति समशोधनाय न्यासः । या व १ । या १ । रू ० ।

या व ० । या ० । रू ९० ।

समाशोधने कृते पक्षाविमौ चतुर्भिः संगुण्य एकं क्षिप्त्वा मूले ।

या २ रू १ ।

या ० रू १९ ।

अत्र समशोधनाज्जातः प्राग्वद्वाशिः ९ ।

भाषा—कौन ऐसी राशि है जिसमें शून्य का भाग देवे उस राशि को उसीमें जोड़ देवे उसमें ९ घटा देवे वर्ग कर देवे उसका वर्गमूल उसी वर्ग में जोड़ देवे शून्य से गुणा करे तो नवे होता है ।

उदाहरणम् ।

कः स्वार्धसहितो राशिः खगुणो वर्गितो युतः ।

स्वपदाभ्यां खभक्तश्च जातः पञ्चदशोच्यताम् ॥ ५ ॥

अत्रराशिः या १ । अयं स्वार्धयुतः $\frac{\text{या } ३}{२}$ खगुणः खं न कार्यः

किन्तु खगुण एव चिन्त्यः शेषविधौ कर्त्तव्ये या ३ । वर्गितः या व ३

स्वपदाभ्यां या ३ युतो जातः $\frac{\text{या व ९ या १२}}{४}$ । अयं खभक्तः ।

अत्रापि प्राग्बद्गुणहरयोस्तुल्यत्वान्नाशे कृतेऽविकृतो राशिः । तच्च पञ्चदश समं कृत्वा समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधनाज्जातौ पक्षौ या व ९ । या १२ । रू ० ।

या व ० । या ० । रू ६० ।

एतौ चतुर्युतौ कृत्वा मूले गृहीत्वा पुनः समशोधनालब्धं यावत्तावन्मानम् २ तथा चात्पटाटीगणिते

खहरः स्यात् खगुणः—खं खगुणश्चिन्त्यश्च शेषविधौ ।

शून्ये गुणके जाते खं हारश्चेत् पुनस्तथा राशिः ॥

अविकृत एव विचिन्त्यः सर्वत्रैवं विपश्चिद्धिः ॥

भाषा—बह कौन सा राशि है जिसको अपने आधे से युक्त करके शून्य से गुणा कर देते हैं फिर उसका वर्ग कर देते हैं और उसमें उसका दूना मूल जोड़कर शून्य से फिर भाग देते हैं तो पन्द्रह होता है ।

* संशो० खगुणः खमित्यनेन अग्रे न गणितमशक्तिः तेन नवीनमते शब्दमुदाहरणं नोपयुक्तम् ।

उदाहरणम्—

राशिर्द्वादशनिम्नो राशिघनाढ्यश्च कः समो यः स्यात् ।

राशिकृतिः षड्गुणिता पञ्चत्रिंशद्युता विद्वन् ॥६॥

अत्र राशिः या १ । अयं द्वादशगुणितो राशिघनाढ्यश्च याघ १
या १२ । अयं याव ६ रू ३५ सम इति शोधने कृते जातमाद्यप
याघ १ याव ६ या १२ । अन्यपक्षे रू ३५ । अनयोः ऋणरूपाष्टकं
प्रक्षिप्य घनमूले या १ रू २ ।

या ० । रू ३ ।

पुनरनयोः समीकरणेन जातो राशिः ५ ।

भाषा—हे विद्वन् वह कौन सा राशि है, जिसको बारह से गुणकर यदि राशि
का घन उसमें जोड़ देते हैं तो षड्गुणितराशि के वर्ग में पैंतीस जुड़े हुए के
समान होता है ।

उदाहरणम्

को राशिर्द्विंशतीक्षुण्णो राशिर्वर्गयुतो हतः ।

द्वाभ्यां तेनोन्नितो राशिर्वर्गवर्गोऽयुतं भवेत् ॥

रूपोन्नं वद तं राशिं वेत्सि बीजक्रियां यदि ॥ ७ ॥

अत्र राशिः या १ । द्विंशतीक्षुण्णः या २०० । राशिर्वर्गयुतो
जातः याव १ या २०० । अयं द्वाभ्यां गुणितः याव २ या ४०० ।
अनेनायं यावव १ राशिर्वर्गवर्गः ऊन्नितो जातः यावव १ याव २
या ४०० अयं रूपोन्नायुतसम इति समशोधने कृते जातौ पक्षौ

यावव १ याव २ या ४०० । रू ० ।

यावव ० । याव ० । या ० । रू ९९९९ ।

अत्रापक्षे किल यावत्तावच्चतुःशतीं रूपाधिकां प्रक्षिप्य मूलं लभ्यते
परं तावति क्षिप्ते नान्यपक्षस्य मूलमस्ति एवं क्रिया न निर्वहति अतोऽत्र

स्वबुद्धिः । इह पक्षयोर्यावत्तावद्गर्गचतुष्टयं यावत्तावच्चतुःशतीं रूपं च प्रक्षिप्य मूले याव १ । या ० । रू १ ।

याव ० । या २ । रू १०० ।

पुनरनयोः समीकरणेन प्राग्वल्लब्धं यावत्तावन्मानं ११ । इत्यादि बुद्धिमता ज्ञेयम् ।

भाषा—वह कौन सा राशि है जिसको दो सौ से गुणा करे राशि का वर्ग जोड़ देवे । फिर दो से गुणकर उसको राशि के वर्ग में घटा देते हैं तो एकोन अयुत होता है तो उस राशि को बताओ ।

उदाहरणम्

वनान्तराले प्लवगाष्टभागः संवर्गितो वल्गति जातरागः ।

फूत्कारनादप्रतिनादहृष्टा दृष्टा गिरौ द्वादश ते कियन्तः ॥८॥

अत्र कपियूथं यावत्तावत् । अस्याष्टांशवर्गो द्वादशयुतो यूथसम इति

या व १ या ० रू ७६८ ।
पक्षौ ६४

या व ० या १ रू ०

अनयोः समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधने च कृते जातौ पक्षौ

या व १ या ६४ रू ० ।

या व ० या ० रू ७६८ ।

इह पक्षयोर्द्वात्रिंशद्गर्ग १०२४ प्रक्षिप्य मूले या १ रू ३२ ।

या ० रू १६ ।

अत्राव्यक्तपक्षर्णरूपेभ्योऽरूपानि व्यक्तपक्षरूपाणि सन्ति तानि धन-
मृगं च कृत्वा लब्धं द्विविधं यावत्तावन्मानं ४८।१६ ।

भाषा—किसी वन में वानरों के समूह का आठवां भाग वर्ग किया हुआ आनन्दपूर्वक शब्द कर रहा है । और १२ बारह वहीं किसी पर्वत पर आपस में एक दूसरे के प्रति शब्द कर रहे हैं तो बताओ वे कितने हैं ।

उदाहरणम्

यूथात्पञ्चांशकस्यूनो वर्गितो गह्वरं गतः ।

दृष्टः शाखामृगः शाखामारूढो वद ते कति ॥ ९ ॥

अत्र यूथप्रमाणं यावत्तावत् । अत्र पञ्चांशकस्यूनः

या १ रू १५ वर्गितः याव १ या ३० रू २२५
५ २५

एतद्दृष्टेन युतः याव १ या ३० रू २५०
२५

यूथसम इति पक्षौ समच्छेदीकृत्य छेदगमे शोधने च कृते जातौ

याव १ या ५५ रू ० ।

याव ० या ० रू २५० ।

एतौ चतुर्भिः संगुण्य पञ्चपञ्चाशद्वर्गं ३०२५ प्रक्षिप्य मूले ।

या २ रू ५५ ।

या ० रू ४५ ।

अत्रापि प्राग्वल्लब्धं द्विविधं मानं ५०।५ द्वितीयमत्र न ग्राह्यमनु-
पपन्नत्वात्* ।

न हि व्यक्ते ऋणगते लोकस्य प्रतीतिरस्तीति ।

भाषा—वानरों के यूथ से उसका पाचवाँ हिस्सा तीन करके घटा हुआ तथा
वर्ग किया हुआ किसी पर्वत की गुहा को चला गया और एक वानर किसी वृक्ष
की डाल पर बैठा हुआ देखने में आया तो बताओ वे कितने वानर थे ।

उदाहरणम्

कर्णस्य त्रिलवेनोना द्वादशाङ्गुलशङ्कुभा ।

चतुर्दशाङ्गुला जाता गणक ब्रूहि तां द्रुतम् ॥१०॥

अत्र छाया या १ । इयं कर्णत्र्यंशोना चतुर्दशाङ्गुला जाता अतो

वैपरीत्येनास्याश्चतुर्दश विशोध्य शेषं कर्णत्र्यंशः या १ रू १४ । अयं

* द्वितीयं मानं ५ जस्य प्रवृत्ताशकः १ व्यूनः २ वर्गितः ४ इत्यम् १ अतोऽत्र न
किञ्चिदनुपपन्नत्वम् ।

त्रिमुणो जातः कर्णः या ३ रू ४२ । अस्य वर्गः याव ९ या २५२ रू १७६४ कर्णवर्गेणानेन याव १ रू १४४ सम इति समशोधने कृते जातौ पक्षौ याव ८ या २५२ रू ० ।

याव ० । या ० । रू १६२० ।

एतौ पक्षौ द्वाभ्यां संगुण्य ऋणत्रिषष्टिवर्गं प्रक्षिप्य मूले

या ४ रू ६३ ।

या ० रू २७ ।

पक्षयोः पुनः समीकरणं कृत्वा प्राग्वल्लब्धं द्विविधं यावत्तावन्मानं $\frac{४५}{२}$ । ९ उत्थापिते छाये च $\frac{४५}{२}$ । ९ । द्वितीयच्छाया चतुर्दशभ्यो न्यूनाऽतोऽनुपपन्नत्वान्न* ग्राह्या अत उक्तं द्विविधं कचिदिति । अत्र पञ्चनाभवीजे ।

व्यक्तपक्षस्य चेन्मूलमन्यपक्षरूपतः । अरुपं घनर्णगं कृत्वा द्विविधोत्पद्यते मितिः ॥ इति यत्परिभाषितं तस्य व्यभिचारोऽयम्† ।

भाषा—जिस जात्य त्रिभुज में छाया, भुज है, द्वादशाङ्गुलशंकु कोटि है और छायाकर्ण कर्ण है । वहां यदि कर्ण के तीसरे भाग से घटी हुई द्वादशांगुल शंकु की छाया चौदह अङ्गुल की होती है तो उस द्वादशांगुल शंकु की छाया का क्या प्रमाण है ।

उदाहरणम्—

चत्वारो राशयः के ते मूलदा ये द्विसंयुताः ।

द्वयोर्द्वयोर्थासन्नघाताश्चाष्टादशान्विताः ॥११॥

मूलदाः सर्वमूलैक्यादेकादशयुतात्पदम् ।

त्रयोदश सखे जातं बीजज्ञ वद तान्मम ॥१२॥

अत्र राशिर्येन युतो मूलदो भवति स किल राशिक्षेपः । मूलयोरन्तर-

* संशो । कर्णत्र्यंशः = छा-१४ = ६-१४ = -५

∴ ६-(-५) = ६ + ५ = ११ अतोऽत्रापि न किञ्चिदनुपपन्नत्वम् ।

† संशो । काचार्यप्रदर्शितोभयत्रोदाहरणे नास्ति किञ्चिदनुपपन्नत्वं नवीनानां मते अतः पक्ष-नामबीजे इदं दूषणं भूषणमेवान्वया पक्षनामः रवबीजे द्विविधमानप्रपंचं प्रदर्शितवानित्यस्य ज्ञानं तस्य बीजगणितस्य संप्रतं लोपत्वात् दुर्घटमेवासीत् ।

वर्गेण हतो राक्षिषो वधक्षेपो भवति । तयोः राक्षयोर्वधस्तेन युतोऽवश्यं मूलदः स्यादित्यर्थः । * राक्षिमूलानां यथासन्नं द्वयोर्द्वयोर्वधाः राक्षिषोना राक्षिवधमूलानि भवन्ति ।

अत्रोदाहरणे राक्षिषोपाद्वधक्षेपो नवगुणः नवानां मूलं त्रयः अतस्त्यु-
त्तराणि राक्षिमूलानि ।

या १ रू० । या १ रू ३ । या १ रू ६ । या १ रू ९ एषां
द्वयोर्द्वयोर्वधाः राक्षिषोनाः सन्तः राक्षिवधानामष्टादशयुतानां मूलानि
भवन्ति अत उक्तवद्वधमूलानि ।

या व १ या ३ रू २ ।

या व १ या ९ रू १६ ।

या व १ या १५ रू ५२ ।

एषां पूर्वमूलानां च सर्वेषां योगः या व ३ या ३१ रू ८४
इदमेकादशयुतं त्रयोदशवर्ग—

या व ३ या ३१ रू ९५ ।

या व ० या ० रू १६९ ।

समं कृत्वा पक्षशेषं द्वादशभिः संगुण्य तयोरेकत्रिंशद्वर्गं ९६१
प्रक्षिप्य मूले । या ६ रू ३१ ।

या ० रू ४३ ।

पुनरनयोः समीकरणेन लब्धयावत्तावन्मानेन २ अनेनोत्थापितानि
राक्षिमूलानि २ । ५ । ८ । ११ एषां वर्गा राक्षयः क्षेपोनाः अर्था-
द्वाशयो भवन्ति २, २३, ६२, ११९ ।

* संशो० अत्रासन्नबोधोः राक्षोः क्षेपयोगेन मूलमानं क्रमेण कल्पते वा, का तदा
विक्रोमप्रकारेण क्रमेण द्वौ राशी या^२ - क्षे, का^२ - क्षे, अथानबोधातः (या^२ - क्षे)
(का^२ - क्षे) = या^२ का^२ - का^२ क्षे = या^२ क्षे + क्षे^२ समयोजनेन घात + या^२ क्षे +
का^२ क्षे - २ या का क्षे = या^२ का^२ - २ या का क्षे + क्षे^२ मूलग्रहणेन प्रथमपक्षमूलम् =
या का - क्षे इत्युपपन्नं राक्षिमूलानां यथासन्नं द्वयोरित्यादि ।

अत्राद्यपरिभाषा—

* राशिक्षेपाद्वधक्षेपो यदुणस्तत्पदोत्तरम् । अव्यक्ता राशयः कल्प्या वर्गिताः क्षेपवर्जिताः । इयं कल्पना गणितेऽतिपरिचिता स्यात् ।

भाषा—वे चार कौन से राशियाँ हैं जिनमें दो जोड़ देने पर मूलप्रद होते हैं । और उनमें दो दो के आसन्नघातों में १८ अठारह जोड़ देते हैं तो मूलप्रद होते हैं । अर्थात् पहिली और दूसरी राशि का और दूसरी और तीसरी राशि का, तीसरी का चौथी राशि के साथ जो घात होये इन घातों में १८ जोड़ देने पर भी पूरा वर्ग मिलता है । और इस प्रकार सब मूलोंके ऐक्य में ११ ग्यारह जोड़ देने से १३ वर्ग मूल आता है तो हे बीजगणित को जानने वाले मित्र उन राशियों को बतलाओ ।

पहिले यहाँ पर राशि कल्पना करने की युक्ति लिखते हैं । जिस किसी राशि में जो संख्या जोड़ने से मूल मिले वह संख्या उस राशि का क्षेप कहलाती है । तथा दो राशियों के घात में जो संख्या जोड़ने पर पूरा मूल मिलजाय वह संख्या-वधक्षेप कहलाती है । वधक्षेप का मान ऐसी अवस्था में दो राशियों के अलग २ मूलों के अन्तर वर्ग को राशि क्षेप से गुण देनेपर होता है । अर्थात् दो मूलों के अन्तर वर्ग को राशि क्षेप से गुण देनेपर वधक्षेप होता है । इसलिये दो राशियों के गुणन फल में उनका वध क्षेप जोड़ देनेपर अवश्यमूल मिलेगा । और राशि मूलोंमें दो दो मूलों को यथाऽऽसन्नघात में राशि क्षेप घटाने से राशि के वधमूल होतेहैं ।

उदाहरणम्

क्षेत्रे तिथिनखैस्तुल्ये दोः कोटी तत्र का श्रुतिः ।

उपपतिश्च† रूढस्य गणितस्यास्य कथ्यताम् ॥ १३ ॥

अत्र कर्णः या १ । एतत् त्र्यसं परिवर्त्य यावचावत्कर्णो भूः कल्पिता ।

भुजकोटी तु भुजौ तत्र यो लम्बस्तदुभयतो ये त्र्यसे तयोरपि भुजकोटी

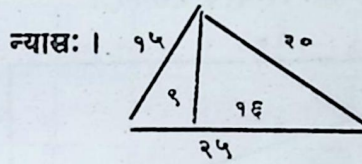
* संशो० अथ राशोर्वधो येन युतो मूलदो भवति स किल राशिक्षेपस्तेन

वक्षे = क्षे (या^२ - २ या का + का^२) अतः $\frac{\text{वक्षे}}{\text{क्षे}} = \text{या}^२ - २ या का + का^२$

वा $\sqrt{\frac{\text{वक्षे}}{\text{क्षे}}} = \text{या} - का$ इत्युपपन्नम् ।

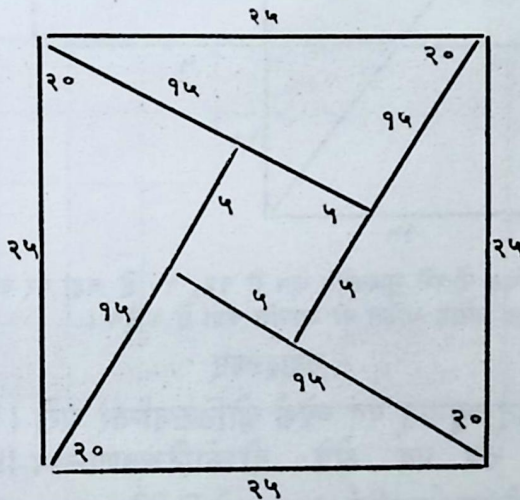
† भुजकोटिवर्गयोगः कर्णवर्गसमो भवतीत्येषः सिद्धान्तः प्राचीनसमयादेव विदितस्तेनैव रूढः ।

पूर्वरूपे भवतः । अतल्लैराशिकं यदि यावत्तावति कर्णे अयं १५ भुजस्तदा-
 भुजतुल्ये कर्णे क इति लब्धो भुजः स्यात् । सा भुजाश्रिताबाधा रू $\frac{२२५}{१}$ ।
 पुनर्यदि यावत्तावति कर्णे इयं २० कोटिस्तदा कोटि २० तुल्ये कर्णे केति
 जाता कोट्याश्रिताबाधा रू $\frac{४००}{१}$ । आबाधायुतिर्यावत्तावत्कर्णसमा क्रियते
 तावद् भुजकोटिवर्गयोगस्य पदं कर्णमानमुत्पद्यते २५ । अनेनोत्थापिते
 जाते आबाधे ९ । १६ । अतो लम्बः १२ । क्षेत्रदर्शनम् ।



अथान्यथा वा कथ्यते कर्णः या १ । दोःकोटिघाताघं व्यस-
 क्षेत्रस्य फलम् १५० । एतद्विषमव्यसचतुष्टयेन कर्णसमचतुर्भुजं क्षेत्र-
 मन्यत् कर्णज्ञानार्थं कल्पितम् ।

न्यासः—



एवं मध्ये चतुर्भुजमुत्पन्नमत्रकोटिभुजान्तरसमं भुजमानम् ५ ।

अस्य फलम् २५ । भुजकोटिवधो द्विगुणस्यस्त्राणां चतुर्णां फलं ६०० ।

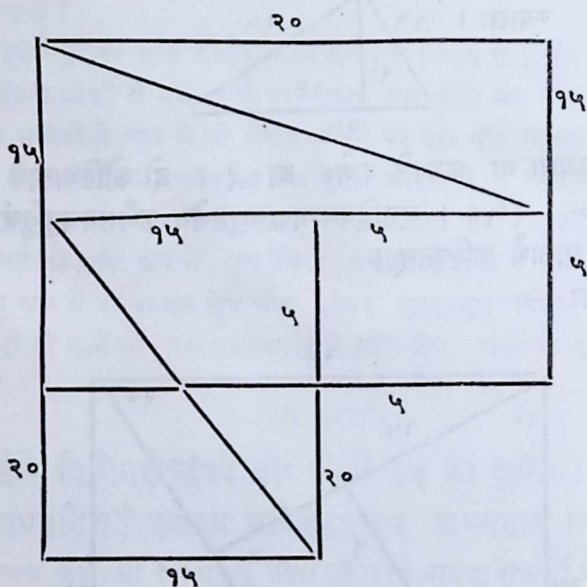
एतद्योगः सर्वं बृहत्क्षेत्रफलं ६२५ एतच्चावचावद्वर्गसमं कृत्वा
लब्धं कर्णमानं २५ । यत्र व्यक्तस्य न पदं तत्र करणीगतः कर्णः ।

एतत्करणसूत्रं वृत्तम् ।

दोः कोट्यन्तरवर्गेण द्विग्नो घातः समन्वितः ।

वर्गयोगसमः स स्याद् द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥ १४ ॥

अतो लाघवार्थं दोःकोटिवर्गयोगपदं कर्ण इत्युपपन्नम् । तत्र
तान्यपि क्षेत्रस्य खण्डान्यन्यथा विन्यस्य दर्शनम् ।



भाषा—जिस क्षेत्रमें भुजकोटि क्रम से १५, २० है वहां पर कर्ण का प्रमाण क्या होगा । इस प्रसिद्ध गणित को उपपत्ति क्या है कहिये ।

उदाहरणम्

भुजात् त्र्युनात् पदं व्येकं कोटिकर्णान्तरं सखे ।

यत्र तत्र वद क्षेत्रे दोःकोटिश्रवणान्मम ॥ १५ ॥

अत्र कोटिकर्णान्तरमिष्टं २ । अतो विबोमेन भुजः १२ । तद्यथा
कल्पितमिष्टं २ । अस्य सरूपस्य ३ वर्गः ९ । त्रियुतः १२ । अस्य वर्गः

१४४ । तत्कोटिकर्णवर्गान्तरम् । अतो राश्योर्वर्गान्तरं योगान्तरघातसमं
स्यात् वर्गो हि समचतुरस्रक्षेत्रफलम् ।

अयं किल सप्तवर्गः ४९ ।

७

न्यासः । ७

७

७

अस्मात् पञ्चवर्गं २५ विशोध्य शेषस्य २४ दर्शनम् ।

७

न्यासः । ७

५

५

५

५

७

इहान्तरं द्वौ २ । योगो द्वादक्ष १२ । योगान्तरघातसमकोष्ठका
वर्चन्ते । तदर्शनम् ।

A rectangular grid divided into two rows of five squares each. The number "92" is written above the top row and below the bottom row.

इत्युपपन्नं वर्गान्तरं योगान्तरघातसममिति । अत इदं वर्गान्तरं १४४
कल्पितकोटिकर्णान्तरेण २ भक्तं जातं ७२ । अयं योगो द्विधाऽन्त-
रेणोन्युतोऽर्धित इति संक्रमणेन जातौ कोटिकर्णौ ३५, ३७ । एवमेकेन
भुजकोटिकर्णाः ७, २४, २५ । त्रिभिः १९, १५६, १५७ । चतुर्भिर्वा
२८, ९६, १०० । एवमनेकधा । एवं सर्वत्र ।

भाषा—जिस किसी क्षेत्र में तीन कम भुज का वर्गमूल, एक कम, कोटिकर्णा-
न्तर है। वहाँ भुज, कोटि, कर्ण के प्रमाण अलग बताओ।

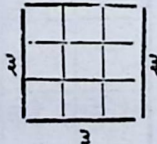
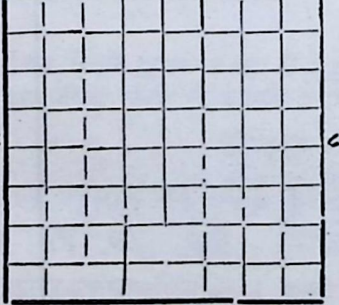
अस्य सूत्रं वृत्तम्

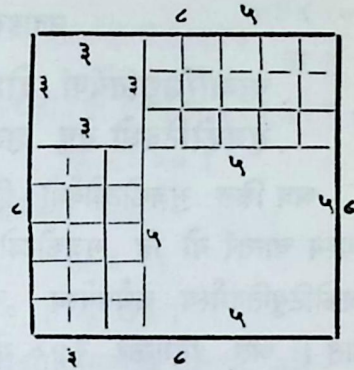
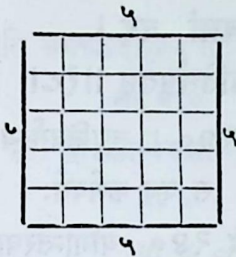
वर्गयोगस्य यद्वाशयोर्युतिवर्गस्य चान्तरम् ।

द्विघातसमानं स्याद् द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥१६॥

अत्र शशी ३।५ । अनयोर्युतिवर्गः ६४ । तयोर्वर्गौ ९ । २५ ।
अनयोर्योगः ३४ । एतयोः ६४।३४ अन्तरं ३० । इदं शशयोर्घातेन
१५ द्विज्जेन ३० समं भवतीत्युपपन्नं तेषां स्वरूपाणि यथा ।

न्यासः ।





भाषा—किंसी दो राशियोंका वर्णयोग और योगवर्ग का अन्तर उन दोनों के दूने घात के बराबर होता है । जैसा दो अव्यक्तों का ।

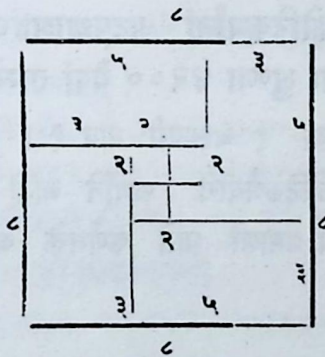
अन्यत् करणसूत्रं वृत्तम् ।

चतुर्गुणस्य घातस्य युतिवर्गस्य चान्तरम् ।

राश्यन्तरकृतेस्तुल्यं द्वयोरव्यक्तयोर्यथा ॥१७॥

अत्र राशी ३ । ५ । अनयोर्युतिवर्गात् चतुर्षु कोणेषु घातचतुष्टयेऽ-
पनीते मध्ये राश्यन्तरवर्गसमाःकोष्ठका दृश्यन्त इत्युपपन्नम् ।

तद्दर्शनम् ।



भाषा—किंसी दो राशियों का योगवर्ग और उनके चौगुने घात का अन्तर उन दोनों राशियोंके अन्तर वर्ग के बराबर होता है । जैसे दो अव्यक्तों में होता है ।

उदाहरणम् ।

चत्वारिंशद्युतिर्येषां दोःकोटिश्रवसां वद ।

भुजकोटिवधो येषु शतं विंशतिसंयुतम् ॥१८॥

अत्र किल भुजकोट्योर्वधो द्विगुणः २४० । तद्युतिवर्गस्य वर्ग-
योगस्य चान्तरं यो हि भुजकोट्योर्वर्गयोगः स एव कर्णवर्गः । अतो
भुजकोटियुतिवर्गस्य कर्णवर्गस्य चान्तरमिदं २४० योगान्तरघातसमं
स्यात् । अत इदमन्तरं २४० योगेनानेन ४० भक्तं जातं भुजकोटि-
युतिकर्णान्तरम् ६ । योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धित इत्यादिना संक्रमणेन
जातो भुजकोटियोगः २३ । कर्णः १७ । चतुर्गुणस्य घातस्य इति भुज-
कोटियुतिवर्गादस्मात् ५२९ चतुर्गुणघातेऽस्मिन् ४८० शोधिते शेषं
जातो दोःकोट्यन्तरवर्गः ४९ । अस्य मूलं ७ । इदं दोःकोटिविवरम् ।
योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धित इति जाते भुजकोटी ८, १५ ।

भाषा—जिस किसी त्रिभुज क्षेत्र में भुज, कोटि, और कर्ण इनका योग ४०
चालीस है । और भुज, कोटि का घात दोसौचालीस है । तो बचाओ भुज,
कोटि, कर्ण क्या हैं ।

उदाहरणम् ।

योगो दोःकोटिकर्णानां षट्पञ्चाशद्वधस्तथा ।

षट्शती सप्तभिः क्षुण्णा ४२०० येषां तान्मे पृथग्वद ॥१९॥

अत्र कर्णमानम् या १ अस्यवर्गः याव १ । स एव भुजकोटि-
वर्गयोगः । अत्रदोःकोटिकर्णयोगे कर्णेन जातो भुजकोटियोगः ।
या १ रू ५६ । तथा त्रयाणां घाते कर्णभक्ते जातो भुजकोटिवधः
रू $\frac{४२००}{१}$ ।

अथ वर्गयोगस्य यद्वाश्योः युतिवर्गस्यचान्तरं द्विगुणघातसमानं स्यात्
इति वर्गयोगः या व १ । युतिवर्गः या व १ या ११२ रू ३११६ ।

अनयोरन्तरं या ११२ं रू ३१३६ । एतद्विघातस्यास्य $\frac{८४५००}{या १}$ ।

सममिति समच्छेदीकृत्य छेदगमे जातौ पक्षौ । या ११२ं या ३१३६ । रू ० ।

या व ० या ० रू ८४०० ।

एतौ द्वादशाधिकशतेनापवर्त्य शोधितौ जातौ ।

या व १ । या २८ । रू ० ।

या व ० । या ० । रू ७५ ।

एतौ ऋणरूपेण संगुण्य चतुर्दशवर्गसमरूपाणि प्रक्षिप्य मूले

या १ रू १४ ।

या ० रू ११ ।

उक्तवच्छोधने कृते लब्धं यावत्तावन्मानं २५ । अत्र विकल्पेन द्वितीयं कर्णमानं ३ उत्पद्यते । एतदनुपपन्नत्वान्न ग्राह्यम् । अत्र त्रयाणां घातः ४२०० । कर्ण २५ भक्तो जातो भुजकोटिवधः १६८ । तथेयं भुजकोटियुतिः ३१ । चतुर्गुणस्य घातस्य इत्यादिना जातं दोःकोट्यन्तरं १७ । योगोऽन्तरेणोनयुतोऽर्धित इत्यादिना जाते भुजकोटी ७, २४ । एवं सर्वत्र क्रियोपसंहारं कृत्वा मतिमद्भिः कापि युक्त्यैवोदाहरणमानीयते । अन्यक्तकल्पनया तु महती क्रिया भवति ।

इति श्रीभास्करीये बीजगणितेऽन्यक्तवर्गादि समीकरणं । एकवर्ण-सम्बन्धि मध्यमाहरणं समाप्तम् ।

भाषा--भुज, कोटि और कर्ण इनका योग ५६ छप्पन है तथा घात ४२०० वयालीस सौ है तो उनको अलग अलग बताओ कि भुज, कोटि, कर्ण के प्रमाण क्या है ?

अथानेकवर्णसमीकरणं बीजम् । यत्र सूत्रं सार्धवृत्तत्रयम् ।

आद्यं वर्णं शोधयेदन्यपक्षा

दन्यान् रूपाण्यन्यतश्चाद्यभक्ते ।

पक्षेऽन्यस्मिन्नाद्यवर्णोन्मितिः स्याद्-

वर्णस्यैकस्योन्मितीनां बहुत्वे ॥ १ ॥

समीकृतच्छेदगमे तु ताभ्य-

स्तदन्यवर्णोन्मितयः प्रसाध्याः ।

अन्त्योन्मितौ कुट्टविधेर्गुणाप्तौ

ते भाज्यतद्भाजकवर्णमाने ॥ २ ॥

अन्येऽपि भाज्ये यदि सन्ति वर्णा-

स्तन्मानमिष्टं परिकल्प्य साध्ये ।

विलोमकोत्थापनतोऽन्यवर्ण-

मानानि भिन्नं यदि मानमेवम् ॥ ३ ॥

भूयः कार्यः कुट्टकोऽत्रान्त्यवर्ण

तेनोत्थाप्योत्थापयेद् व्यस्तमाद्यान् ॥

इदमनेकवर्णसमीकरणं बीजम् । यत्रोदाहरणे द्वित्र्यादयोऽन्यक्त
राशयो भवन्ति तेषां यावत्तावदादयो वर्णाः मानेषु कल्प्यास्तेऽत्र पूर्वाचार्यैः
कल्पिताः । यावत्तावत् कालक नीलक पीतक लोहितक हरितक श्वे-
तक चित्रक कपिलक पिङ्गलक धूम्रक पाटलक शवलक श्यामलक मेचक
इत्यादि । अथवा कादीन्यक्षराणि, अव्यक्तानां संज्ञाः असंकरार्थं
कल्प्याः । अतः प्राग्बुद्धेशकालापवद्विधिं कुर्वता गणकेन पक्षौ समौ
कार्यौ पक्षाः वा समाः कार्याः ततः सूत्रावतारोऽयम् ।

तयोः समयोरेकस्मात् पक्षादितरपक्षस्याद्यवर्णं शोधयेत् तदन्य-
वर्णान् रूपाणि च इतरपक्षाच्छोधयेत् । ततः आद्यवर्णशेषेणेतरेपक्षे भक्ते
भाजकवर्णोन्मितिः । बहुषु पक्षेषु ययोर्ययोः साम्यमस्ति तयोरेवं कृते
सति अन्या उन्मितयः स्युः । ततस्तासून्मितिषु एकवर्णोन्मितयो यद्यने-
कधा भवन्ति ततस्तासां मध्ये द्वयोर्द्वयोः समीकृतच्छेदगमेनाद्यं वर्णं
शोधयेदित्यादिनान्यवर्णोन्मितयः स्युः । एवं यावत्तावत्सम्भवः ।
ततोऽन्त्योन्मितौ भाज्यवर्णे योऽङ्कः स भाज्यराशिर्यो भाजके स भाजकः ।
रूपाणि क्षेपः । अतः कुट्टकविधिना यो गुण उत्पद्यते तद्भाज्यवर्णमानं

या लब्धिस्तद्भाजकवर्णमानं तयोर्मानयोर्द्विभाजकभाज्याविष्टेन वर्णेन गुणितौ क्षेपकौ कल्प्यौ । ततः स्वस्वमानेन सक्षेपेण पूर्ववर्णोन्मितौ वर्णावुत्थाप्य स्वच्छेदेन हरणे यल्लभ्यते तत्पूर्ववर्णस्य मानम् । एवं विलोमकोत्थापनतोऽन्यवर्णमानानि भवन्ति । यदित्वन्त्योन्मितौ व्यादयो वर्णा भवन्ति तदा तेषामिष्टानि मानानि कृत्वा स्वस्वमानैस्तानुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्य कुट्टकः कार्यः ।

अथ यदि विलोमकोत्थापने क्रियमाणे पूर्ववर्णोन्मितौ तन्मितिभिन्ना लभ्यते तदा कुट्टकविधिना यो गुण उत्पद्यते स क्षेपः स भाज्यवर्णमानं तेनान्त्यवर्णमानेषु तं वर्णमुत्थाप्य पूर्वोन्मितिषु विलोमकोत्थापनप्रकारेणान्यवर्णमानानि साध्यानि । इह यस्य वर्णस्य यन्मानमागतं व्यक्तमव्यक्तं व्यक्ताव्यक्तं वा तस्य मानस्य व्यक्ताङ्गेन गुणने कृते तद्वर्णाक्षरस्य निरसनमुत्थापनमुच्यते ।

भाषा—जिस स्थल में दो तीन आदि अनेक अव्यक्त वर्ण होंवे वहां उनके मान यावत्तावत्, कालक, नीलक, पीतक, लोहितक, हरितक, श्वेतक, चित्रक, कपिलक, पिङ्गलक, धूम्रक, पाटलक श्यामलक अथवा, या, का, नी, पी, घ, प, य, क, इत्यादि वर्ण कल्पना करना चाहिये । फिर प्रश्नकर्ता के कथनानुसार क्रिया करके समीकरण के लिये दो, अथवा अधिक समान पक्ष बना लेने चाहिये । फिर उन पक्षों में से एक पक्ष के आय वर्ण को दूसरे पक्ष के आय वर्ण में घटा देना चाहिये । और दूसरे पक्ष के वर्ण और रूप को अन्य पक्ष के सजातीय मान में से घटा देना चाहिये । इसका यह आशय है कि यदि पहिले पक्ष को दूसरे पक्ष के आय वर्ण में घटाया गया तो दूसरे पक्ष के अन्य वर्ण तथा रूप को पहिले पक्ष के अन्यवर्ण तथा रूप में घटाना चाहिये और यदि दूसरे पक्ष के आय वर्ण को पहिले पक्ष के आय वर्ण में घटाया गया तो वहां पर भी पहिले पक्ष के अन्य वर्ण तथा रूप को दूसरे पक्ष के अन्य वर्ण तथा रूप में घटाओ । फिर आय पक्ष का दूसरे पक्ष में भाग देना चाहिये । इस प्रकार आय वर्ण की उन्मिति होगी । यदि एक वर्ण की अनेक उन्मिति आवें तो उनसे समीकरण द्वारा अन्य वर्ण की उन्मिति बनेगी । इस प्रकार अन्त्य में जो उन्मिति आवे उस पर से कुट्टक द्वारा गुण लब्धि लानी चाहिये । सो इस प्रकार अन्त्य में जो भाज्य तथा भाजकगत वर्णाङ्क होंवे उनको

कुट्टक सम्बन्धि भाज्य भाजक कल्पना करो और रूपों को क्षेत्र कल्पना करो, बाद में इस प्रकार कुट्टक के नियम से जो गुण लब्धि आवेंगे उनमें से गुण भाज्य वर्ण का मान और लब्धि भाजकवर्ण का व्यक्त मान होगा। और यदि अन्त्य उन्मिति में और भी वर्ण होवे तो उनका इष्ट मान कल्पना करके अपने अपने मान से उन वर्णों में उत्थापन देने पर आये हुए अङ्कों को रूप में जोड़ देना देना चाहिये। जिससे भाज्य स्थान में एक वर्णाङ्क तथा रूप हो जावे। बाद में उनसे कुट्टक द्वारा जो गुणलब्धी होगी वे क्रम से भाज्य, भाजक वर्ण के मान होंगे। यदि भाज्य में अन्यवर्ण हों तो उनका मान इष्ट कल्पना करके गुणलब्धी का मान साधन करना चाहिये। और विलोम उत्थापन के द्वारा अन्य वर्ण यानी पूर्वसाधित भाज्य भाजक के वर्ण से अतिरिक्त वर्ण के मान सिद्ध करना चाहिये। इस प्रकार आये हुए मान के दृढ़ भाज्य, भाजक को इष्ट वर्ण से गुण देना चाहिये। फिर इस नूतन भाज्य भाजक को क्षेत्र कल्पना करके क्षेत्र के सहित अपने अपने मान से पूर्व वर्णोन्मिति के वर्ण में उत्थापन देना चाहिये।

और अपने अपने छेद का भाग देवे इस प्रकार जो लब्धि मिले वह पूर्व वर्णका मान होगा। यदि विलोम उत्थापन से भी पूर्व वर्ण का मान भिन्न आवे तो फिर कुट्टक करना चाहिये। और फिर वहां पर गुणलब्धी को सक्षेप करके भाज्य, भाजक के वर्णमान को जानना चाहिये। यहां सत्तेप गुणसे अन्त्य वर्णमान में जो वर्ण होवे उसमें उत्थापन देकर फिर आद्य से व्यस्त उत्थापन देना चाहिये।

यहां पर जिस वर्ण का व्यक्त अथवा अव्यक्त जो मान आया है उसे व्यक्ताङ्क से गुण देने से उस वर्ण का निरसन यानी दूरीकरण कहलाता है इसलिये उसको उत्थापन कहते हैं।

उदाहरणम्

माणिक्यामलनीलमौक्तिकमिति रिति ॥ १ ॥

अत्र माणिक्यादीनां मौल्यानि यावत्तावदादीनि प्रकल्प्य तद्गुणरत्न संख्यां च कृत्वा रूपाणि च प्रक्षिप्य समशोधनार्थं

न्यासः । या ५ का ८ नी ७ रू ९० ।

या ७ का ९ नी ६ रू ६२ ।

आद्यं वर्णं शोधयेदित्यादिना जाता यावत्तावदुन्मितिः

का १ नी १ रू २८

या २

इयमेकैव एकत्वादियमेवान्त्यातोऽत्र कुट्टकः कार्यः । इह भाज्ये
वर्णद्वयं वर्त्ततेऽतो नीलकमानमिष्टं रूपं १ कल्पितम् । अनेन नीलक-
मुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्य जातं $\frac{\text{का } १ \text{ रू } २९}{\text{या } २}$ ।

अतः कुट्टकविधिना हरतष्टे धनक्षेपे इत्यादिना गुणासी सक्षेपे

पी २ रू १ ।

पी १ रू १४ ।

अत्र शून्येन पीतकमुत्थाप्य जातानि माणिक्यादीनां मौर्यानि
१४ । १ । १ । अथवैकेन पीतकेन १३ । ३ । १ । द्वाभ्यां वा
१२ । ५ । १ । त्रिभिर्वा ११ । ७ । १ । एवमिष्टवशादानन्त्यम् ।

भाषा—किसी व्यापारी के पास पांच माणिक्य, आठ नीलम, सात मोती,
और नब्बे रुपये हैं । दूसरे व्यापारी के पास सात माणिक्य, नौ नीलम, छ मोती,
और बासठ रुपये हैं परन्तु ये दोनों व्यापारी धन में समान ही हैं तो बतलाओ,
प्रत्येक रत्न का क्या मूल्य है ।

उदाहरणम्—

एको ब्रवीति मम देहि शतमिति ॥ २ ॥

अत्र घने या १ का १ । परधनाच्छतमपास्य पूर्वधने शतं प्रक्षिप्य
जातं या १ रू १०० । का १ रू १०० । परधनादाद्यं द्विगुणमिति
परधनेन द्विगुणेन समं कृत्वा लब्धा यावत्तावदुन्मितिः $\frac{\text{का } २ \text{ रू } ३००}{\text{या } १}$

पुनराद्यधनाद्दशस्वपनीतेषु परधने क्षिप्तेषु जातं या १ रू १० ।

का १ रू १० ।

आद्यादपरः षड्गुण इति आद्यं षड्गुणं परसमं कृत्वा लब्धं
यावत्तावदुन्मानं $\frac{\text{का } १ \text{ रू } ७०}{\text{या } ६}$ ।

अनयोः कृतसमच्छेदयोश्छेदगमे समीकरणं तत्रानेन वा एकवर्ण-
त्वात् पूर्वबीजेनागतं कालकवर्णमानम् १७० ।

अनेन यावत्तावदुन्मानद्वयेऽपि कालकमुत्थाप्य रूपाणि प्रक्षिप्य
रवच्छेदेन विभज्य लब्धं यावत्तावदुन्मानम् ४० ।

भाषा—एक मनुष्य दूसरे से कहते हैं कि यदि तुम सौ रुपये मुझे दो तो मैं तुमसे धन में दूना हो जाऊँ । दूसरा पहिले से यह कहता है कि यदि तुम १० रुपये मुझे दो तो मैं तुमसे धन में छ गुना हो जाऊँ तो बतलाओ उन दोनों के धन क्या हैं ।

उदाहरणम् ।

अश्वाः पञ्चगुणाङ्गमङ्गलमिता येषां चतुर्णां धना—

न्युष्ट्राश्च द्विगुनिश्रुतिक्षितिमिता अष्टद्विभूपावकाः ।

तेषामश्वतरा वृषा मुनिमहीनेत्रेन्दुसंख्याः क्रमात्

सर्वे तुल्यधनाश्च ते वद सपद्यश्वादिमौल्यानि मे ॥ ३ ॥

अत्राश्वादीनां मौल्यानि यावत्तावदादीनि प्रकरप्य तद्गुणगुणिता-
यामश्वादिसंख्यायां जातानि चतुर्णां धनानि ।

या ५ का २ नी ८ पी ७ ।

या ३ का ७ नी २ पी १ ।

या ६ का ४ नी १ पी २ ।

या ८ का १ नी ३ पी १ ।

एतानि समानीत्येषां प्रथमद्वितीययोः साम्यकरणां लब्धा यावत्ताव-
दुन्मितिः का ५ नी ६ पी ६
या २

द्वितीयतृतीययोरप्येवं लब्धा यावत्तावदुन्मितिः का ३ नी १ पी १
या ३

एवं तृतीयचतुर्थयोः का ३ नी २ पी १
या २

पुनरासां मध्ये प्रथमद्वितीययोः समीकृतच्छेदगमे साम्यकरणेन
लब्धा कालकोन्मितिः नी २० पी १६
का ९

एवं द्वितीयतृतीययोरपि $\frac{\text{नी } ८ \text{ पी } ५}{\text{का } ३}$ । अनयोः समच्छेदीकृतयोः

साम्यकरणेन लब्धं नीलकोन्मानम् $\frac{\text{पी } ३१}{\text{नी } ४}$ ।

अन्योन्मितौ कुट्टविधेरुणासी इति कुट्टककरणेन लब्धो गुणकः
सक्षेपः लो ४ रू० एतत् पीतकमानम् । लब्धिः लो ३१ रू०
एतन्नीलकमानम् । कालकोन्मानेन नीलकपीतकौ स्वस्वमानेनोत्थाप्य
स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं कालकमानं लो ७६ रू० । अथ यावत्ता-
वन्माने कालकादीन् स्वस्वमानेनोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं
यावत्तावन्मानं लो ८५ रू० । लोहिते रूपेणेष्टेनोत्थापिते जातानि
यावत्तावदादीनां परिमाणानि ८५ । ७६ । ३१ । ४ । द्विकेनेष्टेन
१७० । १५२ । ६२ । ८ । त्रिकेण २५५ । २२८ । ९३ । १२ ।
एवमिष्टवशादानन्त्यम् ।

भाषा—चार व्यापारियों में पहिले व्यापारी के पास पांच घोड़ा दो ऊँट
आठ खचर और सात बैल हैं । दूसरे के पास तीन घोड़े सात ऊँट, दो खचर
और एक बैल हैं, तीसरे के पास छ घोड़े चार ऊँट एक खचर और दो बैल हैं ।
और चौथे के पास आठ घोड़े एक ऊँट तीन खचर और एक बैल है । ये चारों
व्यापारी धन में तुल्य हैं तो बताओ घोड़ा आदि का क्या मूल्य है ।

उदाहरणम्

त्रिभिः पारावताः पञ्च पञ्चभिः सप्तसारसाः ।

सप्तभिर्नव हंसाश्च नवभिर्बर्हिणां त्रयम् ॥ ४ ॥

द्रुमैरवाप्यते द्रुमशतेन शतमानय ।

एषां पारावतादीनां विनोदार्थं महीपतेः ॥ ५ ॥

अत्र पारावतादीनां मौल्यानि मूल्यगुणितयावत्तावदादीनि प्रकल्प्य
ततोऽनुपातेन समक्रिया कार्या । तद्यथा या ३ का ५ नी ७ पी ९
एतानि मौल्यानि शतसमानि कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानम् ।

का ५ नी ७ पी ९ रू १००

या ३

पुनः या ५ का ७ नी ९ पी ३ एतान् जीवान् शतसमान् कृत्व,
लब्धं यावत्तावन्मानं का ७ नी ९ पी ३ रू १०० ।

या ५

अनयोः कृतसमच्छेदयोश्छेदगमे लब्धं कालकमानम्

नी २ पी ९ रू ५० ।

का १

अत्र भाज्ये वर्णद्वयं वर्तते इति पीतकमानमिष्टं रूपचतुष्टयं कल्पितं
अनेन पीतकमुत्थाप्य* रूपेषु प्रक्षिप्य जातं नी २ रू १४ अतः कुट्ट-
का १
कविधिना लब्धिगुणौ सक्षेपौ लो २ रू १४ ।

लो १ रू ० ।

यावत्तावदुन्माने स्वस्वमानेन कालकादीनुत्थाप्य स्वस्वच्छेदेन
विभज्य लब्धं यावत्तावन्मानं लो १ रू २ । लोहितकमिष्टेन रूपत्रये-
णोत्थाप्य जातानि यावत्तावदादीनां मानानि १ । ८ । ३ । ४ ।
एभिर्मौल्यानि जीवाश्चोत्थापिताः ।

मौल्यानि ३ । ४० । २१ । ३६ ।

पक्षिणः ५ । ५६ । २७ । १२ ।

अथवा चतुष्केणेष्टेन मानानि २ । ६ । ४ । ४ । उत्थापिते जातं
मौल्यानि ६ । ३० । २८ । ३६ । पक्षिणः १० । ४२ । ३६ । १२ ।

अथवा पञ्चकेन मानानि ३ । ४ । ५ । ४ । एभिरुत्थापने कृते जातं

मौ० ९, २०, ३५, ३६ ।

प० १५, २८, ४५, १२ ।

} एवमिष्टवशादनेकधा ।

* संशो । अत्र पीतकमाने १३, १४, ५ एभिरुत्थापनं दीयते तदात्र क्षाता-
न्तर्गतानि षोडशधा पारावतादीनामभिज्ञानि मानानि भवन्ति ।

भाषा—तीन द्रम्म में पाँच कबूतर आते हैं और पाँच द्रम्म के सात सारस, सात द्रम्म के नौ हंस और नौ द्रम्म के तीन मोर आते हैं, इस व्यवस्था पर किसीके प्रति प्रश्न है कि तुम राजा के विनोद के लिये सौ द्रम्म में सौ ही कबूतर आदि पक्षी ला दो । तो बताओ उन पक्षियों की और मूल्य की क्या संख्याएँ हैं ।

उदाहरणम्—

*षड्भक्तः पञ्चाग्रः पञ्चविभक्तो भवेच्चतुष्काग्रः ।

चतुरुद्धृतस्त्रिकाग्रो व्यग्रस्त्रिसमुद्धृतः कः स्यात् ॥ ६ ॥

अत्र राशिः या १ । अयं षड्भक्तः पञ्चाग्र इति षड्भिर्भागे ह्रियमाणे कालको लभ्यत इति कालगुणितो हरः स्वाग्रेण पञ्चकेन युतो यावत्तावता सम इति साम्यकरणेन यावत्तावदुन्मितिः $\frac{\text{का ६ रू ५}}{\text{या १}}$

एवं पञ्चादिहरेषु नीलकादयो लभ्यन्त इति जाता यावत्तावदुन्मितयः

$\frac{\text{नी ५ रू ४}}{\text{या १}}$ । $\frac{\text{पी ४ रू ३}}{\text{या १}}$ । $\frac{\text{लो ३ रू २}}{\text{या १}}$ ।

आसां प्रथमद्वितीययोः समीकरणेन लब्धा कालकोन्मितिः $\frac{\text{नी ५ रू १}}{\text{का ६}}$ ।

एवं द्वितीयतृतीययोः समीकरणेन लब्धा नीलकोन्मितिः $\frac{\text{पी ४ रू १}}{\text{नी ५}}$ ।

एवं तृतीयचतुर्थयोः समीकरणेन लब्धा पीतकोन्मितिः $\frac{\text{लो ३ रू १}}{\text{पी ४}}$ ।

अतः कुट्टकालब्धे लोहितकपीतकयोर्मनि सक्षेपे $\frac{\text{ह ४ रू ३ लो}}{\text{ह ३ रू २ पी}}$ ।

* संशो । अत्रोदाहरणोक्त्या प्रत्येकहरात्तच्छेषमानमेकोनं तेन हराणामपवर्त्य एकोने कृते राशिर्भवति । अत्रहराः ६, ५, ४, ३ एषां लघुतमापवर्त्यः ६० एकोनः ५९ अयमेव राशिः । तथा लघुतमापवर्त्य इष्टगुणितलघुतमापवर्त्य वा क्षेत्रकं प्रकल्प्य ब्रह्मा राजयो भवन्ति यथा $६० \div ५९ = ११९.१२० \div ५९ = १७९$ इत्यादि ।

नीलकोन्माने स्वमानेनोत्थाप्य जातं $\frac{ह १२ रू ७}{नी ५}$ ।

अत्र स्वच्छेदेन हरणे नीलकमानं भिन्नं लभ्यते इति कृत्वाऽभिन्नं कर्तुं भूयः कार्यः कुट्टक इति पुनः कुट्टकात् सक्षेपो गुणः श्वे ५ रू ४ । एतद्धरितकमानम् । अनेन लोहितकपीतकयोर्माने हरितकमुत्थाप्य जाते लोहितकपीतकयोर्माने श्वे २० रू १९ लो । श्वे १५ रू १४ पी ।

इदानीं नीलकोन्माने पीतकं स्वमानेनोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं नीलकमानमभिन्नं श्वे १२ रू ११ । अनेन कालकमाने नीलकं स्वमानेनोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं कालकमानं श्वे १० रू ९ ।

एभिर्मानैर्यावत्तावदुन्मितिषु कालकादीनुत्थाप्य लब्धं यावत्तावन्मानं श्वे ६० रू ५९ ।

अथवा षड्भक्तः पञ्चाग्र इति प्राग्बज्जातो राशिः का ६ रू ५ ।

अयमेव पञ्चापहृतरचतुरग्र इति लब्धं नीलकं प्रकल्प्य तद्गुणित-हरेण स्वाग्रयुतेन नी ५ रू ४ समीकरणेन जातं $\frac{नी ५ रू १}{का ६}$ ।

एतत्कालकमानं भिन्नं लभ्यते इति कुट्टकेनाभिन्नं कालकोन्मानं पी ५ रू ४ । अनेन पूर्वराशिं का ६ रू ५ उत्थाप्य जातं पी ३० रू २९ । पुनरयं चतुर्भक्तस्यग्र इति प्राग्बत् साम्ये कृते जातं $\frac{लो ४ रू २६}{पी ३०}$ ।

अत्रापि कुट्टकालब्धं पीतकमानं ह २ रू १ । अनेन पूर्वराशी पी ३० रू २९ उत्थापिते जातो राशिः ह ६० रू ५९ । पुनरयं त्रिभक्तो द्व्याग्र इति स्वत एव जातः शून्यैकद्व्याग्रुत्थापनाद्बहुधा ।

भाषा—बह कौन सा राशि है जिसमें ६ का भाग देते हैं तो पाँच शेष

वचता है । और पाँच का भाग देते हैं तो चार शेष रहता है । चार का भाग देने पर तीन शेष रहता है और तीन का भाग देने पर दो शेष रहता है ।

उदाहरणम्

स्युः पञ्चसप्तनवभिः क्षुण्णेषु हतेषु केषु विंशत्या ।

रूपोचाराणि शेषाण्यवाप्तयश्चापि शेषसमाः ॥ ७ ॥

अत्र शेषाणि या १ । या १ रू १ । या १ रू २ । एता एव लब्धयः । प्रथमो राशिः का १ । अस्मात् पञ्चगुणिताद्वाशेर्लब्धि-
गुणं हरमपास्य जातं शेषं का ५ या २० एतच्चावत्तावत्समं कृत्वा
लब्धा यावत्तावदुन्मितिः का ५

या २१

अथ द्वितीयो राशिः नी १ । अस्मात् सप्तगुणाद्वाधिकयावत्ताव-
दुणहरमपास्य जातं नी ७ या २० रू २० । एतदस्य या १ रू १ समं
कृत्वा लब्धा यावत्तावदुन्मितिः नी ७ रू २१ ।
या २१

एवं तृतीयः पी १ । अस्मान्नवगुणालब्धि या १ रू २
गुणहरमपास्य शेषं पी ९ या २० रू ४० । इदमस्य या १ रू २
समं कृत्वा लब्धा यावत्तावदुन्मितिः पी ९ रू ४२ ।
या २१

आसां प्रथमद्वितीययोर्द्वितीयतृतीययोः साम्यकरणेन लब्धे कालक-
नीलकयोरुन्मिती नी ७ रू २१ । पी ९ रू २१ ।
का ५ नी ७

अत्र नीलकोन्मितौ कुट्टकेन नीलकपीतकयोर्मने कृत्वा कालको-
न्मितौ नीलके स्वमानेनोत्थापिते कालकमानं भिन्नं लभ्यते इति कुट्टके-
नाभिन्ने कालकलोहितकयोर्मने । ह ६३ रू ४२ का

ह ५ रू ४ लो

अत्र नीलकपीतकयोर्लोहितके स्वमानेनोत्थापिते जाते तन्माने ।

ह ४५ रू ३३ नी

ह ३५ रू २८ पी

यथा क्रमेण न्यासः । ह ६३ रू ४२ का

ह ४५ रू ३३ नी

ह ३५ रू २८ पी

अथ यावत्तावदुन्मितिषु कालकादीन् स्वस्वमानेनोत्थाप्य स्वच्छेदेन विभज्य लब्धं यावत्तावन्मानं ह १५ रू १० । अत्र शेषसमे फले न हि शेषं भागद्वाराधिकं भवितुमर्हति । अतो हरितकं शून्येनैवोत्थाप्य जाता राशयः ४२ । ३३ । २८ । अग्राणि च १० । ११ । १२ । एता एव लब्धयः ।

भाषा—वे तीन कौन राशि हैं जिनको क्रम से पांच सात, और नौ से गुण देते हैं और बीस का भाग देते हैं तो रूपोत्तर शेष और शेष समान लब्धि आती हैं ।

उदाहरणम्—

एकाग्रो द्विहतः कः स्याद् द्विकाग्रस्त्रिसमुद्धृतः ।

त्रिकाग्रः पञ्चभिर्भक्तस्तद्वदेव हि लब्धयः ॥ ८ ॥

अत्र राशिः या १ । अयं द्विहत एकाग्र इति तत्फलं च द्विहत-मेकाग्रमिति फलप्रमाणं का २ रू १ । एतद्गुणं हरं स्वाग्रेण युतं तस्य या १ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं का ४ रू ३ । अस्यैकालपो घटते पुनरपि त्रिहतो द्व्यग्र इति तत्फलं च नी ३ रू २ । एतद्गुणहरमग्रयुतं च नी ९ रू ८ इदमस्य का ४ रू ३ समं कृत्वा कालकमानं भिन्नं कुट्टकेनाभिन्नं जातं पी ९ रू ८ अनेन कालकमुत्थाप्य जातो राशिः पी ३६ रू ३५ । अस्यालापद्वयं घटते । पुनरयं पञ्चभक्तस्त्र्यग्र इति तत्फलं च लो ५ रू ३ । इदं हरगुणमग्रयुतमस्य पी ३६ रू ३५ समं कृत्वा पीतकमानं भिन्नं कुट्टकेना-

भिन्नं कृत्वा जातं ह २५ रू ३ । अनेन पीतकमुत्थाप्य जातो राशिः
ह ९०० रू १४३ हरितकस्य शून्यादिनोत्थापनेनानेकविधाः । *

भाषा—वह कौन सा राशि है जिसमें दो का भाग देने पर ए+ शेष बचता है । और तीन का भाग देने पर दो शेष रहता है पांच का भाग देने पर तीन शेष बचता है । इसी प्रकार लब्धियों में भी जानना चाहिये । अर्थात् लब्धियों में दो का भाग देने से एक और तीन का भाग देने से दो और पांच का भाग देने पर तीन ही शेष बचते हैं ।

उदाहरणम्

कौ राशी वद पञ्चषट्कविहतावेकद्विकाग्रौ ययो—

द्विग्रं त्र्युद्धृतमन्तरं नवहता पञ्चाग्रका स्याद्युतिः ।

यातः सप्तहृतः षडग्र इति तौ षट्काष्टकाभ्यां विना

विद्वन् कुट्टुक्वेदिकुञ्जरघटासंघट्टसिंहोऽसि चेत् ॥९॥

* । संशो कल्प्यते राशिः = या तदाऽऽच्छापानुसारेण $\frac{या - १}{२} =$ कविः तथा छब्धावपि तादृशो

$$\text{स्थितिस्तेन } \frac{\frac{या - १}{२} - १}{२} = \frac{या - ३}{४} \text{ निरग्रा कविः ।}$$

$$\text{एवमेव } \frac{\frac{या - २}{३} - २}{३} = \frac{या - ८}{९}$$

$$\text{पुनः } \frac{\frac{या - ३}{५} - ३}{५} = \frac{या - १८}{२५} ।$$

अत्र तिसृणां लब्धीनां स्वरूपत इदं स्फुटं यदत्र राशिः या विषमसंख्यकः । तथाष्टदशभि-
विहृतो राशिः पञ्चविंशत्यापवर्तितो भवति तेन तादृशो राशिः २५ + १८ = ४३ वा
७५ + १८ = ९३ कल्पयितुं शक्यते अत्र ९३ त्रिभिर्हानश्चतुर्भिर्निःशेषो न भवति किन्तु
४३ त्रिभिर्हानश्चतुर्भिर्मक्तो निःशेषो भवति । किन्तु एषः ४३ अष्टभिर्हानो नवभिर्मक्तः सन्
निःशेषो न भवति तेनात्र यतितव्यम् । अत्र तादृशोऽको योज्यः यश्च नतुः पञ्चविंशत्योरपवर्त्यः
किन्तु नवभिर्पवर्त्तने कृते रूपादिशेषं भवति तादृशोऽङ्कः १०० तेन १०० + ४३ = १४३
एव एवाभीष्टराशिः । तथात्र यदि हराणां २५, ४, ९ अपवर्त्यः २५ × ४ × ९ = ९०० लिख्यते
अथवेष्टुणोऽयमपवर्त्यश्चिह्न्यते तदानेकविधा राशयो भवन्ति यथा १०४३, १९४३ इत्यादि ।

अत्र कल्पितौ राशी पञ्चषट्कविहतावेकद्विकाग्रौ या ५ रू १, या ६ रू २ । अनयोरन्तरं त्रिहृतं व्यग्रमिति लब्धं कालकस्तद्गुणहर-मग्रयुतमन्तरेणानेन या १ रू १ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं का ३ रू १ । अनेनोत्थापितौ जातौ राशी का १५ रू ६ । का १८ रू ८ । पुनरनयोर्युतिर्नवहता पञ्चाग्रेति लब्धं नीलकस्तद्गुणं हरमग्रयुतं योगस्यास्य का ३३ रू १४ समं कृत्वा कालकमानं भिन्नं $\frac{१९९}{३३}$ ।

कुट्टकेनाभिन्नं जातं पी ३ रू ० । अनेनोत्थापिनौ जातौ राशी पी ४५ रू ६ । पी ५४ रू ८ । पुनरनयोर्धाते वर्गत्वान्महती क्रिया भवतीति पीतकमेकेनोत्थाप्य प्रथमो राशिर्व्यक्त एव कृतः ५१ । पुनरनयोः सप्ततष्टयोर्धातः सप्ततष्टः पी ३ रू २ समं कृत्वा प्राग्वत् कुट्टकेनासं पीतकमानं ह ७ रू ६ । अनेनोत्थापितो जातो राशिः ह ३७८ रू ३३२ । पूर्वराशेः क्षेपः पी ४५ आसीत् स हरितकेनानेन ह ७ गुणितस्तस्य क्षेपः स्यादिति जातः प्रथमः क्षेपः ह ३१५ रू ५१ । अथवा प्रथममेकं व्यक्तं प्रकल्प्य द्वितीयः साध्यः वा जातौ राशी रू ५१, ह १२६ रू ८० ।

भाषा—वे कौन से दो राशि है, जिनमें पांच तथा छ का भाग देने से एक तथा दो शेष बचता है । और उनके अन्तर में तीन का भाग देने से दो शेष रहता है । तथा जिनके योग में नौ से भाग देने से पांच शेष बचता है और उन दोनों राशियों के घात में सात का भाग देने से छ शेष रहता है । वे दोनों राशि ६ और ८ से भिन्न होनी चाहिये ।

उदाहरणम्

नवभिः सप्तभिः क्षुण्णः को राशिस्त्रिंशता हृतः ।

यदग्रैक्यं फलैक्याढ्यं भवेत् षड्विंशतेर्मितम् ॥ १० ॥

अत्रैकहरत्वाच्छेषयोः फलयोर्युतिदर्शनाच्च गुणयोगो गुणकः कल्पितः रू १६ । राशिः या १ । लब्धैक्यप्रमाणं कालकस्तद्गुणितं

हरं गुणगुणिताद्राशेरपास्य जातं शेषं या १६ का ३० । एतत्फलेन कालकेन युतं या १६ का २९ षड्विंशतिसमं कृत्वा कुट्टकेन प्राग्वज्जातं यावत्तावन्मानं नी २९ रू २७ । अत्र लब्ध्यग्रयोगस्यैकतानिर्देशात् क्षेपो न देयः ।

भाषा—वह कौन राशि है, जिसको अलग नौ तथा सात से गुण देवे दोनों जगह ३० का भाग देवे तो शेष तथा लब्धि का योग छब्बीस के बराबर होता है ।

उदाहरणम्

कस्त्रिसप्तनवक्षुण्णो राशिस्त्रिंशद्विभाजितः ।

यदग्रैक्यमपि त्रिंशद्धृतमेकादशाग्रकम् ॥ ११ ॥

अत्रापि गुणयोगो गुणः प्राग्वत् रू १९ । राशिः या १ लब्धं कालकः । एतद्गुणं हरं गुणगुणिताद्राशेरपास्य शेषं या १९ का ३० । एतदग्रैक्यं त्रिंशत्तष्टमेव ततः प्रथमालापे द्वितीयालापस्यान्तर्भूतत्वादिदमेवैकादशसमं कृत्वा प्राग्वज्जातो राशिः नी ३० रू २९

भाषा—कौनसा ऐसा राशि है जिसको क्रम से तीन, सात, नौ, से अलग २ गुणते हैं प्रत्येक गुणनफल में ३० का भाग देने पर जो तीनों अवस्था में शेष बचे उन तीनों को जोड़ कर फिर योगफल में ३० का भाग देने से ११ शेष बच जाय ।

उदाहरणम्

कस्त्रयोविंशतिक्षुण्णः षष्ट्याशीत्या हतः पृथक् ।

यदग्रैक्यं शतं दृष्टं कुट्टकज्ञ वदाशु तम् ॥ १२ ॥

अत्र सूत्रं वृत्तम्

* यत्रैकाधिकवर्णस्य भाज्यस्थस्येप्सिता मितिः ।

भागलब्धस्य नो कल्प्या क्रिया व्यभिचरेत्तथा ॥

* संशो । कल्प्यते राशिः या, छब्बी क्रमेण का नी

तदा २३ या - ६० का = प्रथमरोपमानम्

एवं २३ या - ८० नी = द्वि-रो-तेन ४६ या-६० का-८० नी = १००

∴ य $\frac{1 = ५० + ३० का + ४० नी}{२३}$ क्वात्र अन्येऽपि ज्ञाने

अतोऽन्यथा यतितव्यम् ।

अत्र स्वस्वभागहारान्न्यूने शेषे यथा भवतः यथा चाखिलं न
स्यात्तथा शेषयोगं विभज्य क्रिया कार्या तथा कल्पिते शेषे ४०।६० ।
राशिः या १ । एष त्रयोविंशतिगुणः षष्टिहृतः फलं कालकस्तद्गुणं
हरं शेषयुतमस्य या २३ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं
का ६० रू ४० नी ८० रू ६०
या २३ । एवमन्यत् या २३ ।

अनयोः समीकरणे कुट्टकेन लब्धे कालकनीलकमाने

पी ४ । रू ३ का

पी ३ । रू २ नी

आभ्यामुत्थापने यावत्तावन्मानं भिन्नं स्यादिति कुट्टकेनाभिन्नं जातं
लो २४० रू २० । अथवा शेषे ३० । ७० आभ्यां राशिः
लो २४० रू ९० ।

उदाहरणम्

कः पञ्चगुणितो राशिस्त्रयोदशविभाजितः ।

यल्लब्धं राशिना युक्तं त्रिंशज्जाता वदाशु तम् ॥१३॥

अत्र राशिः या १ । एष पञ्चगुणस्तयोदशहृतः फलं कालकः १ ।

यदि सन्निवर्णास्तन्मानमिष्टं परिकल्प्य साध्ये' इत्यादिना कालकनीलकयोरेकतरस्येष्टं मानं
कल्प्यम् परं तद्विह न युक्तम् । यतोऽत्र कालकनीलकावेकस्मादेव भाज्यात्यप्सरतोर्लोभ्ये
तत्र षष्टिलब्धस्य कालकस्य व्यक्तकल्पने तदेव चरणानमशोतिलब्धं वलात्स्यादिति नोक्तस्यापि
व्यक्तमेव मानं स्यात् । एवमशोतिलब्धस्य नीलकस्य व्यक्तत्वकल्पने त्रैराशिकेन तदेव सत्र्यंशं
वलात्षष्टिलब्धं स्यादिति कालकमानमपि व्यक्तमेव स्यात् । तथा सति शेषयोगस्य नास्ति
शतानुरोधिनी क्रियेति नोदाहरणासिद्धिः । अथ यध्येकतरवर्णस्येष्टं मानं प्रकल्प्य ततस्त्रैराशि-
केन द्वितीयवर्णमानं व्यक्तमकृत्वा कुट्टकेन तन्मानं साध्यते तर्हि तदुक्तविधानादन्यथोत्पन्नमपि
वाधितमेव स्यात् । न हि चरणानात्पादलब्धादन्यदशोतिलब्धं संभवति । सत्र्यंशादशोति-
लब्धादन्यत्षष्टिलब्धं वा संभवतीति कृष्णादैवज्ञाः प्रोचुः ।

एतत्फलं राशियुतं या १ का १ । त्रिशत्समं क्रियत इत्युक्तं यत इयं क्रिया निराधारा नात्रगुणो न च हर उपलभ्यते । तथाचोक्तं ।

निराधारा क्रिया यत्र नियताधारिकापि वा ।

न तत्र योजयेत्तां तु कथं सा वा प्रवर्त्तते ।

अतोऽत्रान्यथा यतितव्यम् । अत्र किल हरतुल्ये राशौ कल्पिते १३ । राशिफलयोगेनानेन १८ । यदि इदं ५ । फलं तदा त्रिशता किमिति लब्धं फलं ३^५ एतत् त्रिशतोऽपांस्वशेषं जातो राशिः ३^५ ।

अथाद्योदाहरणम्

* षडष्टशतकाः क्रीत्वा समार्धेण फलानि ये ।

विक्रीय च पुनः शेषमेकैकं पञ्चभिः पणैः ।

जाताः समपणास्तेषां कः क्रयो विक्रयश्च कः ॥१४॥

० षडष्टशतकाः क्रीत्वेति ।

कल्प्यते क्रयमानं या, विक्रयमानं का, शेषाणि च अ, व, ल तदाऽऽणपानुसारेण—

$$\begin{aligned} \frac{६ या - अ}{का} + ५ अ &= \frac{८ या - व}{का} + ५ व = \frac{१०० या - ल}{का} + ५ ल \\ (१) & \qquad (२) & \qquad (३) \end{aligned}$$

००. ६या - अ + ५अ का = ८या - व + ५व का = १०० या - ल + ५ ल का
अत्र प्रथमद्वितीयसमीकरणयोरन्तरे कृते ।

$$\begin{aligned} २ या &= व - अ + ५ अ का - ५ व का = व - अ + ५ का (अ - व) \\ &= (अ - व) (५ का - १) \dots\dots (१) \text{ एवमेव द्वितीयतृतीययोरन्तरे कृते ।} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ६२ या &= ल - व + ५ व का - ५ ल का = ल - व + ५ का (व - ल) \\ &= (व - ल) (५ का - १) \dots\dots (२) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{एवमेव } ६४ या &= ल - अ + ५ अ का - ५ ल का = ल - अ + ५ का (अ - ल) \\ &= (अ - ल) (५ का - १) \dots\dots (३) \end{aligned}$$

$$००. \frac{व - ल}{अ - व} = ४६, \quad \frac{अ - ल}{अ - व} = ४७ ।$$

यतः (१), (२), (३) समीकरणेषु एकस्मिन् भागे गुणकः ५ का - १ अन्यस्मिन् भागे वा अत इदं कल्पयितुं शक्यते यत् या = ५ का - १ तदा अ - व = २, व - ल =

$$६२, ल - ल = ६४,$$

अत्र क्रयः या १ । विक्रय इष्टं दशाधिकशतं ११० । क्रयः षड्गुणितो विक्रयेण हतो लब्धिः कालकः १ । लब्धिगुणं हरं षड्गुणिताद्वाशेरपास्य जातं या ६ का ११० । इदं पञ्चगुणं लब्धियुतं जाताः प्रथमस्य पणाः या ३० का ५४९ । एवं द्वितीयतृतीययोरपि पणाः साध्यास्तत्र लब्धिरनुपातेन यदि षण्णां कालकस्तदाऽष्टानां शतस्य च किमिति लब्धिरष्टानां का ३ शतस्य च का ३० । लब्धिगुणं हरं भाज्यादपास्य शेषं पञ्चगुणं लब्धियुतं जाता द्वितीयस्य पणाः या १३० का २१९५ । एवं तृतीयस्य या १५० का २७४५० । एते सर्वे समा इति समच्छेदीकृत्य छेदगमे प्रथमद्वितीयपक्षयोर्द्वितीयतृतीययोः समीकरणेन च लब्धा यावत्तावदुन्मितिस्तुर्यैव का ५४९ ।
या ३० ।

अत्र कुट्टकाल्लब्धं यावत्तावन्मानं नी ५४९ ह ० । नीलकमेकेनो-

तया पूर्वसमीकरणेषु यामाने उत्थापने कृते

$$\text{ष का} = ३० \text{ का} - ६ - \text{अ} + ५ \text{ अ का} = ४० \text{ का} - ८ - \text{व} + ५ \text{ व का}$$

$$= ५०० \text{ का} - १०० - \text{छ} + ५ \text{ छ का}$$

$$\text{च का} = ५ \text{ का} (\text{अ} + ६) - (\text{अ} + ६) = ५ \text{ का} (\text{व} + ८) - (\text{व} + ८)$$

$$= ५ \text{ का} (\text{छ} + १००) - (\text{छ} + १००)$$

$$\text{च का} = (\text{अ} + ६) (५ \text{ का} - १) = (\text{व} + ८) (५ \text{ का} - १)$$

$$= (\text{छ} + १००) (५ \text{ का} - १)$$

$$\therefore \text{अ} + ६ = \text{व} + ८ = \text{छ} + १०० \quad \therefore \text{व} - \text{छ} = १०० - ८ = ९२,$$

$$\text{अ} - \text{छ} = १०० - ६ = ९४.$$

अतोऽत्र अमाने ९४ तोऽल्पं न भवितुमर्हति तथा अमाने ९६ कल्पिते मानानि शतानि भवन्ति ।

$$\therefore \text{का} = \text{अ} + ६ \text{ इति कल्पयितुं शक्यते ।}$$

अतोऽत्र यदि अ = १०४ तदा विक्रयः ११०, क्रयः ५४९.

वा यदि अ = १०० तदा विक्रयः १०६ क्रयः ५२९.

वा यदि अ = ९२ तदा विक्रयः ९२६ क्रयः ९२९.

एवमेकैकधा मानानि भवन्ति ।

स्थाप्य जातः क्रयः ५४९ । समघनमिदमनियताधाराक्रियायामाद्यैरुदा-
हृत्य यथाकथञ्चित् समीकरणं कृत्वाऽऽनीतम् । इयं तथा कल्पना कृता
यथाऽत्रानियताधारायामपि नियताधाराक्रियावत् फलमागच्छति । एवंविध-
कल्पनाच्च क्रियासङ्कोचाद्यत्र व्यभिचरति तत्र बुद्धिमद्भिर्बुद्ध्या सन्धेयम् ।*

आलापो मतिरमलाऽव्यक्तानां कल्पना समीकरणम् ।

त्रैराशिकमिति बीजे सर्वत्र भवेत् क्रियाहेतुः ॥

इति भास्करीये बीजगणितेऽनेकवर्णसमीकरणं समाप्तम् ।

भाषा—तीन व्यापारियों ने सस्ते भाव से ६, ८, और १०० पैसे का फल
खरीदा और फिर किसी एक भाव से बेच भी लिया शेषों में से एक एक को पांच
पांच पैसे में बेचा तब सबके पैसे बराबर हो गये तो बतलाओ कि खरीदने और
बेचने का भाव क्या था ?

—

०

० संशो । अत्र प्रकाराभ्यां यथावत्तावन्मानमागतं तयोः समीकरणे कृते यावत्काष्ठकयो-
र्मानं शून्यसमं भवति अतोऽग्रे न गणितप्रशक्तिः । एवं “भाज्यो हारः क्षेपकश्चापवर्त्यः केनाप्यादौ
संभवे कुट्टकार्यम्” इत्यनेन भाज्यभाजकयोस्त्रिभिरपवर्तनं समुचितं तदपि न कियते तथा कृते
राशिर्नायाति इत्यादयो दोषा अत्र कल्पनायां वर्तन्ते इति ग्रन्थकारः स्वयं जानाति अतएव
स्वयं निगदति “एवंविधकल्पनाच्च क्रियासङ्कोचाद्यत्र व्यभिचरति तत्र बुद्धिमद्भिर्बुद्ध्या
सन्धेयम्” ।

अथानेकवर्णमध्यमाहरणभेदाः

तत्र श्लोकोत्तरार्धादिरभ्य सूत्रं सार्धवृत्तत्रयम् ।

वर्गाद्यं चेत् तुन्यशुद्धौ कृतायां पक्षस्यैकस्योक्तवद्वर्गमूलम् ।

वर्गप्रकृत्याऽपरपक्षमूलं तयोः समोकारविधिः पुनश्च ॥१॥

वर्गप्रकृत्या विषयो न चेत् स्यात् तदाऽन्यवर्णस्य कृतेः समं तम् ।

कृत्वा परं पक्षमथान्यमानं कृतिप्रकृत्याऽऽद्यमितिस्तथा च ॥२॥

वर्गप्रकृत्या विषयो यथा स्यात् तथा सुधीर्भिर्बहुधा विचिन्त्यम् ।

बीजं मतिर्विविधवर्णसहायनी हि

मन्दावबोधविधये विबुधैर्निजाद्यैः ।

विस्तारिता गणकतामरसांशुमद्भिः—

र्या सैव बीजगणिताह्वयतामुपेता ॥३॥

यत्र पक्षयोः शोधने कृते सति अव्यक्तवर्गादिकमवशेषं भवति तत्र पूर्वपक्षे पक्षौ तदेष्टेन निहत्येत्यादिना एकस्य पक्षस्य मूलं ग्राह्यम् ।

अन्यपक्षे यद्यव्यक्तवर्गः सरूपो वर्तते तदा तस्य पक्षस्य वर्गप्रकृत्या मूले साध्ये । तत्र वर्णवर्गे योऽङ्कः सा प्रकृतिः । रूपाणि क्षेपः प्रकरण्यः ।

एवं यत् कनिष्ठपदं तत् प्रकृतिवर्णमानं यज्ज्येष्ठं तस्य वर्गस्य मूलम् ।

अतस्तत् पूर्वपक्षमूलेन समं कृत्वा पूर्ववर्णमानं साध्यम् ।

अथ यद्यन्यपक्षे व्यक्तवर्गः साव्यक्तोऽव्यक्तमेव सरूपमरूपं वा वर्तते तदा वर्गप्रकृतेर्न विषयः कथं तत्र मूलमित्यत आह । वर्गप्रकृत्या इति । तदाऽन्यवर्णवर्गसमं कृत्वा प्राग्बदेकस्य पक्षस्य मूलं ग्राह्यं तदन्य-पक्षस्य वर्गप्रकृत्या मूले साध्ये तत्रापि कनिष्ठं प्रकृतिवर्णमानं ज्येष्ठं तत्प-क्षस्य पदमिति पदानां यथोचितं समीकरणं कृत्वा वर्णमानानि साध्यानि ।

अथ यदि द्वितीयपक्षे तथाभूतमपि न विषयस्तदा यथा यथा वर्ग-प्रकृत्या विषयो भवति तथा तथा बुद्धिमद्बुद्ध्या विधायव्यक्तमानानि ज्ञातव्यानि । यदि बुद्ध्यैव ज्ञातव्यानि तर्हि बीजेन किमित्याशङ्क्याह ।

बीजं मतिरिति । हि यस्मात् कारणात् बुद्धिरेव पारमार्थिकं बीजं वर्णास्तु
तत्सहायाः गणकक्रमलतिग्मरश्मिभिराद्यैराचार्यैर्मन्दावबोधार्थनात्मीया या
मतिर्विविधवर्णान् सहायान् कृत्वा विस्तारं नीता सैवेह संप्रति बीज-
गणितसंज्ञां गता । इदं किल सिद्धान्ते मूलसूत्रं संक्षिप्तमुक्तं बालावबोधार्थं
किञ्चिद्विस्तीर्योच्यते ।

सूत्रं वृत्तद्वयम् ।

❀ एकस्य पक्षस्य पदे गृहीते द्वितीयपक्षे यदि रूपयुक्तः ।
अव्यक्तवर्गोऽत्र कृतिप्रकृत्या साध्ये तथा ज्येष्ठकनिष्ठमूले ॥४॥

ज्येष्ठं तयोः प्रथमपक्षपदेन तुल्यं

कृत्वा क्तवत् प्रथमवर्णमितिस्तु साध्या ।

इत्स्वं भवेत् प्रकृतिवर्णमितिः सुधीभि-

रेवं कृतिप्रकृतिरत्र नियोजनीया ॥५॥

अस्यार्थो व्याख्यात एव ।

उदाहरणम्-

को राशिद्विगुणो राशिवर्गैः षड्भिः समन्वितः ।

मूलदो जायते बीजगणितज्ञ वदाशु तम् ॥१॥

अत्र यावत्तावद्राशिद्विगुणो वर्गैः षड्भिः समन्वितः याव ६ या २ ।

एष वर्ग इति इति कालकवर्गेण समीकरणार्थं

न्यासः । याव ६ । या २ । काव ० ।

याव ० । या ० । काव १ ।

अत्र समशोधने जातौ पक्षौ याव ६ । या २ ।

काव १ । अथैतौ षड्भिः संगुण्य रूपं प्रक्षिप्य प्राग्वत् प्रथमपक्ष-

मूलं या ६ रू १ ।

* संशो । अत्राऽऽलापानुसारतः $या^2 = इ.का^2 + क्षे$

∴ $या = \sqrt{इ.का^2 + क्षे}$ अत्र द्वितीयपक्षस्य वर्गप्रकृत्या मूले गृहीते
कनिष्ठं कालकमानं ज्येष्ठं च प्रथमपक्षमूलेनानेन या सममित्युपपन्नं सर्वम् ।

अथ द्वितीयपक्षस्यास्य काव ६ रू १ । वर्गप्रकृत्या मूले क २ ज्ये ५ । वा क २० ज्ये ४९ । ज्येष्ठं प्रथमपक्षपदेनानेन या ६ रू १ । समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं $\frac{२}{३}$ वा ८ । ह्रस्वं प्रकृतिवर्णस्य काल-
कस्य मानं २ वा २० । एवं कनिष्ठज्येष्ठवशाद् बहुधा ।

भाषा—कौन ऐसा राशि है जिसको दो से गुण दें, छै से गुने हुए राशिबर्ग जोड़ दें तो मूल मिल जाता है, हे गणितज्ञ ! उस राशि को शीघ्र बतलाओ ।

आद्योदाहरणम्—

राशियोगकृतिमिश्रा राश्योर्योगधनेन चेत् ।

द्विघ्नस्य घनयोगस्य सा तुल्यता गणकोच्यताम् ॥२॥

अत्र क्रिया यथा न विस्तारमेति तथा बुद्धिमता राशी कल्प्यौ तथा कल्पितौ या १ का १ । या १ का १ अनयोर्योगः या २ । अस्य कृतिरस्यैव घनेन मिश्रा याव ८ याव ४ । अथ राश्योः पृथक् घनौ । प्रथमस्य याघ १ यावकाभा ३ कावयाभा ३ काघ १ । द्वितीयस्य याघ १ यावकाभा ३ कावयाभा ३ काघ १ । अनयोर्योगः याघ २ कावयोभा ६ । द्विघ्नः याघ ४ कावयाभा १२ समशोधनार्थं न्यासः । याघ ८ याव ४ कावयाभा ० ।

याघ ४ याव ० कावयाभा १२ ।

समशोधने कृते पक्षौ यावत्तावतापवर्त्य रूपं प्रक्षिप्य प्रथमपक्ष-
मूलं या २ रू १ । परपक्षस्यास्य काव १२ रू १ । वर्गप्रकृत्या मूले क २ । ज्ये ७ । वा क १८ ज्ये ९७ । कनिष्ठं कालकमानं ज्येष्ठमस्य या २ रू १ समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं ३ वा ४८ । स्वस्व-
मानेनोत्थापने कृते जातौ राशी ५ । १, वा २० । ७६ इत्यादि ।

भाषा—दो राशि के योगके वर्ग में दोनों राशि के योग का घन जोड़ देते हैं तो द्विगुण घनयोग के बराबर हो जाता है, हे गणक उस राशि को कहे ।

अथान्यत् सूत्रं सार्धवृत्तम् ।

*द्वितीयपक्षे सति सम्भवे तु कृत्याऽपवर्त्त्यात्र पदे प्रसाध्ये ।

ज्येष्ठं कनिष्ठेन तदा निहन्याच्चेद्वर्गवर्गेण कृतोऽपवर्त्तः ॥६॥

कनिष्ठवर्गेण तदा निहन्याज्ज्येष्ठं ततः पूर्ववदेव शेषम् ।

स्पष्टार्थम् ।

उदाहरणम्—

यस्य वर्गकृतिः पञ्चगुणा वर्गशतोनिता ।

मूलदा जायते राशिं गणितज्ञ वदाशु तम् ॥ १ ॥

अत्र राशिः या १ । अस्य वर्गकृतिः पञ्चगुणा वर्गशतेनोना यावव ५ याव १०० । अयं वर्ग इति कालकवर्गसमं कृत्वा गृहीतं कालकवर्गस्य मूलं का १ । द्वितीयपक्षस्यास्य यावव ५ याव १०० । यावत्तावद्वर्गेणापवर्त्त्य वर्गप्रकृत्या मूले क १० । ज्ये २० । वा क १७० ज्ये ३८० । कृत्याऽपवर्त्ते कृते ज्येष्ठं कनिष्ठेन तदा निहन्यात् इति जातं ज्ये २०० वा ज्ये ६४६०० । इदं कालकमानं कनिष्ठं प्रकृति-वर्णमानं स एव राशिः १० वा १७० ।

भाषा—जिस राशि के वर्गवर्ग को पाँच से गुण देते हैं और सौ से गुना हुआ वर्ग घटा देते हैं तो मूल मिल जाता है, हे गणितज्ञ उस राशि को शीघ्र कहो ।

उदाहरणम्—

कथोः स्यादन्तरे वर्गो वर्गयोगो ययोर्धनः ।

तौ राशी कथयाभिन्नौ बहुधा बीजवित्तम् ॥ २ ॥

* सं० टि० । कल्प्येते पक्षौ का^२ = इया^५ + इ^१ या^२

$$\therefore \text{का} = \sqrt{\text{इया}^5 + \text{इ}^1 \text{या}^2} = \sqrt{\text{या}^2 (\text{इया}^3 + \text{इ}^1)}$$

$$= \text{या} \sqrt{\text{इया}^3 + \text{इ}^1} \quad \text{अत्र वर्गप्रकृत्या मूले गृहीते कनिष्ठं}$$

यामानं ज्येष्ठं च $\sqrt{\text{इया}^3 + \text{इ}^1}$ अस्य समम् तेन का = क × ज्ये

$$\text{एवं यदा का} = \sqrt{\text{या}^5 \times \text{या}^2 \text{इ} + \text{या}^2 \text{इ}^1} = \text{या}^2 \sqrt{\text{या}^3 \text{इ} + \text{इ}^1}$$

तदा का = क^२ × ज्ये एवमग्रे ज्ञेयम् ।

अथ राशी या १ का १ । अनयोरन्तरं या १ का १ नीलक-
वर्गसमं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं का १ नीव १ । अनेन यावत्ताव-
दुत्थाप्य जातौ राशी का १ नीव १ । का १ । अनयोर्वर्गयोगः काव २
नीवकाभा २ नीवव १ । एष घन इति नीलकवर्गघनसमं कृत्वा
शोधने कृते जातं प्रथमपक्षे नीवघ १ नीवव १ । द्वितीयपक्षे काव २
नीवकाभा २ । पक्षौ द्वाभ्यां संगुण्य नीलकवर्गवर्गं प्रक्षिप्य द्वितीय-
पक्षस्य मूलं का २ नीव १ । प्रथमपक्षं नीवघ २ नीवव १ ।
नीलकवर्गवर्गेणापवर्त्य नीव २ रू १ । अत्र वर्गप्रकृत्या मूले क ५
ज्ये ७ । वा क २२ ज्ये ४१ । चेद्वर्गवर्गेण कृतोऽपवर्तः
कनिष्ठवर्गेण तदा निहन्याज्ज्येष्ठम् इति जातं ज्येष्ठं १७५ वा
ज्ये ३४४८१ । कनिष्ठं नीलकमानं तेनोत्थापितं प्राङ्मूलं जातं का २
रू २५ वा का २ रू ८४१ । इदं ज्येष्ठमूलसमं कृत्वा लब्धं कालकमानं
१०० वा १७६६१ । स्वस्वमानेनोत्थाप्य जातौ राशी ७५, १००
वा १६८२० । १७६६१ इत्यादि ।

भाषा—कौन ऐसे दो राशि हैं जिसके अन्तर में वर्ग है और जिसका वर्गयोग किसी अङ्क के घन के तुल्य होता है । हे बीजगणित के जाननेवाले ! अभिन्न उन दोनों राशिओं को बतलाओ ।

अन्यत् सूत्रं सार्धवृत्तम् ।

*साव्यक्त्यरूपो यदि वर्णवर्गस्तदाऽन्यवर्णस्य कृतेः समं तम् ॥७॥

कृत्वा पदं तस्य तदन्यपक्षे वर्गप्रकृत्योक्तवदेव मूले ।

कनिष्ठमाद्येन पदेन तुन्यं ज्येष्ठं द्वितीयेन समं विदध्यात् ॥८॥

अत्र प्रथमपक्षमूले गृहीते सत्यन्यपक्षे साव्यक्ताव्यक्तकृतिः सरूपा-
ऽरूपा वा भवति तत्रापक्षस्यान्यवर्णवर्गसमीकरणं कृत्वा मूलं ग्राह्यं

* सं० टि०—अत्र प्रथमपक्षस्येष्टगुणितस्येष्टयुतस्य मूलं नीलकं प्रकल्प्य तद्वर्गेण समं द्वितीयपक्षं कृत्वा पूर्वोक्तयुक्त्या लुगमोपपत्तिः ।

तदन्यपक्षस्य वर्गप्रकृत्या मूले तयोः कनिष्ठमाद्यस्य पदेन ज्येष्ठं द्वितीय-
पक्षपदेन च समं कृत्वा वर्णमाने साध्ये ।

उदाहरणम् ।

त्रिकादिद्व्युत्तरश्रेष्ठ्यां गच्छे कापि च यत् फलम् ।

तदेव त्रिगुणं कस्मिन्नन्यगच्छे भवेद्द्वद ॥१॥

अत्र श्रेष्ठ्योर्न्यासः । आदिः ३ चयः २ गच्छः या १ ।

आदिः ३, चयः २, गच्छः का १ । अनयोः फले याव १ या २ ।

काव १ का २ । अनयोराद्यं त्रिगुणं परसमं कृत्वा शोधनार्थं

न्यासः । याव ३ या ६ ।

काव १ का २ ।

शोधने कृते पक्षौ त्रिगुणीकृत्य नव प्रक्षिप्य प्रथमपक्षस्य मूलं या ३
रू ३ । द्वितीयपक्षस्यास्य काव ३ का ६ रू ९ । नीलकवर्गेण
साम्यं कृत्वा तथैव पक्षौ त्रिगुणीकृत्य ऋणमष्टादश प्रक्षिप्य मूलं का ३
रू ३ । तदन्यपक्षस्यास्य नीव ३ रू १८ वर्गप्रकृत्या मूले क ९
ज्ये १५ वा क ३३ ज्ये ५७ । कनिष्ठमाद्यपदेनानेन या ३ रू ३ समं
कृत्वा लब्धे यावत्तावत्कालकमाने २, ४ वा १०, १८ । एवं सर्वत्र ।

भाषा—तीन है आदि दो है चय पे... श्रेढ़ी में किसी गच्छ में जो फल मिलता
है उसे तीनसे गुण दें तो किसी अन्य गच्छ में हो जाता है तो इसे बतलाओ ।

अन्यत् सूत्रं वृत्तद्वयम् ।

❀ सरूपके वर्णकृती तु यत्र तत्रेच्छयैकां प्रकृतिं प्रकल्प्य ।

शेषं ततः क्षेपकमुक्तवच्च मूले विदध्यादसकृत् समत्वे ॥६॥

* सं० टि० । यदि नी^२ = इ या^२ + इ^१ का^२ + क्षे तदा यदि इ या^२ + क्षे इदं वा
इ^१ का^२ + क्षे इदं क्षेपं प्रकल्प्य इ वा इ^१ प्रकृतिं प्रकल्प्य कनिष्ठज्येष्ठे साध्येते तदा ते मूले
क्षेपवर्णात्मके भवतः । अतस्ताभ्यां पुनर्द्वितीयसमीकरणेन अव्यक्तयोर्माने व्यक्ते भविष्यतः
इत्युपपन्नम् । अत्र कल्प्येते पक्षौ नी^२ = इ^२ या^२ + इ^१ याका + इ^२ का^२

वा नी^२ = इ^२ या^२ + इ^१ याका + $\frac{इ^२ का^२}{४४}$ का^२ + का^० (इ^२ या^२ - $\frac{इ^२ का^२}{४४}$)

सभाविते वर्णकृती तु यत्र तन्मूलमादाय च शेषकस्य ।

इष्टोद्धृतस्येष्टविवर्जितस्य दलेन तुल्यं हि तदेव कार्यम् ॥१०॥

यत्र प्रथमपक्षमूले गृहीते द्वितीयपक्षे वर्णयोः कृती सरूपे अरूपे वा भवतस्तत्रैकां वर्णकृतिं प्रकृतिं प्रकल्प्य शेषं क्षेपः । तत इष्टं ह्रस्वं तस्य वर्गः प्रकृत्या क्षुण्ण इत्यादिकरणेन क्षेपजातीयं वर्णमेकादिहृतं युतं वा स्वबुद्ध्या कनिष्ठपदं प्रकल्प्य ज्येष्ठं साध्यम् । अथ वर्गगता चेत् प्रकृतिरिति तदा इष्टभक्तो द्विधा क्षेपः इत्यादिना मूले साध्ये यत्र भावितं च वर्तते तत्र सभाविते वर्णकृती तु इत्यादिना तदन्तर्वर्त्तिनो यावतो मूलमस्ति तावतो मूलं ग्राह्यम् । शेषस्येष्टोद्धृतस्येष्टविवर्जितस्य दलेन समं तदेव मूलं कार्यम् । यत्र तु द्वित्र्यादयो वर्णवर्गाद्या भवन्ति तत्र द्वाविष्टौ वर्णौ मुक्त्वाऽन्येषामिष्टानि मानानि कृत्वा मूले साध्ये । एवं तदैव यदाऽसकृत् समीकरणं यदा तु सकृदेव समीकरणं तदैकं वर्णं मुक्त्वाऽन्येषामिष्टानि मानानि कृत्वा प्राग्वन्मूले ।

अत्र यदि $पी = ३या + \frac{३१}{२३}का$ तदा

$$नी^२ = ३^२या^२ + ३१याका + \frac{३१^२}{४३^२}का^२ + का^२ \left(\frac{३२}{३२} - \frac{३१^२}{४३^२} \right)$$

$$पी^२ = ३^२या^२ + ३१याका + \frac{३१^२}{४३^२}का^२$$

$$नी^२ - पी^२ = का^२ \left(\frac{३२}{३२} - \frac{३१^२}{४३^२} \right) \text{ अथ यदि } नी - पी = ३१का$$

$$\text{तदा } नी + पी = का \left(\frac{\frac{३२}{३२} - \frac{३१^२}{४३^२}}{\frac{३१}{४३}} \right) \text{ ततः संक्रमणेन }.$$

$$पी = ३या + \frac{३१}{२३}का = का \left(\frac{\frac{३२}{३२} - \frac{३१^२}{४३^२}}{\frac{३१}{४३}} \right) - ३१का \text{ अत उपपन्नं सर्वम् ।}$$

उदाहरणम्—

तौ राशी वद यत्कृत्योः सप्ताष्टगुणयोर्युतिः ।

मूलदा स्याद्वियोगस्तु मूलदो रूपसंयुतः ॥ १ ॥

अत्र राशी या १ का-१ । अनयोर्वर्गयोः सप्ताष्टगुणयोर्युतिः
याव ७ काव ८ । अयं वर्ग इति नीलकवर्गेण समीकरणार्थं

न्यासः । याव ७ । काव ८ । नीव ० ।

याव ० । काव ० । नीव १ ।

समशोधने कृते कालकवर्गाष्टकं प्रक्षिप्य गृहीतं नीलकपक्षस्य मूलं
नी १ । परपक्षस्यास्य याव ७ काव ८ । वर्गप्रकृत्या मूले तत्र यावत्ता-
द्वर्गे योऽङ्कः सा प्रकृतिः शेषं क्षेपः काव ८ । इष्टं ह्रस्वं इत्यादिना
कालकद्वयमिष्टं प्रकल्प्य जाते मूले कनिष्ठं का २ । ज्येष्ठं का ६ ।
ज्येष्ठं नीलकमानं कनिष्ठं यावत्तावन्मानं तेन यावत्तावदुत्थाप्य जातौ
राशी का २ । का १ । पुनरेतद्वर्गयोः सप्ताष्टगुणयोरन्तरं सैकं जातं
काव २० रू १ । एतद्वर्ग इति प्राग्वल्लब्धं कनिष्ठमूलं २ वा ३६ ।
एतत्कालकमानेनोत्थापितौ जातौ राशी ४ । २ वा ७२ । ३६ ।

भाषा—उन दोनों राशियों को बतलाओ जिनके वर्ग को सात और काठ से
गुण देते हैं और योग करते हैं तो मूल मिल जाता है । और अन्तर में एक जोड़ देते
हैं तो मूल मिलता है ।

उदाहरणम्—

घनवर्गयुतिर्वर्गो ययो राश्योः प्रजायते ।

समासोऽपि ययोर्वर्गस्तौ राशी शीघ्रमानव ॥ २ ॥

अत्र राशी या १ । का १ । अनयोर्वर्गघनयोर्योगः याव १ काव १
अयं वर्ग इति नीलकवर्गसमं कृत्वा पक्षयोः कालकघनं प्रक्षिप्य नील-
कपक्षस्य मूलं नी १ परपक्षस्यास्य याव १ काव १ वर्गप्रकृत्या मूले
तत्र यावत्तावद्वर्गे योऽङ्कः सा प्रकृतिः शेषं क्षेपः प्रकल्प्य । प्रकृतिः
याव १ । क्षेपः काव १ । इष्टभक्तो द्विधा क्षेपः इत्यादिना कालकेनेहेन

जाते मूले क $\frac{\text{काव } १ \text{ का } १}{२}$ । ज्ये $\frac{\text{काव } १ \text{ का } १}{२}$ । कनिष्ठं यावत्ता-

वन्मानं तेनोत्थाप्य जातौ राशी $\frac{\text{काव } १ \text{ का } १}{२}$ । का १ । अनयोः

समासः $\frac{\text{काव } १ \text{ का } १}{२}$ अयं वर्ग इति पीतकवर्गेण समीकरणं कृत्वा

पक्षशेषं चतुर्भिः संगुण्य रूपं प्रक्षिप्य प्रथमपक्षमूलं का २ रू १ । पर-
पक्षस्यास्य पीव ८ रू १ । वर्गप्रकृत्या मूले क ६ ज्ये १७, वा क ३५
ज्ये ९९ । ज्येष्ठं पूर्वमूलेनानेन का २ रू १ । समं कृत्वा लब्धं
कालकमानं ८ वा ४९ । अनेनोत्थाप्य जातौ राशी २८ । ८ वा
११७६, ४९ ।

अथवा राशी याव २ । याव ७ । अनयोर्योगः याव ९ । अयं
वर्ग एव । अथानयोर्धनवर्गयोगः यावघ ८ यावव ४९ । एष वर्ग इति
कालकवर्गेण समीकृत्य प्राग्वद्वावत्तावद्गर्वगेणापवर्त्य लब्धं यावत्तावन्मानम्
२ । वा ७ अनेनोत्थापितौ राशी ८ । २८ वा १८ । ६३ वा ९८ । ३४३ ।

भाषा—जिन दोनों राशियों के धनवर्ग का योग करते हैं तो वर्ग हो जाता है
और जिसका योग करते हैं तो भी वर्ग हो जाता है उन दोनों राशियों को शीघ्र
बतलाओ ।

सभाविते वर्णकृती तु यत्र इत्येतद्विषयीभूतमुदाहरणम्—

ययोर्वर्गयुतिर्धातयुता मूलप्रदा भवेत् ।

तन्मूलगुणितो योगः सरूपश्चाशु तौ वद ॥३॥

अत्र राशी या १ । का १ । अनयोर्वर्गयुतिर्धातयुता याव १
याकाभा १ काव १ । अस्याः मूलं नास्तीति नीलकवर्गेण समामेतां कृत्वा
पक्षयोः कालकवर्गं प्रक्षिप्य पक्षौ षट्त्रिंशता संगुण्य लब्धं नीलकपक्षमूलं
नी ६ । परपक्षस्यास्य याव ३६ याकाभा ३६ काव ३६ । यावतो
मूलमस्ति तावतः सभाविते वर्णकृती तु इत्यादिना मूलं गृहीतं या ६

का ३। शेषस्यास्य काव २७। इष्टेन कालकेन १। हृतस्येष्टकालकवर्जितस्य च दलेन का १३। तन्मूलसमं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं का $\frac{५}{३}$ । अनेन यावत्तावदुत्थाप्य जातौ राशी का $\frac{५}{३}$ । का १। अन-

योर्वर्गयुतेः काव $\frac{३४}{९}$ । घातयुतायाः काव $\frac{४९}{९}$ । मूलं का $\frac{७}{३}$ । अनेन राशि-

योगो का $\frac{८}{३}$ । गुणितः काव $\frac{५६}{९}$ । सरूपो जातः का $\frac{५६}{९}$ रू ९। अमुं

पीतकवर्गसमं कृत्वा समच्छेदीकृत्य पक्षयोर्नवरूपाणि प्रक्षिप्य लब्धं कनिष्ठमूलं ६। वा १८०। एतत्कालकमानमित्यनेनोत्थापितौ जातौ राशी १०। ६। वा ३००। १८०। एवमनेकधा।

भाषा—जिन दोनों राशियों के वर्गयोग में राशिघात जोड़ देते हैं तो मूल मिलता है और उस मूल से गुणे हुए योग में एक जोड़ देते हैं तो भी मूलप्रद होता है तो इन राशियों को बतलाओ।

आद्योदाहरणम्—

राशयोर्धयोः कृतियुतिर्विद्युतिश्चैकेन संयुता वर्गौ।

रहितौ वा तौ राशी गणयित्वा कथय यदि वेत्ति ॥४॥

अथ प्रथमोदाहरणे कल्पितौ राशिवर्गौ याव ४। याव ५ रू १। अनयोर्योगवियोगौ रूपयुतौ मूलदौ भवतः। कथितप्रथमवर्गस्य मूलमेको राशिः या २। द्वितीयस्यास्य याव ५ रू १। वर्गप्रकृत्या मूले क १ ज्ये २। वा क १७ ज्ये ३८। अनयोर्ज्येष्ठपदं द्वितीयराशिः। ह्रस्वं यावत्तावन्मानेनोत्थाप्याद्यराशिः। एवं जातौ राशी २। २ वा ३४। ३८।

अथ द्वितीयोदाहरणे तथैव कल्पितः प्रथमराशिः या २। द्वितीयस्यास्य याव ५ रू १। वर्गप्रकृत्या मूले क ४ ज्ये ९। वा क ७२ ज्ये १६१। कनिष्ठेन प्रथम उत्थापितः ज्येष्ठं द्वितीय इति जातौ राशी ८। ९ वा १४४। १६१।

२३-(क)

अत्राल्पराशिवर्गेण यो राशिरूनितो युतश्च मूलदः स्यात् स तावद्-
व्यक्त एव द्वितीयो ज्ञेयः तस्यानयनेऽप्युपायस्तद्यथा । कल्पित *
राशिवर्गः ४ । अनेन द्वितीयराशिरूनितो युतश्च मूलदः स्यादित्ययं
द्विगुणः ८ । वर्गान्तरमिदं कथोरपि च योगान्तरघातसमम् । अतो-
ऽन्तरमिष्टं २ कल्पितं । वर्गान्तरं राशिवियोगभक्तमिति जाते वर्गान्तर-
योगमूले १ । ३ । आद्यस्य वर्गो १ । कल्पितराशिवर्ग ४ । प्रक्षिप्य
द्वितीयस्य वर्गात् ९ वा विशोध्य जातो द्वितीयः ५ । अत्र चाल्प-
राशिवर्गस्तथा कल्प्यते यथा द्वितीयराशिरभिन्नः स्यात् तथाऽन्यः
कल्पितः ३६ । द्विगुणः ७२ । इदं वर्गान्तरं राश्यन्तरषट्के कल्पिते
जातौ ३ । ९ । अन्यवर्गात् ८१ । कल्पितं ३६ । विशोध्य जातो
द्वितीयः ४५ । चतुष्केण वा ८५ द्विकेन वा ३२५ ।

अथान्यथा कल्पने युक्तिः । राश्योर्घातेन द्विगुणेन वर्गयोगो युतो-
नितोऽवश्यं मूलदः स्यात् । राशिवधो द्विगुणो यथा वर्गः स्यात् तथैको
वर्गोऽन्यो वर्गार्धमिति कल्प्यौ यतो वर्गयोर्वधो वर्गो भवतीति तथा
कल्पितौ एको वर्गः १ । अन्यो वर्गार्धं २ । अनयोर्घातो २
द्विगुणः ४ । अयं प्रथमः । अयमल्पराशिवर्गः तयोरेव वर्गयोगः ५ ।
अयं द्वितीयो राशिः ।

अथैको वर्गः ९ । अन्यो वर्गार्धं २ । अनयोर्घातो १८
द्विगुणः ३६ । अयमल्पराशिवर्गः । अथ तयोरेव वर्गयोगः ८५ । अयं
द्वितीयो राशिः । एतौ व्यक्तौ यावत्तावद्द्वर्गगुणौ कल्पितौ । प्रथमोदाहरणे

* सं. टि । कल्प्यते राशि का^१ = या - ३^२, नी^२ = या + ३^२ अनयोरन्तरं तदा
नी^२ - का^२ = २३^२ अत्र यदि नी - का = ३^१ कल्प्यते तदा नी + का = $\frac{२३^२}{३^१}$
 $\frac{२३^२}{३^१} - ३^१, \quad \frac{२३^२}{३^१} + ३^१$
अतः संक्रमणेन का = $\frac{२३^२}{३^१} - ३^१$, नी = $\frac{२३^२}{३^१} + ३^१$ आभ्यां कालकनीलकाभ्यां
या = का^२ + ३^२ = नी^२ - ३^२ अत उपपन्नं सर्वम् ।

द्वितीयो राशी रूपेणो नो द्वितीयोदाहरणे रूपयुतः कार्यः । एवं कृत्वा तौ तथा राशिवर्गौ कल्पितौ यथाऽऽलापद्वयं घटते किन्तु प्रथमस्य मूलं गृहीत्वा द्वितीयस्य वर्गप्रकृत्या मूलमित्यादि पूर्वोक्तमेव । एवमनेकधा ।

भाषा—दो राशियों के वर्गयोग या वर्गान्तर में एक जोड़ देते हैं तो वर्ग हो जाते हैं या एक घटा देते हैं तथापि वर्ग हो जाते हैं, उन दोनों राशियों को गणना करके बतलाओ ।

अथ कस्याप्युदाहरणम्—

यत् स्यात् सान्पवधार्धतो घनपदं यद्वर्गयोगात् पदं
यद्योगान्तरयोर्द्विकाभ्यधिकयोर्वर्गान्तरात् साष्टकात् ।
यच्चैतत्पदपञ्चकं तु मिलितं स्याद्वर्गमूलप्रदं
तौ राशौ कथयाशु निश्चलमते षट्काष्टकाभ्यां विना ॥५॥

सान्पवधस्यार्धाद् घनपदं ग्राह्यम् । अत्रालापानां बहुत्वेऽसकृत् क्रिया कार्या सा न निर्वहत्यतो बुद्धिमता तथा राशी कल्प्यौ यथैकेनैव वर्णेन सर्वेऽप्यालापा घटन्ते ।

तथा कल्पितौ राशी याव १ रू १ । या २ । अनयोः सान्प-
वधार्धतो घनपदं या १ । वर्गयोगात् पदं याव १ रू १ । द्व्यधिक-
योगपदं या १ रू १ । द्व्यधिकान्तरपदं या १ रू १ । साष्टवर्गान्तर-
पदं याव १ रू ३ । एषां योगः याव २ या ३ रू २ । अयं वर्ग इति
कालकवर्गसमं कृत्वा पक्षावष्टभिः संगुण्य पञ्चविंशतिरूपाणि प्रक्षिप्य
प्रथमपक्षस्य मूलं या ४ रू ३ । परपक्षस्यास्य काव ८ रू २५ ।
वर्गप्रकृत्या मूले क ५ ज्ये १५ । वा क ३० ज्ये ८५ । वा क १७५
ज्ये ४९५ । ज्येष्ठं पूर्वपदेन समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं ३ ।
वा $\frac{४१}{२}$ । वा १२३ । अनेनोत्थापितौ राशी ६ । ८ । वा $\frac{१६७७}{४}$ ।

४१ वा १५१२८ । २४६ । एवमनेकधा ।

अथवा यावत्तावद्द्वर्गो यावत्तावद्द्वयेन युत एको राशिः याव १
या २ । यावत्तावद्द्वयं ऋणरूपद्वययुतमन्यराशिः या २ रू २ । अथवा
यावत्तावद्द्वर्गो यावत्तावद्द्वयोन एको राशिः याव १ या २ । यावत्तावद्द्वयं
रूपद्वयोनमन्यराशिः या २ रू २ । अथवा यावत्तावद्द्वर्गो यावत्ताव-
चतुष्टयं रूपत्रययुतं चैको राशिः याव १ या ४ रू ३ । यावत्तावद्द्वयं
रूपचतुष्टयं चान्यः या २ रू ४ ।

भाषा—वे दो कौन राशि हैं जिन के घात में लघुराशि जोड़ कर आधा करने से
घनमूल आता है और उन्हीं राशियों के वर्गों का योग करने से वर्गमूल आता है और उनके
योग तथा अन्तर में दो जोड़ देने से वर्गमूल मिलता है और उनके वर्गान्तर में आठ
जोड़ देने से वर्गमूल मिलता है इस प्रकार जो पांचो मूल आते हैं उनका योग भी मूल-
प्रद होता है परन्तु छै और आठ इन दोनों को छोड़कर अन्य राशियों को बतलाओ ।

एवं सहस्रधा गूढा मूढानां कल्पना यतः ।

कृपया कल्पनोपायस्तेषामेव च कथ्यते ॥

अथ सूत्रं वृत्तद्वयम् ।

❀ सरूपमव्यक्तमरूपकं वा वियोगमूलं प्रथमं प्रकल्प्य ।

योगान्तरक्षेपकभाजिताद्यद्वर्गान्तरक्षेपकतः पदं स्यात् ॥११॥

तेनाधिकं तत् तु वियोगमूलं स्याद्योगमूलं तु तयोस्तु वर्गौ ।

स्वक्षेपकोनौ हि वियोगयोगौ स्यातां ततः संक्रमणेन राशी ॥१२॥

* अत्र कल्प्यते वियोगमूलं या, योगमूलं का, योगान्तरक्षेपमानं क्षे, वर्गान्तरक्षेपमानं
क्षे, वर्गयोगक्षेपमानं क्षे, तदाऽऽलापानुसारेण वियोगः = या^२-क्षे, योगः = का^२-क्षे तदा

$$\text{स्वरूपराशिः} = \frac{\text{का}^२ - \text{या}^२}{२}, \text{ महद्राशिः} = \frac{\text{का}^२ + \text{या}^२ - २ \text{क्षे}}{२}$$

$$\text{महद्राशिर्वर्गः} = \frac{\text{या}^४ + २ \text{या}^२ \text{का}^२ - ४ \text{क्षे या}^२ + \text{का}^४ - ४ \text{क्षे का}^२ + ४ \text{क्षे}^२}{४}$$

$$\text{स्वरूपराशिर्वर्गः} = \frac{\text{या}^४ - २ \text{या}^२ \text{का}^२ + \text{का}^४}{४}$$

$$\text{वर्गान्तरम्} = \frac{४ \text{या}^२ \text{का}^२ - ४ \text{क्षे या}^२ - ४ \text{क्षे का}^२ + ४ \text{क्षे}^२}{४} = \text{या}^२ \text{का}^२ - \text{क्षे या}^२ - \text{क्षे का}^२ + \text{क्षे}^२$$

उदाहरणम्—

राश्योर्योगवियोगकौ त्रिसहितौ वर्गौ भवेतां ययो—

वर्गैक्यं चतुरनुतं रवियुतं वर्गान्तरं स्यात् कृतिः ।

सान्पं घातदलं घनः पदयुतिस्तेषां द्वियुक्ता कृति—

स्तौ राशी वद कोमलामलमते षट् सप्त हित्वाऽपरौ ॥६॥

अत्र रूपोनमव्यक्तं वियोगमूलं प्रकल्प्य या १ रू १ । अत्राप्यन-
यैव युक्त्या कल्पितौ राशी याव १ रू २ । या २ । वा कल्पितौ राशी
याव १ या २ रू १ । या २ रू २ । राश्योर्योगस्त्रिसहितः याव १ या २
रू १ । राश्योरन्तरं त्रिसहितं याव १ या २ रू १ । प्रथमराशिर्वर्गः याव १
याव ४ रू ४ । द्वितीयराशिर्वर्गः याव ४ । अनयोरेक्यं चतुरनुतं याव १ ।
तयोरेवान्तरं रवियुतं याव १ याव ८ रू १६ । राशिघातः याघ २
या ४ । दलं याघ १ या २ । सान्पं याघ १ । एभ्यो मूलानि तत्र त्रियुतयोग-
मूलं या १ रू १ । त्रियुतवियोगमूलं या १ रू १ । चतुरनुतवर्गैक्यमूलं
याव १ । रवियुतवर्गान्तरमूलं याव १ रू ४ । तथा घनमूलं या १ । पद-
पञ्चकयोगो द्वियुतो जातः याव २ या ३ रू २ । एष वर्ग इति
कालकवर्गेण समीकरणाय न्यासः । याव २ या ३ काव रू २ ।

याव ० या ० काव १ रू ० ।

समीकरणात्पक्षशेषौ याव २ या ३ । काव १ रू २ । अत्रैतावद्यभिः संगुण्य

$$= या^२ का^२ - २ या का क्षे + क्षे^२ - क्षे या^२ + २ या का क्षे - क्षे का^२$$

$$= (या का - क्षे)^२ - क्षे (या^२ - २ या का + का^२)$$

अत्र यदि क्षे (या^२ - २ या का + का^२) = क्षेपमानं कल्प्यते तदा

अवश्यमेव निरवयवमूलं या का - क्षे इदमागमिष्यति

अत्र वर्गान्तरक्षेपमानं = क्षे, पूर्वकल्पितं = क्षे (या^२ - २ या का + का^२)

$$\text{अतः } \frac{\text{क्षे}}{\text{क्षे}} = या^२ - २ या का + का^२$$

$$\text{अतएव } \sqrt{\frac{\text{क्षे}}{\text{क्षे}}} = का - या इत्युपपन्नं सर्वम्$$

नवरूपाणि प्रक्षिप्याद्यपक्षस्य मूलं या ४ रू ३ । परपक्षस्यास्य काव ८ रू २५ । वर्गप्रकृत्या मूले क ५ ज्ये १५ । वा क १७५ ज्ये ४९५ । ज्येष्ठं प्रथमपक्षमूलममं कृत्वाऽसं यावत्तावन्मानं ३ वा १२३ । वर्गेणाद्यं केवलेनान्त्यमुत्थाप्य जातो राशी ७ । ६ वा १५१२७ । २४६

अथवा कल्पितद्वितीयराशोर्योगस्त्रियुतः याव १ या ४ रू ४ । वियोगस्त्रियुतः याव १ । अत्राद्यवर्गः यावव १ याघ ४ याव २ या ४ रू १ । द्वितीयराशिर्वर्गः याव ४ या ८ रू ४ । अनयोरैक्यं चतुरनं यावव १ याघ ४ याव ६ या ४ रू १ । वर्गान्तरं रवियुतं यावव १ याघ ४ याव २ या १२ रू ९ । राशिघातः याघ २ याव ६ या २ रू २ । दलं याघ १ याव ३ या १ रू १ । सालपं याघ १ याव ३ या ३ रू १ । एभ्यो मूलानि तत्र त्रियुतयोगमूलं या १ रू २ । त्रियुतवियोगमूलं या १ । चतुरनितवर्गेक्यमूलं याव १ या २ रू १ । रवियुतवर्गान्तरमूलं याव १ या २ रू ३ । घनमूलं या १ रू १ । पद-पञ्चकयोगो द्वियुक्तः याव २ या ७ रू ३ । एष वर्ग इति कालकवर्गेण समीकरणाय न्यासः । याव २ या ७ काव ० रू ३ ।

याव ० या ० काव १ रू ० ।

समशोधनात्पक्षशेषौ याव २ या ७ । काव १ रू ३ । अत्र पक्षा-वष्टभिः संगुण्यैकोनपञ्चाशद्रूपाणि प्रक्षिप्याद्यपक्षमूलं या ४ रू ७ परपक्ष-स्यास्य काव ८ रू २५ । वर्गप्रकृत्या मूले क ५ ज्ये १५ । वा क १७५ ज्ये ४९५ । ज्येष्ठं प्रथमपक्षपदेन समं विधाय लब्धं यावत्तावन्मानं २ वा १२२ । अत्र वर्गेण अव्यक्तवर्गराशिं केवलेनाव्यक्तमुत्थाप्य जातौ राशी ७ । ६ वा १५१२७ । २४६ । तद्यथा या २ अस्य वर्गः ४ । अनेन याव १ । गुणितः ४ । केवलेन २ या २ । गुणितः ४ । उभयो-र्व्यक्तत्वाद्योगः ८ । ऋणगे रूपे १ । वियोजिते जात एकः ७ । तथा या २ । केवलेन वा २ । गुणितः ४ । रूप २ युतो जातः परः ६ । एवं

द्वितीयः या १२२ । वर्गः १४८८४ । अनेन याव १ गुणितः १४८८४ । केवलेन या १२२ या २ । गुणितः २४४ । उभयोर्व्यक्त-
योर्योगात् ऋणं रूपं विशोध्य जात एकः १५१२७ । तथा या २ ।
केवलेन १२२ । गुणितो व्यक्तरूप २ । युतोऽपरः २४६ । एवं बहुधा ।

भाषा—त्रे दो न्यूनाधिक कौन राशि हैं जिनके योग तथा अन्तर में २ जोड़ देने से मूल मिलता है और वर्गों के योग में ४ घटा देने से मूल मिलता है और वर्गों के अन्तर में १२ जोड़ देने से मूल मिलता है और उनके घात के आधे में लघु राशि जोड़ देने से घनमूल मिलता है, इस प्रकार पाँचो मूलों के योग में २ जोड़ देने से भी वह वर्ग होता है उन राशियों को बतलाओ जोकि छै सात से भिन्न हो ।

*** यत्राव्यक्तं सरूपं हि तत्र तन्मानमानयेत् ।**

सरूपस्यान्यवर्णस्य कृत्वा कृत्यादिना समम् ॥ १३ ॥

राशिं तेन समुत्थाप्य कुर्याद्भूयोऽपरां क्रियाम् ।

सरूपेणान्यवर्णेन कृत्वा पूर्वपदं समम् ॥ १४ ॥

यत्राद्यपक्षमूले गृहीते परपक्षेऽव्यक्तं सरूपमरूपं वा स्यात् तत्रान्यवर्णस्य सरूपस्य वर्गेण साम्यं कृत्वा तस्याव्यक्तस्य मानमानोय तेन राशिमुत्थाप्य पुनरन्यां क्रियां कुर्यात्तथा तेनान्यवर्णेन सरूपेणाद्यपक्षपदसाम्याच्च यदि पुनः क्रिया न भवेत्तदा तु व्यक्तेनैव वर्गादिना समक्रिया ।

उदाहरणम्—

यस्त्रिपञ्चगुणो राशिः पृथक् सैकः कृतिर्भवेत् ।

बदेति बीजमध्येऽसि मध्यमाहरणे पदुः ॥ १ ॥

अत्र राशिः या १ । एष त्रिगुणः सैकः या ३ रू १ । अयं वर्ग इति कालकवर्गसमं कृत्वा पक्षयोः रूपं १ । प्रक्षिप्य लब्धं कालकपक्षस्य मूलं का १ । अन्यपक्षस्यास्य या३ रू १ । सरूपनीलकत्रयस्य वर्गेण

* सं० टि० । कल्प्येते पक्षौ या^२ = इ का + रू ∴ या = $\sqrt{\text{इ.का} + \text{रू}}$ अत्र कालकस्य वर्गाभावान्न वर्गप्रकृतेर्विषयः अतः कल्प्येते $\sqrt{\text{इ.का} + \text{रू}} = \text{न.इ} + \text{रू} = \text{या}$ अतः पक्षं सरूपेणान्यवर्णेनेति ।

नीव ९ नी६ रू १ । साम्यं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानेनोत्थापितो जातो राशिः नीव ३ नी २ । पुनरयं पञ्चगुणः सैको वर्ग इति नीव १५ नी१० रू१ । पीतकवर्गसमं कृत्वा समशोधने कृते पक्षा नीव१५ नी१० पीव १ रू १ विमौ पञ्चदशभिः संगुण्य पञ्चविंशतिरूपाणि प्रक्षिप्याद्यपक्षस्य मूलं नी१५ रू५ । परपक्षस्यास्य पीव१५ रू१० । वर्गप्रकृत्या मूले क९ ज्ये ३५ वा क ७१ ज्ये २७५ । कनिष्ठं पीतकमानं ज्येष्ठमाद्यपक्षस्य मूलनानेन नी१५ रू५ । समं कृत्वा स नीलकमानं २ वा १८ । स्वस्वमानेनोत्थाप्य जातो राशिः १६ । वा १००८ ।

अथवैकालापः स्वत एव सम्भवति तथा कल्पितो राशिः याव $\frac{१}{३}$ रू $\frac{१}{३}$ । एष पञ्चगुणो रूपयुतः याव $\frac{५}{३}$ रू $\frac{२}{३}$ । मूलद इति कालकवर्गसमं कृत्वा पक्षयोः ऋणत्र्यंशद्वयं प्रक्षिप्योक्तवद् गृहीतं कालक-पक्षस्य मूलं का १ । द्वितीयपक्षस्यास्य याव $\frac{५}{३}$ रू $\frac{२}{३}$ । वर्गप्रकृत्या मूले क ७ ज्ये ९ । वा क ५५ ज्ये ७१ । अत्र कनिष्ठं प्रकृतिवर्णमानं तेन कल्पितराशिमुत्थाप्य जातो राशिः स एव १६ वा १००८ ।

भाषा—जिस राशि को पृथक् तीन से पांच से गुण देते हैं एक जोड़ देते हैं तो वर्ग हो जाता है उस राशि को बतलाओ यदि बीजगणित के मध्यमाहरण में तुम पड़ हो ।

अथाद्योदाहरणम् ।

को राशिस्त्रिभिरभ्यस्तः सरूपो जायते घनः ।

घनमूलं कृतीभूतं त्र्यभ्यस्तं कृतिरेकयुक् ॥ २ ॥

अत्र राशिः या १ । अयं त्र्यभ्यस्तो रूपयुतः या ३ रू १ । एष घन इति कालकघनसमं कृत्वा प्राग्वज्जातो राशिः काघ $\frac{१}{२}$ रू $\frac{१}{३}$ । अस्य

त्रिगुणस्य सरूपस्य घनमूलं वर्गितं त्रिहतं रूपयुतं काव ३ रू १ । एतत्
कृतिरिति नीलकवर्गसमं कृत्वा पक्षयोः रूपं प्रक्षिप्य प्रथमपक्षमूलं नी १ ।
द्वितीयपक्षस्यास्य काव ३ रू १ । वर्गप्रकृत्या मूले क १ ज्ये २ । वा क ४
ज्ये ७ । वा क १५ ज्ये २६ । कनिष्ठं कालकमानं ४ । अस्य घनेन ६४ ।

उत्थापितो जातो राशिः २१ । वा $\frac{३३७४}{३}$ ।

भाषा—कौन ऐसा राशि है जिसको तीन से गुण देते हैं एक जोड़ देते हैं तो
घन हो जाता है, उसके घनमूल का वर्ग करते हैं तीन से गुण देते हैं एक जोड़ देते हैं
तो वर्ग हो जाता है ।

उदाहरणम्

वर्गान्तरं कयोः राश्योः पृथक् द्वित्रिगुणं त्रियुक् ।
वर्गौ स्यातां वद क्षिप्रं षट्कपञ्चकयोरिव ॥३॥
क्वचिदादेः कचिन्मध्यात् कचिदन्त्यात् क्रिया बुधैः ।
आरभ्यते यथा लघ्वी निर्वहेच्च यथा तथा ॥

अतोऽत्र वर्गान्तरं या १ । एतद्द्विघ्नं त्रियुतं या २ रू ३ । वर्ग

इति कालकवर्गसमं कृत्वा सयावत्तावन्मानेनोत्थापितो जातो राशिः काव $\frac{१}{२}$

रू $\frac{३}{२}$ । पुनरिदं त्रिघ्नं त्रियुतं काव $\frac{३}{२}$ रू $\frac{३}{२}$ वर्ग इति नीलकवर्गसमं कृत्वा

समशोधने कृते जातौ पक्षौ नीव २ रू ३ । एतौ त्रिभिः संगुण्य कालक-
काव ३

पक्षमूलं का ३ । परपक्षस्यास्य नीव ६ रू ९ । वर्गप्रकृत्या मूले क ६
ज्ये १५ । वा क ६० ज्ये १४७ । ज्येष्ठं प्रथमपक्षपदेन का ३ । समं
कृत्वा लब्धं कालकमानं ५ । वा ४९ । प्राग्वदासकालकमानेनोत्थापितं
जातं वर्गान्तरं राश्योः ११ । वा ११९९ । इदमन्तरहृतं द्विधान्तरेणो-
नयुतमर्धितं राशी भवत इति प्रागुक्तमतोऽन्तरमिष्टं रूपं प्रकल्प्य जातौ

राशी ६।५ वा ६००।५९९। अथवान्तरमेकादश प्रकल्प्य जातौ
राशी ६०।४९

भाषा—पांच और छे की तरह वे दो कौन राशि हैं जिनके वर्गान्तर को पृथक् पृथक् दो और तीन से गुणकर तीन जोड़ने से वर्ग हो जाते हैं।

कहीं आलाप के आरंभ से कहीं उसके मध्य से और कहीं अन्त्य से क्रिया आरंभ की जाती है जिससे सुगमता से उत्तर हो तथा क्रिया चल सके।

अन्यत्करणसूत्रं सार्धवृत्तम्।

❁ वर्गादीर्यो हरस्तेन गुणितं यदि जायते।

अव्यक्तं तत्र तन्मानमभिन्नं स्याद्यथा तथा ॥१५॥

कल्प्योऽन्यवर्णवर्गादितुल्यः शेषं यथोक्तवत्॥

यत्र वर्गादौ कुट्टकादौ वा एकपक्षमूले गृहीतेऽन्यपक्षेऽव्यक्तवर्गादि-
कस्य यो हरस्तेन गुणितं यदि स्यात्तदा तस्य मितिरभिन्ना यथा स्यात्तथा-
ऽन्यवर्णवर्गादिः सरूपो रूपोनो वा तुल्यः कल्प्यः शेषं पूर्वसूत्रोक्तम्।

उदाहरणम्—

को वर्गश्चतुरनः सन् सप्तभक्तो विशुध्यति।

त्रिंशदूनेऽथवा कः स्याद् यदि वेत्ति वद द्रुतम् ॥१॥

अत्र राशिः या १। अस्य वर्गश्चतुरनः सप्तभक्तो विशुध्यतीति
लब्धिप्रमाणं कालकस्तद्गुणितहरेणास्य याव १ रू ४। साम्यं कृत्वा
प्रथमपक्षमूलं या १। परपक्षस्यास्य का ७ रू ४। मूलभावात् वर्गादीर्यो
हरस्तेन गुणितं यदि जायत इत्यादिना करणेन नीलकसप्तकस्य रूपद्वया-
धिकस्य वर्गेण तुल्यं कृत्वा लब्धं कालकमानमभिन्नं जातं नीव ७ नी ४।
यत्तु कल्पितं तस्य द्वितीयपक्षस्य मूलं नी ७ रू २। इदं प्राक्पक्ष-

* सं० । अत्र कल्प्यते $\frac{\text{या}^2 - १}{४} = \text{का}$

तदा या^२ = हका + १ एतादृक्स्थितवेव सूत्रस्य प्रवृत्तिः अत्र का मानमभिन्नं कथं
स्यात्तदर्थमेवाग्रे युक्तिरुच्यते आचार्येण।

मूलस्यास्य या १ । समं कृत्वासं यावत्तावन्मानं नी ७ रू २ । सक्षेपं ९ ।
अस्य वर्गो राशिः स्यात् ८१ ।

भाषा—वह कौन वर्ग है जिसमें चार वा तीस घटाकर सात का भाग देने से निःशेष होता है, यदि जानते हो तो शीघ्र बतलाओ ।

अथवान्यवर्णकल्पनायां मन्दावबोधार्थं पूर्वैरूपायः पठितः सूत्रम्—

हरभक्ता यस्य कृतिः शुध्यति सोऽपि द्विरूपपदगुणितः ।

तेनाहतोऽन्यवर्णो रूपपदेनान्वितः कल्प्यः ॥ १६ ॥

न यदि पदं रूपाणां क्षिपेद्हरं तेषु हारस्तष्टेषु ।

तावद्यावद्गर्गो भवति न चेदेवमपि खिलं तर्हि ॥१७॥

* सं० । पूर्वोक्तसूत्रेण या^२ = ह. का + रू अत्र यदि रू अयं वर्गात्मकस्तदा कल्प्यते
द्वितीयपक्षमूलम् = न.इ^१ + √रू

$$\therefore या^2 = ह.का + रू = (न.इ^1 + \sqrt{रू})^2$$

$$\therefore ह.का + रू = न^2.इ^2 + रू + २न.इ^1\sqrt{रू}$$

$$\text{पक्षान्तरादिना का} = \frac{न^2.इ^2}{ह} + \frac{२न.इ^1\sqrt{रू}}{ह} = न^2\frac{इ^2}{ह} + न\frac{२इ^1\sqrt{रू}}{ह}$$

अत्र यदि $\frac{इ^2}{ह}$ इदमभिन्नं तदा $\frac{२इ^1\sqrt{रू}}{ह}$ इदमप्यभिन्नमेव अतः इ^२ तथा कल्प्यो

येन हरभक्तः शुध्यत्येव इत्युपपन्नं सूत्रस्य प्रथमतः सर्वम् ।

अथ यदि रूपाणां मूलं न लभ्यते तदा कल्प्यते का = नी + इ_२ - इ_१ तदा
इका + रू = इ.नी + इ.इ_२ - इ.इ_१ + रू अत्र यदि इ.इ_२ - इ.इ_१ + रू इदं वर्गात्मकं
रू^१ समं भवेत्तदा इ.का + रू = इ.नी + रू^१ अतः पुनः पूर्वयुक्त्या इ.नी + रू^१ अथ
मानं ज्ञेयम् ।

एवं यदि याघ = इ.का + रू यत्र रू इत्यस्य धनमूलं निरग्रं लभ्यते तदात्रापि
पूर्वयुक्त्या या = इ_१नी + रूधमृ ततः या^२ = इ_१^२नी^२ + २इ_१रूधमृ नी^२ +
२इ_१रूधमृ^२ नी + रू = इका + रू^१ $\therefore$ का = $\frac{इ_१^२नी^२ + २इ_१रूधमृ इ_१नी^२ +$

$\frac{२इ_१रूधमृ.रूधमृ}{इ}$ नी. अत्रापि यदि $\frac{इ_{१}^२}{इ}}$, $\frac{२इ_१रूधमृ}{इ}$ एतद्वद्वयमभिन्नं भवेत्तदा

क्लात्कमानमध्यभिन्नं भवेदेवेत्युपपन्नं सर्वम् ।

हित्वा क्षिप्त्वा च पदं यत्राद्यस्येह भवति तत्रापि ।

आलापित एव हरो रूपाणि तु शोधनादिसिद्धानि ॥१८॥

हरभक्तेति । यस्याङ्कस्य कृतिर्हरभक्ता सती शुध्यतीति निःशेषा भवति अपि च सोऽप्यङ्को द्वाभ्यां रूपपदेन गुणितो हरभक्तः सन् शुध्यति तदा तेनाङ्केन हतोऽन्यवर्णस्तेन रूपेणान्वितः कल्प्यः । यदि तु रूपाणां पदं न तदा तेषु हरतष्टेषु रूपेषु तावद्धरं क्षिपेत् यावद्गो भवेत्तन्मूलं रूपपदं भवेत् । एवमपि कृते चेद्वर्गः कदाचिन्न भवेत्तदा तदुदाहरणं खिलं स्यात् । यत्र तु आद्यपक्षस्य मूलं हित्वा क्षिप्त्वेत्यादिना लभ्यते तदा हर आलापित एव ग्राह्यो न तु गुणितो विभक्तो वा । रूपाणि तु समशोधने कृते शोधनादिसिद्धानि यानि तान्येव ग्राह्याणि । एवं घनेऽपि योज्यं तद्यथा । यस्याङ्कस्य घनो हरभक्तः शुध्यति तथा च सोऽप्यङ्कस्त्रिभिः रूपाणां घनमूलेन गुणितो हरभक्तः शुध्यति तदा तेनाङ्केन हतोऽन्यवर्णो रूपाणां घनमूलेन चान्वितः कल्प्यः । यदि रूपाणां घनमूलं न लभ्यते तदा तेषु रूपेषु हरतष्टेषु तावद्धरं क्षिपेद्यावद् घनो भवेत्तच्च घनमूलं रूपपदं स्यादेवमपि कृते च घनः कदाचिन्न भवेत्तदुदाहरणं खिलं स्यादित्यग्रेऽपि योज्यमिति शेषः ।

अथ द्वितीयोदाहरणे राशिः या १ । अस्य यथोक्तं कृत्वाद्यपक्षस्य मूलं या १ । परपक्षस्यास्य का ७ रू ३० । न यदि पदं रूपाणामित्यादिकरणेन हारतष्टरूपेषु द्विगुणं हरं प्रक्षिप्य मूलं ४ एतदधिकनीलकसप्तकवर्गसमीकरणादिना प्राग्वज्जातो राशिः नी ७ रू ४ ।

अथ यदि ऋणरूपैरन्वितं नीलकसप्तकं नी ७ रू ४ परिकल्प्यानीयते तदाऽन्योऽपि राशिः ३ स्यात् ।

उदाहरणम्—

षड्भिरूनो घनः कस्य पञ्चभक्तो विशुध्यति ।

तं वदाशु तवालं चेदभ्यासो घनकुट्टके ॥ २ ॥

अत्र राशिः या १ । अस्य यथोक्तं कृत्वाद्यपक्षस्य घनमूलं या १

परपक्षस्यास्य काघ ५ रू ६ हरभक्तो यस्य घनः शुध्यति सोऽपि त्रिरूप-
पदगुणित इत्यादियुक्त्या नीलकपञ्चकस्य रूपपट्काधिकस्य घनेन साम्यं
कृत्वा प्राग्वज्जातो राशिः सक्षेपः नी ५ रू ६ । उत्थापने कृते जातो
राशिः ६ वा ११ ।

भाषा— वह कौन राशि है जिसके घन में छै घटा ५ पांच का भाग देने से निःशेष
हो जाता है उस राशि को शीघ्र बतलाओ यदि तुम्हें घनकुट्टक में अभ्यास है ।

उदाहरणम्—

यद्वर्गः पञ्चभिः जुगुप्सुयुक्तः षोडशोद्भूतः ।

शुद्धिमेति तमाचक्ष्व दत्तोऽसि गणिते यदि ॥ ३ ॥

अत्र राशिः या १ अस्य यथोक्तं कृत्वाद्यपक्षमूलं या ५ परपक्ष-
स्यास्य का ८० रू १५ । हित्वा क्षिप्त्वा च पदं यत्रेत्यादिनाप्यत्रा-
लापित एव हरः स्थाप्यः रूपाणि तु शोधनादिसिद्धानि इति तथा कृते
जातं का १६ रू १५ ।

अमुं नीलकाष्टकस्य सैकस्य वर्गेण समं कृत्वाप्तं कालकमानमभिव्यं
नीव ४ नी १ रू १ । कल्पितपदं नी ८ रू १ । इदमाद्यस्यास्य
या ५ । समं कृत्वा कुट्टकालब्धं यावत्तावन्मानं पी ८ रू ५ । उत्था-
पिते जातो राशिः १३ ।

अथवा ऋणरूपेणाधिके नीलकाष्टके कल्पिते सति लब्धं यावत्ताव-
न्मानं पी ८ रू ३ ।

एवं वर्गप्रकृत्या विषयो यथास्यात्तथा सुधीभिर्बहुधा विचिन्त्यमित्यस्य
प्रपञ्चो बहुधा दर्शितः तथा वर्गकुट्टकेऽपि किञ्चिद्दर्शितम् । एवं बुद्धि-
मद्भिरन्यदपि यथासम्भवं योज्यम् ।

भाषा— यदि गणित में दक्ष हो तो बताओ वह कौन राशि है जिसके वर्ग को
पांच से गुण देते हैं तीन जोड़ देते हैं सोलह से भाग देते हैं तो निःशेष हो जाता है ।

इति श्रीसिद्धान्तशिरोमणौ भास्कराचार्यविरचिते बीजगणिते

अनेकवर्णसम्बन्धिमध्यमाहरणभेदाः ।



अथ भावितमुच्यते ।

तत्र सूत्रं वृत्तम् ।

मुक्त्वेष्टवर्णं सुधिया परेषां कल्प्यानि मानानि यथेप्सितानि ।

तथा भवेद्भावितभङ्ग एवं स्यादाद्यबीजक्रिययेष्टसिद्धिः ॥ १ ॥

यत्रोदाहरणे वर्णयोर्वर्णानां वा वधाद्भावितमुत्पद्यते तत्रेष्टं वर्णम-
पहाय शेषयोः शेषाणां वा वर्णानामिष्टानि व्यक्तानि मानानि कृत्वा तैस्तान्
वर्णान् पक्षयोरुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्यैवं भावितभङ्गं कृत्वा प्रथमबीजक्रियया
वर्णमानमानयेत् ।

उदाहरणम् ।

चतुस्त्रिगुणयो राशयोः संयुतिद्विगुता तथाः ।

राशिघातेन तुल्या स्यात्तौ राशी वेत्सि चेद्बद्ध ॥ १ ॥

अत्र राशी या १ का १ । अनयोर्ज्योक्ते कृते जातौ पक्षौ
या ४ का ३ रू २

याकाभा १

एवं भाविते जाते मुक्त्वेष्टवर्णमित्यादिसूत्रेण कालकस्य किलेष्टं रूप-
पञ्चकं मानं कल्पितं तेन प्रथमपक्षे कालकमुत्थाप्य रूपेषु प्रक्षिप्य जातं
या ४ रू १७ । द्वितीयपक्षे या ५ । अनयोः समशोधने कृते प्राग्व-
ल्लब्धं यावत्तावन्मानं १७ । एवमेतौ जातौ राशी १७ । ५ अथवा
षट्केन कालकमुत्थाप्य जातौ राशी १० । ६ । एवमिष्टवशादानन्त्यम् ।

भाषा—वे दो राशि कौन हैं जिन्हें चार और तीन से गुण देते हैं उनके योग
में दो जोड़ देते हैं तो उन दोनों राशियों के गुणन के तुल्य हो जाता है उन्हें बतलाओ ।

उदाहरणम् ।

चत्वारो राशयः के ते यद्योगो नखसंगुणः ।

सर्वराशिहतेस्तुल्यो भावितज्ञ निगद्यताम् ॥ २ ॥

अत्र राशिः या १ । शेषा दृष्टाः ५ । ४ । २ अतः प्रथमबीजेन लब्धं
यावत्तावन्मानं ११ । एवं जाता राशयः ११ । ५ । ४ । २ वा २८ ।

१०।३।१। वा ५५।६।४।१ वा ६०।८।३।१ एवं बहुधा।

भाषा--हे भावित के जाननेवाले उन चार राशियों को बतलाओ जिनके योग को बीस से गुण देते हैं तो उन राशियों के गुणन के तुल्य हो जाता है।

उदाहरणम् ।

यौ राशी किल या च राशिनिहतियौ राशिवर्गौ तथा

तेषामैक्यपदं सराशियुगलं जातं त्रयोविंशतिः ।

पञ्चाशत्त्रियुताथवा वद कियत्तद्वाशियुग्मं पृथक्

कृत्वाऽभिन्नमवेहि वेत्सि गणकः कस्त्वत्समोऽस्ति क्षितौ ॥४॥

अत्र राशी या १। रू २ अनयोर्घातयुतिवर्गाणां योगः याव १
या ३ रू ६। इमं राशियोगोनत्रयोविंशतेः या १ रू २१ वर्गस्यास्य याव १

या ४२ रू ४४१। समं कृत्वा लब्धं यावत्तावन्मानं $\frac{२९}{३}$ । एवमेतौ

राशी $\frac{२९}{३}$ १-२। अथवा राशी या १ रू ३। अतः प्राग्बज्जातौ राशी

$\frac{९७}{११}$ । ३। एवं पञ्चकमिष्टं प्रकल्प्य जातावभिन्नौ ७।५।

अथ द्वितीयोदाहरणे राशी या १। रू २ अनयोर्घातयुतिवर्गाणां
योगः याव १ या ३ रू ६। अमुं राशिद्वयोनत्रिपञ्चाशद्वर्गस्यास्य याव १

या १०२ रू २६०१। समं कृत्वा प्राग्बज्जातौ राशी $\frac{१७३}{७}$ । २ वा

११।१७।

एवमेकस्मिन् व्यक्ते राशौ कल्पिते सति बहुनायासेनाभिन्नौ राशी
ज्ञायेते। अथ तौ यथाल्पायासेन भवतस्तथोच्यते।

भाषा--हे गणक ! वे दो कौन राशि हैं जो राशियाँ, उनके गुणन इन दोनों के
वर्ग इन सबों के योग के मूल में इन दोनों राशियों को जोड़ देते हैं तो वेईस हो जाता

है या तिरपन हो जाता है, अभिन्न उन दोनों राशियों को बतलाओ तो तुम्हारे सदृश इस पृथिवी में दूसरा गणक कौन होगा ।

तत्र सूत्रं सार्धवृत्तद्वयम् ।

❀ भावितं पक्षतोऽभीष्टाच्यक्त्वा वर्णौ सरूपकौ ।

अन्यतो भाविताङ्केन ततः पक्षौ विभज्य च ॥२॥

वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं भक्त्वेष्टेनेष्टतत्फले ।

एताभ्यां संयुतावनौ कर्त्तव्यौ स्वेच्छया च तौ ॥३॥

वर्णाङ्का वर्णयोर्माने ज्ञातव्ये ते विपर्ययात् ।

समयोः पक्षयोरेकस्माद्भावितमपास्यान्यतो वर्णौ रूपाणि च ततो भाविताङ्केन पक्षावपवर्त्य द्वितीयपक्षे वर्णाङ्कयोर्घातं रूपयुतं केनचिदिष्टेन विभज्य तदिष्टं तत्फलञ्च द्वे अपि वर्णाङ्काभ्यां स्वेच्छया युक्ते सती वर्णयोर्माने विपर्ययेण ज्ञातव्ये यत्र कालकाङ्को योजितस्तद्यावत्तावन्मानं यत्र यावत्तावदङ्कस्तत्कालकमानमित्यर्थः । यत्र तु इयत्तावशादेवं कृते सत्यालापो न घटते तत्रेष्टफलभ्यां वर्णाङ्कावनितौ व्यत्ययान्माने भवतः ।

* सं० । अत्रोदाहरणानुसारेण इया + इ'का + रू = या, का यत्र यावत्कालकमानेऽभिन्ने स्तः

अत्र कल्प्यते या = नी + इ', का = पी + इ

तदा याका = (नी + इ') (पी + इ)

= इ (नी + इ') + इ' (पी + इ) + रू

= इनी + इइ' + इ' पी + इ, इ + रू

तथा याका = (नी + इ') (पी + इ) = पीनी + इनी + इ'पी + इ इ'

समशोधनेन इइ' + रू = पीनी

∴ पी = $\frac{इइ' + रू}{नी}$ अत्र नीलकस्य तथाऽभिन्नं मानं कल्प्यं येन

पीतकस्य मानमप्यभिन्नं भवेत् ततस्ताभ्यामुत्थापनेन यावत्कालकयोरपि मानेऽभिन्ने भवतः ।

अथ इइ' + रू अस्य धनमाने नीलकस्य ऋणमाने कल्पिते पीतकस्यापि मानमृणं स्यात्तदा या = इ' - नी तथा का = इ - पी एतेन सर्वमुपपन्नं भवति ।

अथ प्रथमोदाहरणम् ।

चतुस्त्रिगुणयो राश्योः संयुतिर्द्वियुता तयोः ।

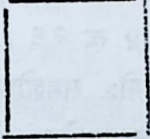
राशिघातेन तुल्येति ।

तत्र यथोक्ते कृते पक्षौ या ४ का ३ रू २ वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं
याकाभा १

१४ । एतदेकेनेष्टेन हतं जाते इष्टफले १ । १४ एते वर्णाङ्काभ्यां ४ । ३ ।
स्वेच्छया युते जाते यावत्तावत्कालकमाने ४ । १८ । वा १७ । ५ । द्विकेन
५ । ११ । वा १० । ६ ।

अस्योपपत्तिः ।

सा च द्विधा सर्वत्र स्यादेका क्षेत्रगतान्या राशिगतेति । तत्र क्षेत्र-
गतोच्यते । द्वितीयपक्षः किल भावितसमो वर्तते भावितं तु आयत-
चतुरस्रक्षेत्रफलं तत्र वर्णौ भुजकोटी ।

का१ अत्र क्षेत्रान्तर्यावत्तावच्चतुष्टयं वर्तते कालक-
त्रयं द्वे च रूपे । अतः क्षेत्राद्यावत्तावच्चतुष्टये,
न्यासः ।  या१ रूपचतुष्टयोने कालके स्वाङ्कगुणे * चाप-
नीते जातम् ।

द्वितीयपक्षे च तथाकृते जातं १४ । एतद्भाविताक्षेत्रान्तर्वर्त्तिनोऽ-
वशिष्टक्षेत्रस्याधस्तनस्य फलं तद्भुजकोटिविधाज्जातं ते चात्र ज्ञातव्ये ।

* सं टि० । अत्र कृष्णदैवज्ञः “अत्रोपपत्तिराचार्यैर्लिखितारितः । किं तु लेखकादि-
दोषादुपदेशविच्छिन्ना च संप्रति सा न स्वकार्यक्षमा” । वस्तुतोऽत्र भावितक्षेत्राद्यदि याव-
त्तावच्चतुष्टयमपनीतं भवति तथा रूपचतुष्टयोने कालकं स्वाङ्कगुणं चापनीतं भवति तदा
भावितक्षेत्रान्तर्वर्त्तिनोऽवशिष्टक्षेत्रस्याधस्तनस्यैव फलमवशिष्यते तेन नात्र काचित् त्रुटिः ।
भाष्ये “अतः क्षेत्राद्यावत्तावच्चतुष्टये” अस्मात्परं अपूर्णविरामचिह्नस्य “,” कामेल्यनेन
व्यवहृतस्य प्राचीनपुस्तकेऽभावात् एतादृशो भ्रमः संजात इत्यहं मन्ये ।

विश्वनाथप्रसादेन गीर्वाण्या भवनस्थितः ।

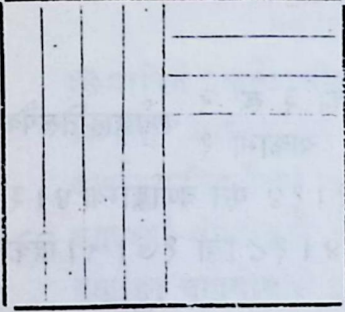
मैथिलो बलदेवो हि टिप्पणीं रुचिरां व्यधात् ॥

अत इष्टो भुजः कल्पितस्तेन फलेऽस्मिन् १४ । भक्ते कोटिर्लभ्यते

अनयोर्भुजकोट्योरेकतरा यावत्ता-
वदङ्कतुल्यैः रूपैः ४ । अधिकतरा
सती भावितक्षेत्रस्य कोटिर्भवति
यतो भावितक्षेत्राद्यावत्तावच्चतुष्टये-
ऽपनीते तत्कोटिश्चतुरस्रता जाता
एवं कालकतुल्यैः रूपैः ३ । अधि-
कतरो भुजो भवति ते एव याव-
त्तावत्कालकमाने ।

४

या



का

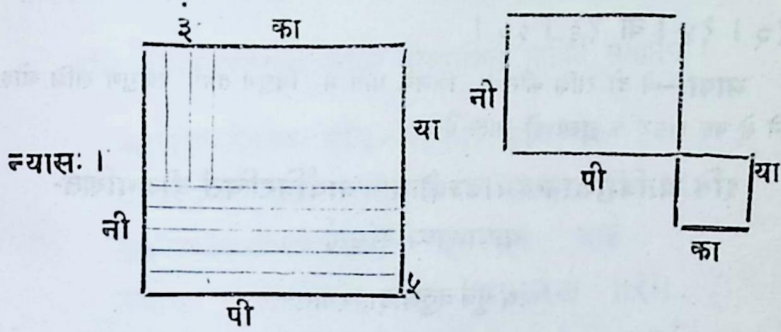
अथ राशिगतोपपत्तिरुच्यते ॥ सापि क्षेत्रमूलान्तर्भूता तत्र यावत्ता-
वत्कालकभुजकोटिमानात्मकक्षेत्रान्तर्गतस्य लघुक्षेत्रस्य भुजकोटिमानेऽन्य-
वर्णो कल्पितौ नी १ । पी १ । अत एतयोरेकतरो यावत्तावदङ्कतुल्यैः
रूपैरधिको बहिः क्षेत्रकोटेः कालकस्य मानमन्यः कालकतुल्यैः रूपैरधिको
भुजस्य यावत्तावतो मानं कल्पितं नी१ रू४ । पी१ रू३ । आभ्यां पक्ष-
योर्यावत्तावत्कालकवर्णावुत्थाप्योपरितनपक्षे नी३ पी४ रू २६ । भावित-
पक्षे च नीपीभा १ नी३ पी४ रू१२ । एतयोः समशोधने कृते
जातमधः नीपीभा १ । ऊर्ध्वपक्षे रू१४ । इदमेव तदन्तःक्षेत्रफलमेतद्वर्णा-
ङ्कयोर्घातस्य रूपयुतस्य समं स्यादतो वर्णमाने भवतस्तत्प्रागुक्तमेव । इय-
मेव क्रिया पूर्वाचार्यैः संक्षिप्तपाठेन निबद्धा । ये क्षेत्रगतामुपपत्तिं न
बुद्ध्यन्ति तेषामियं राशिगता दर्शनीया ।

उपपत्तियुतं बीजगणितं गणका जगुः ।

न चेदेवं विशेषोऽस्ति न पाटोबोजयोर्यतः ॥ १ ॥

अत इयं भावितोपपत्तिर्द्विविधा दर्शिता । यत्तूक्तं वर्णाङ्कयोर्घातो
रूपैर्युतो भावितक्षेत्रान्तर्वर्त्तिनोऽन्यक्षेत्रस्य कोणस्थस्य फलमिति तत् कचि-
दन्यथा स्यात् । यथा वर्णाङ्कौ ऋणगतौ भवतस्तदा तस्यैवान्तर्भावितक्षेत्रं

कोणे दृश्यते यदा तु भावितक्षेत्रे भुजकोटिभ्यां वर्णाङ्कावधिकौ धनगतौ भवतस्तदा भावितक्षेत्राद्बहिः कोणस्थं क्षेत्रं स्यात्तद्यथा ।



यदीदृशं तदेष्टफलाभ्यामूनितौ वर्णाङ्कौ यावत्तावत्कालकयोर्माने भवतः

उदाहरणम् ।

द्विगुणेन कयोः राशयोर्घातेन सदृशं भवेत् ।

दशेन्द्रहतराशयैक्यं घूनषष्टिविवर्जितम् ॥ १ ॥

अत्र राशी या१ । का१ । अनयोर्यथोक्ते कृते भाविताङ्केन भक्ते जातं या५ का७ रू२६ । अत्र वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं ६ । द्विहतमिष्टफले २ । ३ । आभ्यां वर्णाङ्कौ युतौ राशी १० । ७ वा ९ । ८ । वा ऊनितौ जातौ ४ । ३ । वा ५ । २ ।

भाषा—वे दो कौन राशि हैं जिनके गुणन को द्विगुणित कर देते हैं तो अठ्ठावन से रहित दश और चौदह से गुने हुए राशिओं के योग के समान हो जाता है ।

उदाहरणम्—

त्रिपञ्चगुणराशिभ्यां युतो राशयोर्वधः कयोः ।

द्विषष्टिप्रमितो जातो राशिं त्वं वेत्सि चेद्दद ॥२॥

अत्र यथोक्ते कृते जातौ पक्षौ या३ का५ रू६२ । वर्णाङ्काहतिरूपैक्यमा१

पैक्यं ७७ । इष्टतत्फले ७ । ११ । आभ्यां वर्णाङ्कौ युतौ एव कार्यौ
इष्टतत्फलाभ्यामाभ्यां ७।११। ऊनितौ चेद्विधीयेते तदा ऋगगतौ भवतो-
ऽतः आभ्यां ७ । ११। युतौ जातौ राशी ६ । ४ । वा २ । ८ । ऊनितौ
१२ । १४ । वा १६ । १० ।

भाषा—वे दो राशि कौन हैं जिनके धात में त्रिगुण तथा पञ्चगुण राशि जोड़
देने से वह बासठ के तुल्य हो जाता है ।

इति श्रीविशुद्धानन्दगोड्डीश्रीतिषाचार्यविरचितं बीजगणित-

भाषाभाष्यं संपूर्यम् ।

अथ पूर्वचतुर्थोदाहरणम्—

यौ राशी किल या च राशिगहतिर्यौ राशिवर्गौ तथा
तेषामैक्यपदं सराशियुगलमिति ।

अत्र राशी या१ । का१ । अन्वर्धातयुतिवर्गाणां योगः याव १
काव१ याकाभा१ या१ का१ । अस्य मूलाभावाद्राशिद्वयोनायास्त्रयो-
विंशतेः या१ का१ रू२३ । वर्णनेन याव१ काव१ याकाभा२ या ४६
का ४६ रू५२९ । साम्यं तत्र समयोगवियोगादौ समतैवेति समवर्गमे
शोधने च कृते भाविताङ्केन हृते जातं या४७ का४७ रू५२६ । अत्र
वर्णाङ्काहतिः रूपयुता १६८० । इयं चत्वारिंशतेष्टेन हृता फलं ४२
इष्टं ४० । अत्रेष्टफलाभ्यामाभ्यां वर्णाङ्कावूनावेव कार्यौ तेन जातौ राशी
७।५ । युतौ चेत् क्रियते तर्हि जात्रं त्रयोविंशतिरिति पूर्वालापो न घटते ।

पूर्वोदाहरणम्—

पञ्चाशत् त्रियुताथवेति ।

अत्रोदाहरणे यथोक्तकृतभाविताङ्केन विभक्ते जातं या१०७ का१०७
रू२८०६ । अत्र वर्णाङ्काहतिरूपैक्यं ८६४० । इष्टतत्फले ९०।९६
आभ्यां वर्णाङ्कानितौ राशी ११ । १७ । एवमन्यत्रापि ।

कचिद्बहुषु साम्येषु भावितोन्मितीरानीय ताभ्यः समीकृतच्छेदगमाभ्यः
साम्ये पूर्वबीजक्रिययैव राशी ज्ञायेते । अत्र राशी इति द्विवचनादन्येषां
व्यादिवर्णानामिष्टानि मानानि कल्प्यानीत्यर्थात्सिद्धम् ।

इति श्रीभास्कराचार्यविरचिते बीजगणिते भावितं समाप्तम् ।

आसीन्महेश्वर इति प्रथितः पृथिव्या-
माचार्यवर्यपदवीं विदुषां प्रपन्नः ।
लब्ध्वाऽवबोधकलिकां तत एव चक्रे
तज्जेन बीजगणितं लघु भास्करेण ॥१॥

ब्रह्माह्वयश्रीधरपद्मनाभबीजानि यस्मादतिविस्तृतानि ।
आदाय तत्सारमकारि नूनं सद्युक्तियुक्तं लघु शिष्यतुष्ट्यै ॥२॥

अत्रालुण्डुप्सहस्रं हि समुत्त्रोद्देशके मितिः ।
कचित्सूत्रार्थविषयं व्याप्तिं दर्शयितुं क्वचित् ॥३॥
क्वचिच्च कल्पनाभेदं क्वचिद्युक्तिरुदाहृतम् ।
नहुदाहरणान्तोऽस्ति स्तोत्रमुक्तमिदं यतः ॥४॥
दुस्तरः स्तोत्रबुद्धीनां शास्त्रविस्तारवारिधिः ।
अथवा शास्त्रविस्तृत्या किं कार्यं सुधियामपि ॥५॥
उपदेशलवं शास्त्रं कुरुते धीमतो यतः ।
तत्तु प्राप्यैव विस्तारं स्वयमेवोपगच्छति ॥६॥

यथोक्तं यन्त्राध्याये—

जले तैलं खले गुह्यं पात्रे दानं मनागपि ।
प्राज्ञे शास्त्रं स्वयं याति विस्तारं वस्तुशक्तितः ॥७॥

तथा गोले मयोक्तम् ।

उल्लसदमलमतीनां त्रैराशिकमात्रमेव पाठी बुद्धिरेव बीजम् ।

तथा गोलाध्याये मयोक्तम् ।

अस्ति त्रैराशिकं पाटी बीजं च विमला मतिः ।
किमज्ञातं सुबुद्धीनामतो मन्दार्थमुच्यते ॥८॥

गणकभणितिरम्यं बाललीलावगम्यं
सकलगणितसारं सोपपत्तिप्रकारम् ।
इति बहुगुणयुक्तं सर्वदोषैर्विमुक्तं
पठ पठ मतिवृद्धयै लघ्विदं प्रौढिसिद्धयै ॥९॥

इति श्रीभास्कराचार्यविरचिते सिद्धान्तशिरोमणौ
बीजगणिताध्यायः समाप्तः ।

